

# 亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数

## STRESS FUNCTIONS WITH FINITE MAGNITUDE OF STRESS CONCENTRATION AT CRACK TIP

段 樹金\*・兒嶋弘行\*\*・中川建治\*\*\*

By Shujin DUAN, Hiroyuki KOJIMA and Kenji NAKAGAWA

The subject of this paper is to analyze the stress concentrations near the tip of a crack traversing a plate in uniform tension or shear. A method is presented to construct the transient interval at crack tip where both the crack opening displacement and the finite stress concentrations appear. The stress functions of this type are more suitable than Dugdale's assumption to analyze the crack problems contained in materials such as concrete or rock. Several numerical examples are shown to represent the possible stress distributions and crack opening displacement shapes along the crack line.

Keywords : crack, finite stress, analytical function

### 1. まえがき

金属材料, コンクリート, 岩盤中等の亀裂や巨視的に亀裂とみなし得る断層部先端の応力集中の研究は土木工学の分野でも基本的で重要な課題であろう。亀裂をもつ板の二次元問題は Westergaard<sup>2)</sup>や Irwin<sup>3)</sup>以来多くの研究があつて枚挙にいとまがないほどであるが, 図-1に示すような無限板のモード I の応力集中 ( $y$  軸上に沿う  $\sigma_x$ ) に限つて応力分布の形状を大別すると図-2のようになる。モード I の引張りの場合として図-2の応力分布を説明すると,  $W$  とは Westergaard<sup>2)</sup>や Irwin<sup>3)</sup>によるもので亀裂先端に無限大の応力が生じるものである。この場合の応力関数は後述するが  $F_1(z, a)$  と表わすことにする。無限大の応力集中は不合理であるから降伏応力  $\sigma_{yd}$  で打ち切る応力解を与えたのが Dugdale<sup>4)</sup>であり, 図中では  $D$  と表わしている。この2つのものが一般に最も多く引用されていて基礎になっているが, コンクリート構造物等に生じる亀裂では有限な勾配で緩やかに

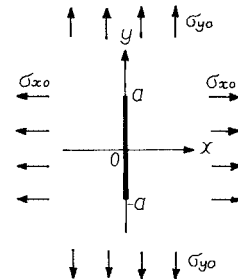


図-1 亀裂をもつ無限板と一様応力度

立ち上がる応力集中が合理的である。たとえば, Wium<sup>7)</sup>は有限要素法 (FEM) による数値解析で図-2の曲線  $W$ 、 $W$  に示すような応力集中が合理的であることを示している。Cho<sup>8)</sup>は FEM による解析と実験とによつて図-2の曲線  $C$  のような応力分布を仮定して Dugdale 方式より望ましいと報告している。ファイバーコンクリートの亀裂では, Wecharatana<sup>5)</sup>は図-2の  $W$ 、 $W$  を実験より導いていて, Visalvanich<sup>13)</sup>は図-2の曲線  $V$  が望ましいとして実験データの整理をしている。これに対して Barenblatt<sup>14)</sup>は概念的なものであつて解式をもつて定義したものではないが, 次のような意見を公表している。亀裂の先端にはヤング率に相当するほどに大きな有限応力集中が発生するが, その範囲は非常

\* 学生会員 岐阜大学研究生 工学部土木工学科 (中華人民共和国 華北水利水電学院)

\*\* 正会員 工修 徳島大学助教授 工学部土木工学科 (〒770 徳島市常三島町)

\*\*\* 正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科 (〒501-11 岐阜市柳戸1-1)

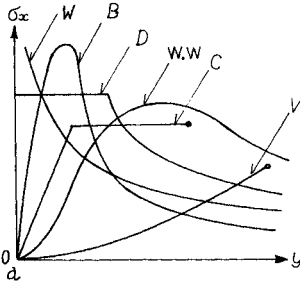


図-2 従来の応力集中の形状

に狭く材料の物理的な特性による幅である。このような見解によって Barenblatt は図-2 の曲線 B に相当する応力分布図を提示している。このような状況より次のようなことが考えられよう。

1° 実験データをもとにして安全性の指標を応力拡大係数  $K$  や  $J$  積分で表現する限り Westergaard<sup>2)</sup> の解は簡便で有効であるが、一般の解析では特異点は好ましくない。

2° Dugdale の解は塑性域を解析するには好都合であるが、平均応力がいかに小さくなくても  $\sigma_{yd}$  が生じるというのは不都合である。

3° 応力集中の形状は亀裂先端より緩やかに立ち上がり、作用している平均応力に比例したのようになるような応力関数は、荷重漸増法等で残留応力を解析するには望ましい。

本文で報告する著者らの応力関数はいろいろ不備な点も含んでいるが、上記の諸点を改良したもので次のような事項に基づいたものである。

(1) 亀裂先端も含めて全領域を弾性体として重調和関数(応力関数)を導く。

(2) 亀裂先端部分は開口変位も応力度も共存する区間によって構成されていて、この区間を本文では遷移区間と仮称する。実際には塑性の大変形が生じている部分であり、弾性の開口変位で表わすことになる。

(3) 応力度と開口変位が共存する区間は数学的には複素関数の対数分岐特異点である。Westergaard の解は代数分岐に対応している。

(4) 亀裂先端部分の開口変位は Westergaard によるものは図-3 に示すように楕円形が基本であり、著者および Dugdale のものは有限な曲率の曲線を反転させて接触させた形状となっている。

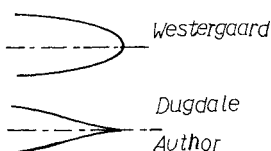


図-3 亀裂先端の形状

## 2. 基本的な解 $F_1(z, a)$

図-1 に示すように  $y$  軸上に長さ  $2a$  の亀裂をもち遠方で  $\sigma_x = \sigma_{x0}$ ,  $\sigma_y = \sigma_{y0}$ ,  $\tau_{xy} = 0$  を受ける無限板の解は Westergaard<sup>2)</sup> によって解かれている。本研究ではこの解を基礎にするので  $F_1(z, a)$  と表わして次に簡単に述べる。

$$\nabla^2 \nabla^2 F_1(z, a) = 0, \quad z = x + iy \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= R_e [2F'_{11} - \bar{z}F''_{11} - F'_{12}] \\ \sigma_y &= R_e [2F'_{11} + \bar{z}F''_{11} + F'_{12}] \\ \tau_{xy} &= -R_e [i(\bar{z}F''_{11} + F'_{12})] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$2G(u + iv) = \frac{3-\nu}{1+\nu} F_{11} - z\bar{F}'_{11}(\bar{z}, a) - \bar{F}'_{12}(\bar{z}, a)$$

$$F_{11}(z, a) = \frac{1}{4}(\sigma_{y0} - \sigma_{x0})z + \frac{1}{2}\sigma_{x0}\sqrt{z^2 + a^2} \dots\dots\dots (3)$$

$$F_{12}(z, a) = \frac{1}{4}(\sigma_{y0} - \sigma_{x0})z^2 - \frac{1}{2}\sigma_{x0}a^2 \ln(z + \sqrt{z^2 + a^2})$$

$$\sigma_x = \sigma_{x0} \cdot R_e \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{a^2 x}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right] \dots\dots\dots (4)$$

ここに示した  $\sigma_x$  は  $z = \pm ia$  で特異点となるので  $y$  軸上の  $\sigma_x$  は図-2 の曲線 W となる。

## 3. 重み積分による応力関数 $Q_j(z, a, b)$

$F_1(z, a)$  によって生じる応力集中の無限大は積分可能な無限大である。これは集中荷重によって生じる無限大応力は荷重を積分して線荷重にすると有限な応力度になることに対応している。したがって  $F_1(z, a)$  を  $a$  について区間  $(a, a+b)$  にわたって積分することを試みる。この場合重み関数  $\rho(a)$  を乗じつつ積分することにする。積分するので  $a \rightarrow t$  とするが重みを  $\rho_j(t)$  として種々に変化させることによって有限ないろいろな応力集中を与える応力関数  $Q_j(z, a, b)$  が導かれる。

$$\begin{aligned} Q_j(z, a, b) &= \int_a^{a+b} \rho_j(t) F_1(z, t) dt \\ &= \bar{z} Q_{j1}(z, a, b) + Q_{j2}(z, a, b) \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

### (1) 重み関数 $\rho_j(t)$

区間  $(a, a+b)$  で次のように定義され、他の領域では 0 の重み関数を定義する(図-4 参照)。

1° 長方形  $\rho_1(t) = 1/b \dots\dots\dots (6)$

2° 1次式 その1

$$\rho_2(t) = 2(a+b-t)/b^2 \dots\dots\dots (7)$$

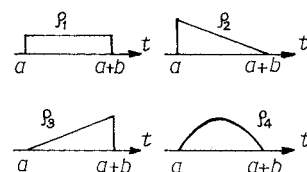


図-4 重み関数  $\rho_j(t)$

3° 1 次式 その 2

$$\rho_3(t) = 2(t-a)/b^2 \dots \dots \dots (8)$$

4° 2 次式

$$\rho_4(t) = -6|t^2 - (2a+b)t + a(a+b)|/b^3 \dots \dots \dots (9)$$

これらの  $\rho_i(t)$  を式 (5) へ代入して  $Q_i(z, a, b)$  と  $\sigma_x$  とを示すが他の応力度や変位は割愛する。

(2)  $\rho_1(t)$  による  $Q_1(z, a, b)$

$$Q_1(z, a, b) = \bar{z}Q_{11}(z, a, b) + Q_{12}(z, a, b) \dots \dots \dots (10)$$

$$Q_{11}(z, a, b) = \frac{1}{4}(\sigma_{y0} - \sigma_{x0})z + \frac{\sigma_{x0}}{2}|f_{11}(z, a+b) - f_{11}(z, a)|$$

$$Q_{12}(z, a, b) = \frac{1}{4}(\sigma_{y0} - \sigma_{x0})z^2 + \frac{\sigma_{x0}}{2}|f_{12}(z, a+b) - f_{12}(z, a)|$$

$$\sigma_x = R_e[f_{13}(z, a+b) - f_{13}(z, a)] \sigma_{x0}$$

$$f_{11}(z, t) = \frac{1}{2b}|t\sqrt{z^2+t^2} + z^2 \ln(t + \sqrt{z^2+t^2})|$$

$$f_{12}(z, t) = \frac{1}{b} \left\{ -\frac{t^2}{3} \ln(z + \sqrt{z^2+t^2}) - \frac{zt}{6} \sqrt{z^2+t^2} + \frac{1}{9}t^3 + \frac{z^2}{6} \ln(t + \sqrt{z^2+t^2}) \right\}$$

$$f_{13}(z, t) = \frac{1}{b} \left\{ iy \ln(t + \sqrt{z^2+t^2}) + \frac{tx}{\sqrt{z^2+t^2}} \right\}$$

(3)  $\rho_2(t)$  による  $Q_2(z, a, b)$

$$Q_2(z, a, b) = \bar{z}Q_{21}(z, a, b) + Q_{22}(z, a, b) \dots \dots \dots (11)$$

$$Q_{21}(z, a, b) = \frac{1}{4}(\sigma_{y0} - \sigma_{x0})z + \frac{\sigma_{x0}}{2}|f_{21}(z, a+b) - f_{21}(z, a)|$$

$$Q_{22}(z, a, b) = \frac{1}{4}(\sigma_{y0} - \sigma_{x0})z^2 + \frac{\sigma_{x0}}{2}|f_{22}(z, a+b) - f_{22}(z, a)|$$

$$\sigma_x = \sigma_{x0}R_e[f_{23}(z, a+b) - f_{23}(z, a)]$$

$$f_{21}(z, t) = \frac{c_1}{2}|t\sqrt{z^2+t^2} + z^2 \ln(t + \sqrt{z^2+t^2})| - \frac{c_2}{3}(z^2 + t^2)^{3/2}$$

$$f_{22}(z, t) = \left( \frac{c_1}{3} - \frac{c_2}{4}t \right) t^3 \ln(z + \sqrt{z^2+t^2}) - \frac{c_2}{12}z(z^2 + t^2)^{3/2} - \frac{c_1 z^3}{6} \ln \cdot (t + \sqrt{z^2+t^2}) - \frac{c_1}{9}t^3 + \left( \frac{c_1}{6}t + \frac{c_2}{4}z^2 \right) \cdot z\sqrt{z^2+t^2} + \frac{c_2}{16}t^4$$

$$f_{23}(z, t) = ic_1 t y \ln(t + \sqrt{z^2+t^2}) + \frac{(c_1 - c_2 t)xt}{\sqrt{z^2+t^2}} + c_2 \bar{z} \sqrt{z^2+t^2}$$

(4)  $\rho_3(t)$  による  $Q_3(z, a, b)$

$$Q_3(z, a, b) = \bar{z}Q_{31}(z, a, b) + Q_{32}(z, a, b) \dots \dots \dots (12)$$

$$Q_{31}(z, a, b) = \frac{1}{4}(\sigma_{y0} - \sigma_{x0})z + \frac{\sigma_{x0}}{2}|f_{31}(z, a+b) - f_{31}(z, a)|$$

$$Q_{32}(z, a, b) = \frac{1}{4}(\sigma_{y0} - \sigma_{x0})z^2 + \frac{\sigma_{x0}}{2}|f_{32}(z, a+b) - f_{32}(z, a)|$$

$$\sigma_x = \sigma_{x0}R_e[f_{33}(z, a+b) - f_{33}(z, a)]$$

$$f_{31}(z, t) = \frac{-a}{b^2}|t\sqrt{z^2+t^2} + z^2 \ln(t + \sqrt{z^2+t^2})| + \frac{2}{3b^2}(z^2 + t^2)^{3/2}$$

$$f_{32}(z, t) = \frac{-2}{b^2} \left\{ t^3 \left( \frac{t}{4} - \frac{a}{3} \right) \ln(z + \sqrt{z^2+t^2}) + \frac{z}{12}(z^2 + t^2)^{3/2} - \frac{z^3 a}{6} \ln(t + \sqrt{z^2+t^2}) - \frac{t^4}{16} \left( \frac{at}{6} + \frac{z^2}{4} \right) z\sqrt{z^2+t^2} + \frac{at^3}{9} \right\}$$

$$f_{33}(z, t) = \frac{-2}{b^2} \left\{ iay \ln(t + \sqrt{z^2+t^2}) - \frac{(t-a)xt}{\sqrt{z^2+t^2}} + \bar{z}\sqrt{z^2+a^2} \right\}$$

(5)  $\rho_4(t)$  による  $Q_4(z, a, b)$

$$Q_4(z, a, b) = \bar{z}Q_{41}(z, a, b) + Q_{42}(z, a, b) \dots \dots \dots (13)$$

$$Q_{41}(z, a, b) = \frac{1}{4}(\sigma_{y0} - \sigma_{x0})z + \frac{\sigma_{x0}}{2}c_3|f_{41}(z, a+b) - f_{41}(z, a)|$$

$$Q_{42}(z, a, b) = \frac{1}{4}(\sigma_{y0} - \sigma_{x0})z^2 + \frac{\sigma_{x0}}{2}c_3|f_{42}(z, a+b) - f_{42}(z, a)|$$

$$\sigma_x = \sigma_{x0}R_e[f_{43}(z, a+b) - f_{43}(z, a)]$$

$$f_{41}(z, t) = \frac{t}{8}(4c_5 - z^2)\sqrt{z^2+t^2} + \left( \frac{c_4}{3} + \frac{t}{4} \right) (z^2 + t^2)^{3/2} + \frac{z^2}{8}(4c_5 - z^2) \ln(t + \sqrt{z^2+t^2})$$

$$f_{42}(z, t) = \left( \frac{c_5}{3} + \frac{c_4 t}{4} + \frac{t^2}{5} \right) t^3 \ln(z + \sqrt{z^2+t^2}) - \left( \frac{c_5}{6} - \frac{3z^2}{40} \right) z^3 \ln(t + \sqrt{z^2+t^2}) - \frac{c_5}{9}t^3 + z \left\{ \frac{c_5}{6}t - \frac{c_4}{4}z^2 + \frac{t(2t^2 - 33z^2)}{40} \right\} \cdot \sqrt{z^2+t^2} + \frac{c_4}{12}z(z^2 + t^2)^{3/2} - \frac{c_4}{16}t^4 - \frac{t^5}{25}$$

$$f_{43}(z, t) = \left( \frac{z}{2}t - \frac{x}{2}t + c_4 z - 2c_4 x \right) \sqrt{z^2+t^2} + \left( \frac{3}{2}xz^2 - \frac{z^3}{2} + c_5 z - c_5 x \right) \ln \cdot (t + \sqrt{z^2+t^2}) + (c_4 t - z^2 + c_5) \frac{xt}{\sqrt{z^2+t^2}}$$

ここで

$$c_1 = \frac{2}{b^2}(a+b), \quad c_2 = \frac{2}{b^2}, \quad c_3 = -\frac{6}{b^3}$$

$$c_4 = -(2a+b), \quad c_5 = a(a+b) \dots \dots \dots (14)$$

である。応力  $\sigma_x$  は実数部を採るものとする。

4. 重み積分法の  $Q_j(z, a, b)$  による計算例

簡単な計算例によって応力関数  $Q_j(z, a, b)$  による  $y$  軸上の  $\sigma_x(y)$  と変位の形状を示そう。

(1) 計算例1  $\rho_j(t)$  による  $\sigma_x$  と  $u$

$$\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = 100 \text{ (kN/m}^2\text{)}, \quad \tau_{xy0} = 0$$

$a = 1.0 \text{ m}$ ,  $b = 0.3 \text{ m}$ ,  $\nu = 0.3$  として  $y$  軸上の  $\sigma_x(y)$  を図-5に示す。 $|y| \leq a$  では  $\sigma_x(y) = 0$  となるので  $a < y$  として  $\rho_1(t) \sim \rho_4(t)$  に対するものを比較のために  $F_1(z, a)$  によるものを併記する。

図-6は  $y$  軸上の開口変位, すなわち  $u(+0, y)$  を示している。図-3で述べたことを実証するものである。

図-5の応力集中の形については次のような特徴がみられよう。

- 1°  $\rho_1(t), \rho_2(t)$  によるものは  $y = a$  で無限の勾配で立ち上がる。
- 2°  $\rho_3(t)$  によるものは Visalvanich<sup>13)</sup> によるファイバーコンクリートの亀裂の開口部応力に対応している。
- 3°  $\rho_4(t)$  によるものは Wecharatana ら<sup>5)</sup> によるファイバーコンクリートの場合, あるいは Wium ら<sup>7)</sup> によるコンクリートの亀裂に応じたものである。
- 4°  $\rho_2(t), \rho_4(t)$  によるものは遷移区間内で応力度が

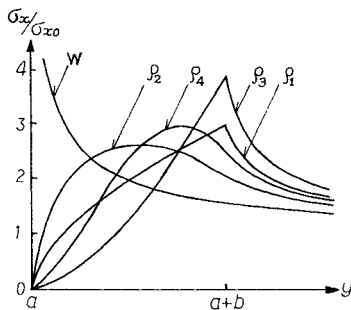


図-5  $\rho_j(t)$  による  $\sigma_x(y)$  の変化

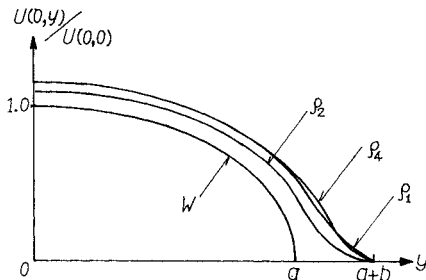


図-6  $\rho_j(t)$  による  $y$  軸上の開口変位  $u$  の比較

最大になり, コンクリートの  $\sigma$ - $\epsilon$  曲線の破断点近傍の曲線に対応しているものと認められよう。

(2) 計算例2 遷移区間長  $b$  と  $\sigma_x$

亀裂部分の応力度 0 の区間  $2a$  と遷移区間  $b$  との比  $b/a$  が小さくなると  $y$  軸上の  $\sigma_x$  は大きくなり  $b \rightarrow 0$  では  $F_1(z, a)$  による曲線に近づく。この様子を示すために  $\rho_1(t)$  に対応する  $Q_1(z, a, b)$  による  $y$  軸上の  $\sigma_x(y)$  の変化を代表例として図-7に示す。 $\sigma_x$  の最大値は  $1/\sqrt{b}$  のオーダーで大きくなっている。

(3) 計算例3 Dugdale 方式の近似

遷移区間  $b$  に対する重み  $\rho(t)$  を適当に選ぶならば Dugdale<sup>4)</sup> による応力分布 ( $\sigma_{yd}$  で切られた形) が近似的に表わされるはずである。これは積分方程式で表わされる問題であるが,  $\rho_1(t)$  と  $\rho_2(t)$  の解  $Q_1(z, a, b)$  と  $Q_2(z, a, b)$  を逐次重ね合わせつつ近似解を得ることが可能である。 $\sigma_{yd} = 2.5 \sigma_{x0}$ ,  $\sigma_{y0} = \tau_{xy0} = 0$ ,  $a = 1 \text{ m}$ ,  $b = 0.258 \text{ m}$  として,  $1.05 < y < 1.258$  の区間で  $\sigma_x(y) = \sigma_{yd}$  となるように  $\rho(t)$  を区間を細分割しつつ数値計算したものを図-8, 9に示す。図-9の  $\sigma_m$  は Von-Mises の応力 ( $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2$ )<sup>0.5</sup> であり変位  $u$  とは  $x = +0$  に沿う  $a < y < a + b$  の区間の開口変位である。 $\sigma_m$  が  $\pm 5\%$  の誤差以内で一定になる区間を図-9の(2), (3)に示す。これらは従来の塑性域の解析結果に対応している<sup>8), 9)</sup>。

この例で重要な点は, 弾性解であるから図-9(1)のように開口変位が現われて塑性伸びの代わりとなるが,  $\sigma_m$  一定という降伏部分の形状は図-9(2), (3)のように塑性解のものに近似する(変形は一致しなくても応力の分布は一致する)という結果を示している。

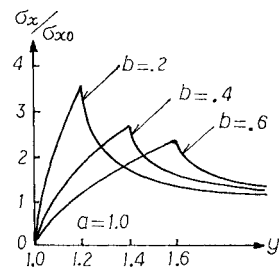


図-7  $b$  の変化による  $Q_1$  よりの応力  $\sigma_x(y)$

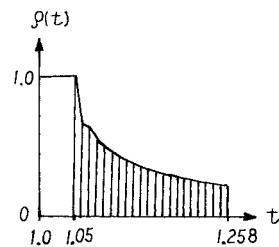
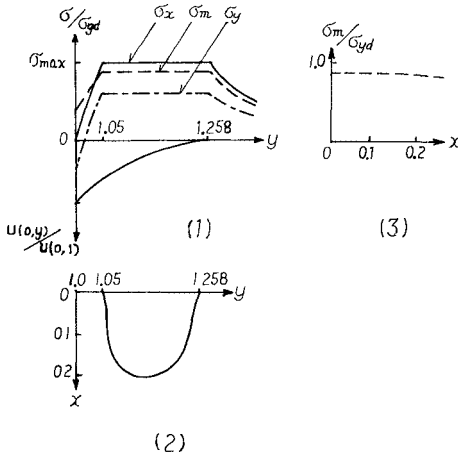


図-8 重み  $\rho(t)$



(1) y 軸に沿う応力度と開口変位  
 (2)  $\sigma_m$  一定領域  
 (3)  $y=1.13$  線上の  $\sigma_m$

図-9 Dugdale 方式の近似

(4) 計算例 4 開口変位 (COD) について

亀裂の安全性の指標の 1 つとされている先端部分の開口変位<sup>8)</sup> (Crack Opening Displacement) COD,  $\delta$  が Dugdale による場合と, 計算例 3 のように応力の立ち上がり部分が存在する拡張 Dugdale 方式でどのように差が現われるであろうか.  $\sigma_{x0}$  以外のデータをすべて計算例 3 の場合と同じものとして  $\sigma_{x0}/\sigma_{yd}$  に対して  $\delta$  がどのようになるかを計算した. 計算結果を図-10 に示すが大きな差異は生じないことがわかる.

5. Dugdale 方式の拡張

Dugdale による解は亀裂部分の応力度が直立してい

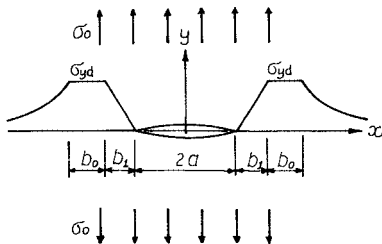


図-11 Dugdale モデルの拡張

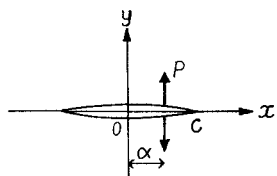


図-12 集中力  $P=1$  を受ける亀裂

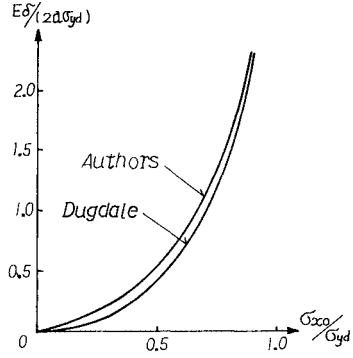


図-10 COD  $\delta$  の比較

るが, コンクリートや地層内の亀裂においては Cho<sup>6)</sup> による実験に合わせて応力度が直線勾配で立ち上がって一定  $\sigma_{yd}$  になる方式へ拡張の方がより好ましいと思われる. すでに計算例 3 によって示したものと一致するものであるが, 重み積分法ではなく Dugdale が導いた方法で導くことにする.

図-12 に示すように集中力  $P=1$  を 1 対にして作用させる場合の応力関数  $H_1(z, \alpha, c)$  は<sup>8),9)</sup>

$$H_1(z, \alpha, c) = \bar{z}H_{11}(z, \alpha, c) + H_{12}(z, \alpha, c) \dots \dots \dots (15)$$

$$H_{11}(z, \alpha, c) = \frac{i}{2\pi} \left[ \ln |2(\alpha z - c^2)| + 2\sqrt{(a^2 - c^2)(z^2 - c^2)} - \ln(z - a) \right] \dots \dots \dots (16)$$

$$H_{12}(z, \alpha, c) = (z - 2a)H_{11}(z, \alpha, c) - \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{\pi} \ln(z + \sqrt{z^2 - c^2}) \dots \dots \dots (17)$$

である. これを重み関数

$$\rho_s(t, a, b_0, b_1) = 0, \dots, t < a$$

$$a + b_0 + b_1 < t \dots \dots \dots (18)$$

$$= \frac{(t - a)}{b_1}, \quad a < t < a + b_1$$

$$= 1, \quad a + b_1 < t < a + b_0 + b_1$$

によって区間  $(a < t < a + b_0 + b_1)$  にわたって積分する.

$$H_2(z, a, b_0, b_1) = \bar{z}H_{21}(z, a, b_0, b_1) + H_{22}(z, a, b_0, b_1)$$

$$= \int_a^{a+b_0+b_1} \rho_s(t, a, b_0, b_1) \cdot H_1(z, t, c) dt \dots \dots \dots (19)$$

この積分は非常に煩雑になって不都合であるが, 目的とする  $x$  軸上の  $\sigma_y(x)$  は複素関数の型で導き得る. 実数部分が目的とする応力度である. ここに

$$c = a + b_0 + b_1 \dots \dots \dots (20)$$

とする.

$$\sigma_y(z, a, b_0, b_1) = Re \left[ \frac{\sigma_{yd} z}{\pi \sqrt{z^2 - c^2}} h_1(z, a, b_0, b_1) + i \frac{\sigma_{yd}}{\pi b_1} h_2(z, a, b_0, b_1) + i \frac{\sigma_{yd}}{\pi} h_3(z, a, b_0, b_1) \right] \dots (21)$$

$$h_1(z, a, b_0, b_1) = \frac{\pi \sigma_0}{\sigma_{yd}} + i \ln \left\{ \frac{a + b_1 + i \sqrt{c^2 - (a + b_1)^2}}{a + b_1 - i \sqrt{c^2 - (a + b_1)^2}} \right\} + \frac{2}{b_1} \{ \sqrt{c^2 - (a + b_1)^2} - \sqrt{c^2 - a^2} \} \\ + \frac{i}{b_1} (z + a) \ln \left\{ \frac{a + b_1 + i \sqrt{c^2 - (a + b_1)^2}}{a + i \sqrt{c^2 - a^2}} \right\} + \frac{i}{b_1} (z - a) \ln \left\{ \frac{a + b_1 - i \sqrt{c^2 - (a + b_1)^2}}{a - i \sqrt{c^2 - a^2}} \right\} \dots (22)$$

$$h_2(z, a, b_0, b_1) = (z - a) \ln \left[ \frac{(z - a)(a + b_1)z - c^2 + i \sqrt{z^2 - c^2} \sqrt{c^2 - (a + b_1)^2}}{(z - a - b_1)(az - c^2 + i \sqrt{z^2 - c^2} \sqrt{c^2 - a^2})} \right] \\ + (z + a) \ln \left[ \frac{(z + a)(a + b_1)z - c^2 - i \sqrt{z^2 - c^2} \sqrt{c^2 - (a + b_1)^2}}{(z + a + b_1)(az + c^2 - i \sqrt{z^2 - c^2} \sqrt{c^2 - a^2})} \right] \dots (23)$$

$$h_3(z, a, b_0, b_1) = \ln \left[ \frac{(z - a - b_1)(c^2 + z(a + b_1) - i \sqrt{c^2 - (a + b_1)^2} \sqrt{z^2 - c^2})}{(z + a + b_1)(z(a + b_1) - c^2 + i \sqrt{c^2 - (a + b_1)^2} \sqrt{z^2 - c^2})} \right] \dots (24)$$

ここで  $|x| = c + 0$  で  $\sigma_y$  が特異点にならないための条件は次のようになる。

$$h_4(\sigma_0, \sigma_{yd}, a, b_0, b_1) = \frac{\pi \sigma_0}{\sigma_{yd}} - 2 \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{c^2 + (a + b_1)^2}}{a + b_1} \right\} + \frac{2}{b_1} \left[ \sqrt{c^2 - (a + b_1)^2} - \sqrt{c^2 - a^2} \right] \\ + a \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} \right\} - a \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{c^2 - (a + b_1)^2}}{a + b_1} \right\} = 0 \dots (25)$$

この条件式  $h_4 = 0$  が成立するようにすると図-11に示すような応力分布が得られる。

### 6. 計算例5 $\sigma_{y0}$ と $b_0, b_1$ の関係

拡張して直線伏の立ち上がり部分をもつ Dugdale 方式の計算結果を示そう。

$a = 1 \text{ m}$ ,  $b_1 = 0.1 \text{ m}$ ,  $\sigma_{x0} = 0$  として,  $\sigma_y = \sigma_{yd}$  という

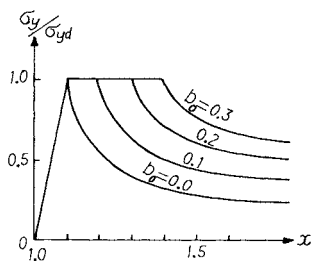


図-13  $\sigma_0$  と  $b_0$  に対する  $\sigma_y$  の分布

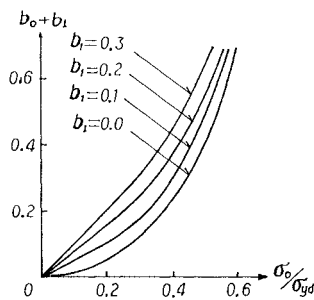


図-14  $b_0 + b_1$  と  $\sigma_0/\sigma_{yd}$

塑性区間長  $b_0 = 0 \sim 0.3 \text{ m}$  に対する平均応力度  $\sigma_{y0} = \sigma_0$  と  $\sigma_{yd}$  との比率を条件式 (25) を用いつつ  $x$  軸上の  $\sigma_y$  を描いたのが図-13である。  $\sigma_0/\sigma_{yd} = 0 \sim 0.6$  に対して遷移区間  $b_0 + b_1$  の変化を描いたのが図-14である。有限な立ち上がり部分  $b_1$  の影響が推定されよう。

### 7. 無限大の勾配で有限な応力集中を与える解

金属材料の亀裂先端では Dugdale 方式の応力度の直立状態も必要なことであり、残留応力の追跡においては  $F_I$  における応力の急降下 ( $a + \epsilon$  の部分の負の勾配が  $-\infty$ ) の状態も実現させることが望ましいことであろう。図-15に示した曲線③は有限値より有限勾配で減少する応力分布であるが、これは有限曲率の楕円孔の周辺で生じるものであるから導くまでもない。図-15の曲線⑤は有限値より無限勾配で減少するものであってここで

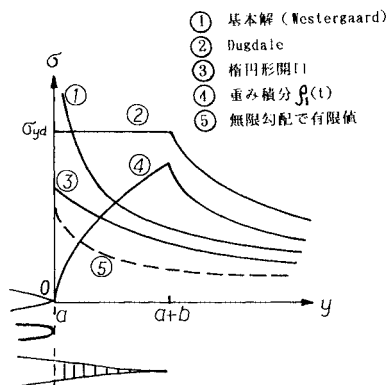


図-15 有限値より無限勾配で減少する解

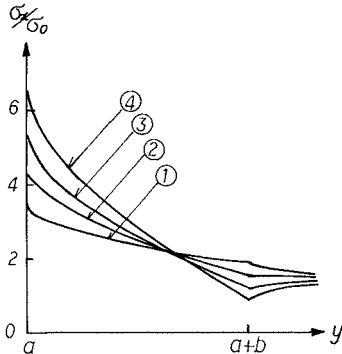


図-16 Dugdale と \$Q\_1\$ との差による \$\sigma\$

導くものである。これは簡単な問題であって②の Dugdale のものより④で表わされる \$\rho\_1(t)\$ による \$Q\_1(z, a, b)\$ の応力分布を差し引けば得られる。

図-16 は \$a=1\text{ m}\$, \$b=0.3\text{ m}\$, 平均引張り応力 \$\sigma\_0=100\text{ kN/m}^2\$ として, Dugdale 方式の応力と \$Q\_1\$ との比率を変化させつつ \$\sigma\_{\text{max}}=340\sim 680\text{ kN/m}^2\$ とする場合の亀裂線上の応力集中の形状を示したものである。Dugdale と \$Q\_1\$ とによる応力度の比率によっては図-16 の③と④のように遷移区間の先端 \$a+b\$ において \$\sigma\$ が低下して不自然になるものも現われるが図-16 の①は \$y=a+b\$ で上に突になるもの, ②は上下に突出した形にならないものの例である。このような応力分布については実用性に関する問題が不問にされているわけであるが, \$x=a\$ 点で応力度の減少率を \$-\infty\$ にし得るということは有望なことであろう。

### 8. せん断亀裂 (モードII)

無限遠方で純せん断応力 \$\tau\_0\$ を受ける無限板の場合 (図-17 参照) は一様引張りを受ける場合とほとんど同様な演算によって解き得る。応力集中の形状とせん断方向変位のくい違いも相似形になり図示するには及ばないので主な応力関数のみを簡単に示そう<sup>81,91</sup>。

#### (1) Westergaard の基本解 (せん断)

図-17 のような無限板にせん断力 \$\tau\_0\$ が作用する場合

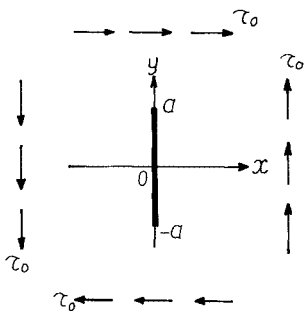


図-17 純せん断を受ける (モードII) の場合

の亀裂による応力分布は次のような応力関数 \$F\_2(z, a)\$ によって与えられる。

$$F_2(z, a) = \bar{z}F_{21}(z, a) + F_{22}(z, a) \dots\dots\dots(26)$$

$$F_{21}(z, a) = \frac{i}{2} \tau_0 \sqrt{z^2 + a^2} \dots\dots\dots(27)$$

$$F_{22}(z, a) = \frac{i}{2} \tau_0 z \sqrt{z^2 + a^2} \dots\dots\dots(28)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\tau_0 R_e \left[ i \frac{xa^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right] \\ \sigma_y &= \tau_0 R_e \left[ \frac{2iz}{\sqrt{z^2 + a^2}} + \frac{ixa^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right] \\ \tau_{xy} &= \tau_0 R_e \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} + \frac{xa^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

#### (2) \$\rho\_1(t)\$ による応力関数 \$\Phi\_1\$

$$\Phi_1(z, a, b) = \bar{z}\Phi_{11}(z, a, b) + \Phi_{12}(z, a, b) \dots\dots\dots(30)$$

$$\Phi_{11}(z, a, b) = i\tau_0 \{\varphi_{11}(z, a+b) - \varphi_{11}(z, a)\}$$

$$\Phi_{12}(z, a, b) = i\tau_0 \{\varphi_{12}(z, a+b) - \varphi_{12}(z, a)\}$$

$$\sigma_x = \tau_0 R_e [i\varphi_{13}(z, a+b) - i\varphi_{13}(z, a)]$$

$$\sigma_y = \tau_0 R_e [i\varphi_{14}(z, a+b) - i\varphi_{14}(z, a)]$$

$$\tau_{xy} = \tau_0 R_e [\varphi_{15}(z, a+b) - \varphi_{15}(z, a)]$$

$$\varphi_{11}(z, t) = \frac{1}{4b} [t\sqrt{z^2 + t^2} + z^2 \ln(t + \sqrt{z^2 + t^2})]$$

$$\varphi_{12}(z, t) = \frac{z}{4b} [t\sqrt{z^2 + t^2} + z^2 \ln(t + \sqrt{z^2 + t^2})]$$

$$\varphi_{13}(z, t) = \frac{x}{b} \left[ \frac{t}{\sqrt{z^2 + t^2}} - \ln(t + \sqrt{z^2 + t^2}) \right]$$

$$\varphi_{14}(z, t) = \frac{2z}{b} \ln(t + \sqrt{z^2 + t^2}) - \varphi_{13}(z, t)$$

$$\varphi_{15}(z, t) = \varphi_{14}(z, t) - \frac{z}{b} \ln(t + \sqrt{z^2 + t^2})$$

#### (3) \$\rho\_2(t)\$ による応力関数 \$\Phi\_2\$

$$\Phi_2(z, a, b) = \bar{z}\Phi_{21}(z, a, b) + \Phi_{22}(z, a, b) \dots\dots\dots(31)$$

$$\Phi_{21}(z, a, b) = i\tau_0 \{\varphi_{21}(z, a+b) - \varphi_{21}(z, a)\}$$

$$\Phi_{22}(z, a, b) = i\tau_0 \{\varphi_{22}(z, a+b) - \varphi_{22}(z, a)\}$$

$$\sigma_x = \tau_0 R_e [i\varphi_{23}(z, a+b) - i\varphi_{23}(z, a)]$$

$$\sigma_y = \tau_0 R_e [i\varphi_{24}(z, a+b) - i\varphi_{24}(z, a)]$$

$$\tau_{xy} = \tau_0 R_e [\varphi_{25}(z, a+b) - \varphi_{25}(z, a)]$$

$$\varphi_{21}(z, t) = \frac{C_6}{4} [t\sqrt{z^2 + t^2} + z^2 \ln(t + \sqrt{z^2 + t^2})]$$

$$+ \frac{C_7}{6} (z^2 + t^2)^{3/2}$$

$$\varphi_{22}(z, t) = \frac{C_6}{4} z [t\sqrt{z^2 + t^2} + z^2 \ln(t + \sqrt{z^2 + t^2})]$$

$$+ \frac{C_7}{6} z (z^2 + t^2)^{3/2}$$

$$\varphi_{23}(z, t) = -x \left\{ C_6 \ln(t + \sqrt{z^2 + t^2}) + 2C_7 \sqrt{z^2 + t^2} \right.$$

$$\left. - \frac{C_6 t + C_7 t^2}{\sqrt{z^2 + t^2}} \right\}$$

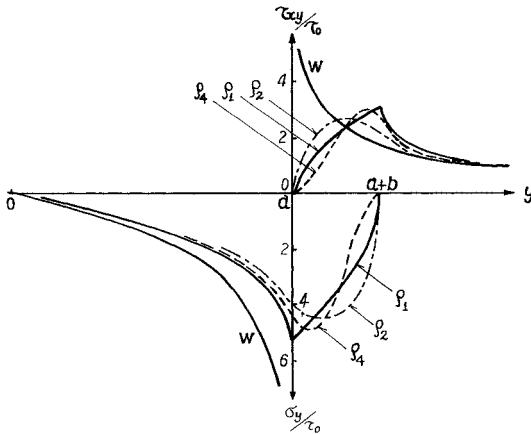


図-18  $\rho_i(t)$ によるモードIIの  $y$  軸上の  $\sigma_y$  と  $\tau_{xy}$

$$\varphi_{24}(z, t) = c_6(x+2z) \ln(t + \sqrt{z^2 + t^2}) + 2c_7(x+z) \sqrt{z^2 + t^2} - x \frac{(c_6 + c_7 t) t}{\sqrt{z^2 + t^2}}$$

$$\varphi_{25}(z, t) = \varphi_{24}(z, t) - c_6 z \ln(t + \sqrt{z^2 + t^2}) - c_7 z \sqrt{z^2 + t^2}$$

#### (4) 計算例6 せん断応力の場合

$a=1.0$  m,  $b=0.3$  m,  $\tau_0=100$  kN/m<sup>2</sup>として純せん断を受ける場合(亀裂は図-17のように  $y$  軸上の場合)の  $y$  軸に沿う  $\tau_{xy}$  を図-18に示す。各重み  $\rho_i(t)$  に対するものを併記して、 $y$  軸に沿う  $\tau_{xy}$  の形状も図示している。

$F_2(z, a)$ による場合は  $y=\pm a$  で応力度  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_y$  はともに発散するので見落とされがちであるが  $\tau_{\max}$  より  $\sigma_{y\max}$  の方が大きくなっている。なお区間  $(a, a+b)$  ではせん断変位のくい違いのために  $\sigma_y \neq 0$  である。

## 9. むすび

本研究の主題は、緩やかな勾配で有限な応力集中そして応力と開口変位が共存するという亀裂先端の弾性解を導くことである。対象は一本の直線状の亀裂を含む無限板であって複数の亀裂の干渉効果を考慮したものではないが、いろいろの形状の応力集中の解を導き得た。それぞれ簡単な計算結果を掲げているので特性は納得されよう。

簡単にまとめてみよう。

(1) 作用する平均応力度が小さくて亀裂先端では  $\sigma_{yd}$  以下の応力度しか生じない場合には、作用する外力に比例するいろいろな形の応力分布形を目的に応じて使い分けることが可能である。これは  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲線の破断点近傍の特性に依存している。すなわち、鋼材の亀裂先端部分の残留ひずみの解析や、ファイバーコンクリートの

亀裂部分の解析に適用し得る<sup>5)</sup>。

(2) 岩石中の亀裂や地層中の破砕帯等は圧縮力を受ける亀裂部分であり、金属材料の亀裂の引張り問題とは反対である。しかしこのような場合は亀裂面の応力度は0でなく耐力(あるいは破断面の圧縮、せん断抵抗力)分だけ  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$  を作用させて解けばよい。

(3) 本研究の解法は全領域を弾性としているが、計算例3で示したようにDugdale方式の近似を試みるとVon Misesの応力  $\sigma_m$  一定領域が実現されて、塑性域が塑性解析を行った場合と同じものとなる。弾性解の開口変位が塑性の大変形を実現させる役目を果たしているのである。

(4) ここに導いた応力関数を適用するについて問題となるのは遷移区間  $b$  の長さを決定することであり、今後さらに研究しなければならない点である。

(5) 本文では亀裂問題の大きな柱であるエネルギー解放率  $J$  については言及していない。変位と応力度を関数によって表わしているので  $J$  を導くことは可能であるが遷移区間を設けたために次のような問題が派生するのである。亀裂が単位量進展してエネルギーが解放される場合に応力度0部分の長さ  $a$  が増加するか遷移区間長  $b$  が増加するか、両方が変化するかで  $J$  が変わる。本研究は物性論的に亀裂の特性を論じたものではないのでこの点についてはこれ以上立ち入らないことにする。

本研究の計算例等において、日水コン株式会社の石坂豊氏、前田建設株式会社の冬木武治氏にお世話になった。厚く感謝の意を表したい。

## 参考文献

- 1) Griffith, A. A. : The Phenomena of Repture and Flow in Solids, Philosophical Transactions of the Royal Society, London, Series A, Vol.221, pp.163~168, 1920.
- 2) Westergaard, H. M. : Bearing Pressures and Cracks, J. of Applied Mechanics Translations of the ASME, A-49-A-53, 1939.
- 3) Irwin, G. R. : Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, J. of Applied Mechanics Translations of the ASME, pp.361~364, 1957.
- 4) Dugdale, D. S. : Yielding of Steel Sheet Containing Slits, J. of the Mechanics Physics of Solids, Vol.8, pp.100~108, 1960.
- 5) Wecharatana, M. and Shah, S. P. : A Model for Predicting Fracture Resistance of Fiber Reinforced Concrete, Cement and Concrete Research, Vol.13, pp.819~829, 1983.
- 6) Cho, K. Z., Kobayashi, A. S., Hawkins, N. M., Backer, D. B. and Jeang, F. L. : Fracture Process Zone of Concrete Cracks, J. of Engineering Mechanics of



- ASCE, Vol.110, No.8, pp.1174~1184, Aug., 1984.
- 7) Wium, D.J., Buyukozturk, O. and Li, V.C. : Hybrid Model for Discrete Cracks in Concrete, J. of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.110, No.8, pp.1211~1229, Aug., 1984.
  - 8) 村上裕則・大南正英：破壊力学入門，オーム社，1979.
  - 9) 白鳥正樹・三好俊郎・中山英明：数値破壊力学，実教出版社，1980.
  - 10) Erdogan, F. : Stress Intesity Factors, J. of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol.52, 4 b, pp.992~1002, 1983.
  - 11) Abeyaratne, R. : On the Estimations of Energy Release Rates, J. of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol.50, pp.19~23, 1983.
  - 12) 堀 晃芳・段 樹金・中川建治：き裂を持つ板の曲げ問題の解に適した特異関数，土木学会論文報告集，第374号，I-6，1986.
  - 13) Visalvanich, K. and Naaman, A.E. : Fracture Model for Reinforced Concrete, ACI Journal, Title No.80-14, pp.128~138, 1983.
  - 14) Barenblatt, G.I. : The Formation of Equilibrium Cracks During Brittle Fracture, General Ideas and Hypotheses, Axially Symetric Cracks, PMM, Vol.23, No.3, pp.622~636, 1959.
- (1985.12.9・受付)
-