

多径間曲線平板構造の一解法

A METHOD OF ANALYSIS OF MULTI-SPAN CURVED PLATE STRUCTURES

岡村 宏一*・石川 一美**

By Hirokazu OKAMURA and Kazumi ISHIKAWA

This paper is mainly concerned with the proposal of a high precision sector plate element having two opposite circumferential free edges and other two radial edges which are able to afford arbitrary displacements and forces. In the analysis of one way multi-span curved plate structures having arbitrary supporting conditions, if such a large-size plate element is adopted, the number of freedom needed for numerical analysis can be drastically reduced as compared with FEM. Stiffness matrix of the element has been introduced by way of combining analytical method and numerical method (point-matching method). In addition, this paper tries to make use of a stiffness matrix method combined with relaxation technique in order to connect these elements. By using this method, a small computer can be effectively used without limiting the number of spans of continuous structures.

Keywords : continuous curved plate, elastic analysis, relaxation method

1. ま え が き

任意の支持条件をもつような多径間の平板構造の解析における離散化の手段として、大形の平板要素を採択すれば、有限要素法などに比べて、解析上必要な自由度の数を大幅に減少させることができる。また、剛性法によるこのような要素の多径間にわたる接続に際して、さらにリラクゼーション法に属する一種の分配法を併用すれば、この種の長大な連続構造の解析に、小型計算機を活用することもできる。著者はすでに、このような観点に立って、多径間直線平板構造を解析し得る方法を提案したが¹⁾、本研究はその延長として、任意の支持条件をもつ多径間曲線平板構造の曲げ問題を解析する方法を提案するものである。

まず、多径間曲線平板構造の解析に採択できる大形の平板要素として扇形板を考えることができる。従来、扇形板の板内を離散化しない解法としては、級数解法、あるいは多項式を利用した解法などによる多くの研究が行われているが^{2)~9)}、具体的な計算例において直な2辺に与えられた条件は、単純支持、固定、自由、ならびにそ

の組合せに限られている。

本解析では、大形の曲線平板要素として、相対する円弧の2辺が自由で、隅角点を含めた直な2辺に、任意の材端変位と材端力を与え得る扇形平板要素を採択する。また、その剛性マトリックスの作成にあたっては、板の内点の平衡方程式、および円弧の2辺の境界条件を満足する級数解を基本解として与え、直な2辺の材端条件のみを級数解法と選点法を併用して与える。

次に、このような平板要素を多径間にわたり剛性法によって接続する全体系の解析に、選点法とリラクゼーション法に属する一種の分配法を導入する。これは、任意の支持条件をもつ多径間曲線平板構造の全体、ならびに局所の挙動を、構造の規模(長さや径間数)を制限することなく、小型計算機によっても同時に解析することを可能にするためである。また、この種の解法においては初期の概算値の導入が要点となるが、本解析では概算値として、幅方向に平均化されたはり理論による解を用いる。すなわち概算値は分配計算によって平板としての挙動を評価できるように修正される。

論文の後半では、解析の精度を確認するための具体的な例題を示し、著者がすでに文献1)に示した多径間平板構造の解析手法が、直線構造のみならず、曲線構造に拡張した場合にも有用であることを検証している。

* 正会員 工博 大阪工業大学教授 土木工学科
(〒535 大阪市旭区大宮5-16-1)

** 正会員 東洋技研コンサルタント(株)研究室

2. 扇形平板要素の剛性方程式

(1) 基礎方程式と基本解

弾性変形は等方性薄板理論に従うものとし、境界条件に Kirchhoff の仮定を導入すれば、極座標 (r, θ) における扇形板要素の曲げに関する基礎方程式、ならびに必要な変位と断面力の諸式は次のとおりである。

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = q(r, \theta) \dots\dots\dots (1)$$

$$\phi_r = \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \phi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\} \\ M_\theta &= -D \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\} \\ M_{r\theta} &= M_{\theta r} = -(1-\nu) D \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} \\ Q_\theta &= \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2M_{r\theta}}{r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} V_r &= Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} (3-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\} \\ V_\theta &= Q_\theta + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} = -D \left\{ \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{2}{r^3} (1-\nu) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{1}{r^2} (1-2\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right\} \\ R &= 2M_{r\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 w ：たわみ、 ϕ_r, ϕ_θ ：たわみ角の成分、 $M_r, M_\theta, M_{r\theta}$ ：モーメントの成分、 Q_r, Q_θ ：せん断力の成分、 V_r, V_θ ：換算せん断力の成分、 R ：隅角点定着力、 $q(r, \theta)$ ：板内荷重、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 、 E, ν ：ヤング率、ポアソン比、 h ：板厚

ここで、相対2辺自由の大形の扇形平板要素を対象とし、図-1(a)に示すような、開角 θ_0 で相対する円弧の2辺 ($r=a, b$) が自由、直な2辺 ($\theta=0, \theta_0$) が単純支持された板が、板内に集中荷重 P 、および集中モーメント M を受ける場合の式(1)の解を級数解法により、計算精度のうえで有利な単級数の形で導入する。このうち、集中荷重を受ける場合の解は、既往の単一板の研究^{3), 5), 8)}にみられるように、板を図-1(a)のように、荷重 P の位置 ($r=\bar{r}$) によって、パネル I, II に分割し、それらを接続することによって得られる。この場合、パネル I, II におけるたわみをそれぞれ、 w_{r1}, w_{r2} と

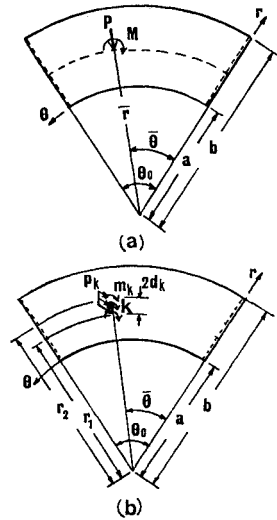


図-1 基本解を求めるための扇形平板要素

すればこれらは、式(1)の同次解によって次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} w_{r1} &= \sum_n (A_{n1} \eta^m + B_{n1} \eta^{-m} + C_{n1} \eta^{2+m} + D_{n1} \eta^{2-m}) \sin m\theta \\ w_{r2} &= \sum_n (A_{n2} \eta^m + B_{n2} \eta^{-m} + C_{n2} \eta^{2+m} + D_{n2} \eta^{2-m}) \sin m\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\eta = r/a$ 、 $m = n\pi/\theta_0$ 、 $n=1, 2, 3, \dots$ 、添字 I, II はそれぞれ、パネル I, II を表す。

式(6)中の未定定数 $A_{n1} \sim D_{n1}$ 、 $A_{n2} \sim D_{n2}$ は次の条件によって定まる。すなわち

自由辺 ($r=a, b$) の条件；

$$M_r = 0, \quad V_r = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ならびに、接続線 ($r=\bar{r}$) における連続条件

$$\left. \begin{aligned} w_i &= w_{ii}, \quad \phi_{r1} = \phi_{r2} \\ M_{r1} &= M_{r2}, \quad V_{r1} - V_{r2} = \sum_n P_m \sin m\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 P_m は荷重 P に関するフーリエの係数で

$$P_m = \frac{2P}{r\theta_0} \sin m\bar{\theta} \dots\dots\dots (9)$$

以上の過程により、 w_{r1}, w_{r2} は次の形に表わされる。

$$w_{r1} = P \bar{w}_{r1}, \quad w_{r2} = P \bar{w}_{r2} \dots\dots\dots (10)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_{r1} &= \frac{\bar{r}^2 \theta_0}{4(1-\nu)\pi^2 D} \sum_n \frac{n^2}{K_m} E_m \sin m\bar{\theta} \sin m\theta \\ \bar{w}_{r2} &= \frac{\bar{r}^2 \theta_0}{4(1-\nu)\pi^2 D} \sum_n \frac{n^2}{K_m} F_m \sin m\bar{\theta} \sin m\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

同様に、集中モーメント M を受ける場合のパネル I, II におけるたわみをそれぞれ、 w_{m1}, w_{m2} とすれば、これらは、式(9)の係数 P_m に偶力としての微分操作を

加え、

$$P_m = \frac{2 M_m}{\bar{r}^2 \theta_0} \cos m\bar{\theta} \dots \dots \dots (12)$$

と置き換えて求まり、次の形に表わされる。

$$w_{m1} = M \bar{w}_{m1}, \quad w_{m2} = M \bar{w}_{m2} \dots \dots \dots (13)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_{m1} &= \frac{\bar{r}}{4(1-\nu)\pi D} \sum_n \frac{n^3}{K_m} E_m \cos m\bar{\theta} \sin m\theta \\ \bar{w}_{m2} &= \frac{\bar{r}}{4(1-\nu)\pi D} \sum_n \frac{n^3}{K_m} F_m \cos m\theta \sin m\theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

次に、図-1(b) に示すような、 r 方向の分布幅 $2d_k$ をもつ部分線荷重 (強さ p_k)、および部分線モーメント (強さ m_k) を受ける場合の式 (1) の解は、前述の集中荷重および集中モーメントを受ける場合の解を、分布幅に関して積分することによって得られる。この場合、必要な積分値は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_{p1} &= \int \bar{w}_{p1} d\bar{r} \\ &= \frac{\bar{r}^3 \theta_0}{4(1-\nu)\pi^2 D} \sum_n \frac{n^2}{K_m} E'_m \sin m\bar{\theta} \sin m\theta \\ \bar{w}_{p2} &= \int \bar{w}_{p2} d\bar{r} \\ &= \frac{\bar{r}^3 \theta_0}{4(1-\nu)\pi^2 D} \sum_n \frac{n^2}{K_m} F'_m \sin m\bar{\theta} \sin m\theta \\ \bar{w}_{m1} &= \int \bar{w}_{m1} d\bar{r} \\ &= \frac{\bar{r}^2}{4(1-\nu)\pi D} \sum_n \frac{n^3}{K_m} E''_m \cos m\bar{\theta} \sin m\theta \\ \bar{w}_{m2} &= \int \bar{w}_{m2} d\bar{r} \\ &= \frac{\bar{r}^2}{4(1-\nu)\pi D} \sum_n \frac{n^2}{K_m} F''_m \cos m\bar{\theta} \sin m\theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

これより、図-1(b) の部分線荷重 p_k 、ならびに部分線モーメント m_k を受ける場合のたわみをそれぞれ、 w_p 、 w_m とすれば、これらは次の形に表わされる。

$$w_p = p_k \bar{w}_p, \quad w_m = m_k \bar{w}_m \dots \dots \dots (16)$$

ここで、 \bar{w}_p 、 \bar{w}_m は着目点の位置の r によって異なり、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a < r < r_1 \text{ の領域では} \\ \bar{w}_p &= (\bar{w}_{p1})_{\bar{r}=r_1} - (\bar{w}_{p1})_{\bar{r}=r_2}, \quad \bar{w}_m = (\bar{w}_{m1})_{\bar{r}=r_1} - (\bar{w}_{m1})_{\bar{r}=r_2} \\ r_1 < r < r_2 \text{ の領域では} \\ \bar{w}_p &= (\bar{w}_{p1})_{\bar{r}=r} - (\bar{w}_{p2})_{\bar{r}=r_1} + (\bar{w}_{p2})_{\bar{r}=r_1} - (\bar{w}_{p2})_{\bar{r}=r} \\ \bar{w}_m &= (\bar{w}_{m1})_{\bar{r}=r} - (\bar{w}_{m1})_{\bar{r}=r_2} + (\bar{w}_{m2})_{\bar{r}=r_1} - (\bar{w}_{m2})_{\bar{r}=r} \\ r_2 < r < b \text{ の領域では} \\ \bar{w}_p &= (\bar{w}_{p2})_{\bar{r}=r_1} - (\bar{w}_{p2})_{\bar{r}=r_2}, \quad \bar{w}_m = (\bar{w}_{m2})_{\bar{r}=r_1} - (\bar{w}_{m2})_{\bar{r}=r_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

ここに、 $r_1 = r_k - d_k$ 、 $r_2 = r_k + d_k$ である。

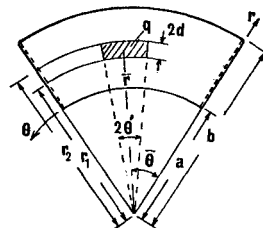


図-2 基本解を求めるための扇形平板要素

一方、図-2 に示すような、部分等分布荷重 q を受ける場合の式 (1) の解 w_q は、図の円弧 ($r = \bar{r}$) に沿って、 $2\theta\bar{r}$ の区間に分布する線荷重 q を受ける場合の解を、式 (9) において

$$P_m = \frac{4 q}{n\pi} \sin m\bar{\theta} \sin m\theta' \dots \dots \dots (18)$$

と置いて求め、それを r 方向の分布幅 $2d$ に関して積分することによって得られる。この場合、必要な積分値は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_{q1} &= \frac{\bar{r}^4 \theta_0^2}{2(1-\nu)\pi^3 D} \sum_n \frac{n}{K_m} \bar{E}_m \sin m\bar{\theta} \sin m\theta \\ \bar{w}_{q2} &= \frac{\bar{r}^4 \theta_0^2}{2(1-\nu)\pi^3 D} \sum_n \frac{n}{K_m} \bar{F}_m \sin m\bar{\theta} \sin m\theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

w_q は次の形に表わされる。

$$w_q = q \bar{w}_q \dots \dots \dots (20)$$

ここで、 \bar{w}_q は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a < r < r_1 \text{ の領域では} \\ \bar{w}_q &= (\bar{w}_{q1})_{\bar{r}=r_1} - (\bar{w}_{q1})_{\bar{r}=r_2} \\ r_1 < r < r_2 \text{ の領域では} \\ \bar{w}_q &= (\bar{w}_{q1})_{\bar{r}=r} - (\bar{w}_{q1})_{\bar{r}=r_2} + (\bar{w}_{q2})_{\bar{r}=r_1} - (\bar{w}_{q2})_{\bar{r}=r} \\ r_2 < r < b \text{ の領域では} \\ \bar{w}_q &= (\bar{w}_{q2})_{\bar{r}=r_1} - (\bar{w}_{q2})_{\bar{r}=r_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

ここに、 $r_1 = \bar{r} - d$ 、 $r_2 = \bar{r} + d$ である。

また、以上の諸式 (11)、(14)、(15)、(19) 中の、 K_m 、 E_m 、 F_m 、 E'_m 、 F'_m 、 E''_m 、 F''_m 、 \bar{E}_m 、 \bar{F}_m は次のように与えられる。

$$K_m = n^4 K_{m1} + n^2 K_{m2} - K_{m3} \dots \dots \dots (22)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} K_{m1} &= \nu_1^2 \rho^2 \lambda^{-2m} \\ K_{m2} &= \frac{\theta_0^2}{\pi^2} [8\nu_1 \lambda^4 - \nu_2^2 (\lambda^4 - 2\lambda^2 - 1) + 8\nu_2] \lambda^{-2m} \\ &\quad - \nu_3^2 \lambda^2 (1 + \lambda^{-2m}) \\ K_{m3} &= \frac{\theta_0^2}{\pi^4} [8\nu_1 \lambda^4 + 2\nu_2^2 \lambda^2 + 8\nu_2] \lambda^{-2m} - \nu_3^2 \lambda^2 (1 + \lambda^{-4m}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned}
 E_m &= \{(1-m^{-1})E_{m1}\eta^2 \\
 &\quad - (1+m^{-1})(\nu_1 E_{m2} + m^{-2} E_{m3})\mu^m \\
 &\quad + (1+m^{-1})E_{m4}\eta^2 \\
 &\quad - (1-m^{-1})(\nu_1 E_{m5} + m^{-2} E_{m6})\beta^{-m}\eta^{-m}\} \\
 F_m &= \{(1-m^{-1})F_{m1}\eta^2 \\
 &\quad - (1+m^{-1})(\nu_1 F_{m2} + m^{-2} F_{m3})\gamma^m\alpha^m \\
 &\quad + (1+m^{-1})F_{m4}\eta^2 \\
 &\quad - (1-m^{-1})(\nu_1 F_{m5} + m^{-2} F_{m6})\mu^{-m}\}
 \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

式 (24) 中の $E_{m1} \sim E_{m6}$, $F_{m1} \sim F_{m6}$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 E_{m1} &= \gamma^{-2} \{ \nu_1^2 (\rho - m^{-2}) \lambda^{-2m} - m^{-2} (8\nu_2 \lambda^{2(1-m)} - \nu_3^2) c_1 \\
 &\quad - \nu_1^2 \rho (1+m^{-1}) \lambda^{-2m} c_2 + \nu_4 m^{-1} \gamma^{-2} (1+m^{-1}) \\
 &\quad \cdot (1-\lambda^{-2m}) c_3 - (1-\lambda^{2(1-m)}) c_4 \} \gamma^{2m} \\
 E_{m2} &= \nu_1 \rho \gamma^{-2} (1-m^{-1}) c_1 - c_2 \lambda^{-2m} \\
 &\quad + \nu_3^2 m^{-1} \gamma^{-2} (1-\lambda^{2(1-m)}) c_3 - (1-\lambda^{-2m}) c_4 \gamma^{2m} \\
 E_{m3} &= 8\nu_2 \rho \gamma^{-2} (1-m^{-1}) \lambda^{-2m} c_1 + \nu_1^2 \lambda^2 \\
 &\quad + (8\nu_3 + \nu_1^2 \lambda^2) \lambda^{-2m} c_2 + \nu_3 (8\nu_5 \gamma^{-2} m^{-1} (\lambda^2 - \lambda^{-2m}) c_3 \\
 &\quad + \nu_4 \lambda^2 (1-\lambda^{-2m}) c_4) \gamma^{2m} \\
 E_{m4} &= \nu_4 m^{-1} \gamma^{-2} (1-m^{-1}) (1-\lambda^{-2m}) c_1 - (\lambda^2 - \lambda^{-2m}) c_2 \\
 &\quad + [\nu_1^2 \gamma^{-2} (\rho - m^{-2}) - m^{-2} \lambda^2 (\nu_2 \gamma^{-2} - \nu_3^2 \lambda^{-2m})] c_3 \\
 &\quad - \nu_1^2 \rho (1-m^{-1}) c_4 \} \gamma^{2m} \\
 E_{m5} &= \nu_3 m^{-1} \{ (1-\lambda^{2(1-m)}) c_1 - \lambda^2 (1-\lambda^{-2m}) c_2 \} \\
 &\quad + \nu_1 \rho \gamma^{-2} (1+m^{-1}) c_3 - c_4 \gamma^{2m} \\
 E_{m6} &= \nu_3 (8\nu_5 \gamma^{-2} m^{-1} (1-\lambda^{2(1-m)}) c_1 - \nu_4 \lambda^2 (1-\lambda^{-2m}) c_2 \} \\
 &\quad + [8\nu_2 \rho \gamma^{-2} (1+m^{-1}) c_3 - \lambda^2 (\nu_1^2 - \nu_3^2 \lambda^{2m}) \\
 &\quad + 8\nu_3 c_4] \gamma^{2m} \\
 F_{m1} &= [\nu_1^2 (\rho \beta^{-2} + m^{-2} \gamma^{-2}) + m^{-2} (8\nu_2 \beta^{-2} - \nu_3^2 \gamma^{-2} \lambda^{-2m})] c_1 \\
 &\quad - \nu_1^2 \rho (1+m^{-1}) c_2 \beta^{-2m} + \nu_4 \nu_3 m^{-1} \gamma^{-2} (1+m^{-2}) \\
 &\quad \cdot (1-\lambda^{-2m}) c_3 - (1-\lambda^{2(1-m)}) c_4 \\
 F_{m2} &= \nu_1 \rho \gamma^{-2} (1-m^{-1}) c_1 - \lambda^2 c_2 \beta^{-2m} \\
 &\quad + \nu_3^2 m^{-1} (\gamma^{-2} - \beta^{-2} \lambda^{-2m}) c_3 - (1-\lambda^{-2m}) c_4 \\
 F_{m3} &= [8\nu_2 \gamma^{-2} (1-m^{-1}) c_1 + \lambda^2 (\nu_1^2 + \nu_2 \lambda^2 - \nu_3^2 \lambda^{-2m}) c_2 \beta^{-2m} \\
 &\quad + \nu_3 (8\nu_5 \gamma^{-2} m^{-1} (\lambda^2 - \lambda^{-2m}) c_3 + \nu_4 \lambda^2 (1-\lambda^{-2m}) c_4) \\
 F_{m4} &= \nu_4 m^{-1} \{ \gamma^{-2} (1+m^{-1}) (1-\lambda^{-2m}) c_1 \\
 &\quad - (1-\lambda^{2(1-m)}) c_2 \beta^{-2m} + [\nu_1^2 (\rho \beta^{-2} + m^{-2} \gamma^{-2}) \lambda^{-2m} \\
 &\quad + m^{-2} (8\nu_2 \beta^{-2} \lambda^{-2m} - \nu_3^2 \gamma^{-2})] c_3 \\
 &\quad - \nu_1^2 \rho (1-m^{-1}) \lambda^{-2m} c_4 \} \\
 F_{m5} &= \nu_3 m^{-1} \lambda^2 \{ \beta^{-2} - \gamma^{-2} \lambda^{-2m} \} c_1 - (1-\lambda^{-2m}) c_2 \beta^{-2m} \\
 &\quad + \nu_1 \rho \gamma^{-2} (1+m^{-1}) c_3 - \lambda^2 c_4 \lambda^{-2m} \\
 F_{m6} &= \nu_3 (8\nu_5 \gamma^{-2} m^{-1} (1-\lambda^{2(1-m)}) c_1 \\
 &\quad - \nu_4 \lambda^2 (1+\lambda^{-2m}) c_2 \beta^{-2m} + 8\nu_2 \rho \gamma^{-2} (1+m^{-1}) \lambda^{-2m} c_3 \\
 &\quad - \lambda^2 [\nu_3^2 - (\nu_1^2 + 8\nu_2 \lambda^2) \lambda^{-2m}] c_4
 \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

ここで、 $\lambda = b/a$, $\eta = \gamma/a$, $\alpha = \gamma/b$, $\beta = \bar{r}/a$, $\gamma = \bar{r}/b$, $\mu = r/\bar{r}$, $\rho = 1 - \lambda^2$, $\nu_1 = 1 - \nu$, $\nu_2 = 1 + \nu$, $\nu_3 = 3 + \nu$, $\nu_4 = \nu_1 \nu_3$, $\nu_5 = \nu_2 / \nu_1$, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$, また、 $E_m, F_m, E'_m, F'_m, \bar{E}_m, \bar{F}_m$ は、式 (24) の E_m, F_m と同じ形に与えられるが、式 (25) の c_1, c_2, c_3, c_4 をそれぞれ、

表—1

	C_1	C_2	C_3	C_4
E_m, F_m	$(1-m)^{-1}$	$(3-m)^{-1}$	$(1+m)^{-1}$	$(3+m)^{-1}$
\bar{E}_m, \bar{F}_m	$-m^{-1}$	$(2-m)^{-1}$	m^{-1}	$(2+m)^{-1}$
\bar{E}_m, \bar{F}_m	$(2-m)^{-1}$	$(4-m)^{-1}$	$(2+m)^{-1}$	$(4+m)^{-1}$

表—1 のように書き換えて得られる。

以上のように、式 (16), (20) によって与えられる w_p, w_m, w_q を式 (2), (3), (5) に代入すれば、それぞれ荷重 p_k, m_k, q を受ける場合の変位、断面力に関する必要な諸式が得られる。これらの解は、あとで述べる板要素の剛性方程式を誘導する過程で、材端力と材端変位を結ぶ剛性マトリックス、ならびに荷重項のベクトルを求める基本的なものであるが、解析の全般にわたる精度を考慮して単級数によって計算され、十分な収束値が保証される。

(2) 剛性方程式の誘導の過程

図—1 に示した開角 θ_0 で、相対する円弧の 2 辺 ($r = a, b$) が自由の扇形板は、直な 2 辺 ($\theta = 0, \theta_0$) が単純支持されたものであった。ここでは、この直な 2 辺 (以下、節線 i, j とよぶ) に、隅角点を含め、任意の材端力と材端変位を与えることのできる扇形板要素の解を、前述の基本解を用いて導入する。この方法はすでに、著者が文献 1) において、長方形板要素に対して用いたが、ここではそれを、扇形板要素に適用する。すなわち、板内点の平衡方程式、ならびに円弧の自由辺の境界条件を基本解によって厳密に満足させ、直な 2 辺の材端条件のみを選点法によって近似化するものである。

まず、図—3(a) に示すように、図—1(b) に示した板の開角 θ_0 を 2 倍にした板を考え、節線 j に相当する中央線 ($\theta = \theta_0$) 上に分布する任意の線荷重と線モーメントを、先に発表した解法¹⁾と同様に、節線上の細かく分割された区間で等分布する線荷重と線モーメントの重ね合わせによって与える。すなわち図—3(a) に示すように、節線上の選点 (θ_0, r_k) を挟んでとった小区間 ($2d_k$) に、強さ $2p_{kj}, 2m_{kj}$ の線荷重と線モーメントを作用させる。図—3 に示す扇形板の解 w は、前述の基本解 (16) よりただちに求まり、次のように表わされる。

$$w = 2 \sum_k p_{kj} \bar{w}_p + 2 \sum_k m_{kj} \bar{w}_m \dots \dots \dots (26)$$

ここで、係数 \bar{w}_p, \bar{w}_m は、式 (16) で与えられる w_p, w_m において、 θ_0 を $2\theta_0$ に、 $\bar{\theta}$ を θ_0 に書き換えたもので、式 (16) を式 (2), (3), (5) に代入した諸式についても同様の書き換えを行えば、変位、断面力に関する必要な諸式が得られる。また、 k に関する総和は、前述の分割区間における分布力の重ね合わせを表わす。

そこで、図—3(a) の左半分に着目したとき、節線 j 上の荷重 $2p_{kj}, 2m_{kj}$ による節線 i 上の選点 ($2\theta_0, r_k$) の換算せん断力 ($V_{\theta ki}$), 曲げモーメント ($M_{\theta ki}$), たわみ

w_{ki} , たわみ角 $(\phi_\theta)_{ki}$, ならびに節線 j 上の選点 (θ_0, r_k) の諸値 $(V_\theta)_{kj}$, $(M_\theta)_{kj}$, w_{kj} , $(\phi_\theta)_{kj}$ がそれぞれ求まる. ただし, $k=1, 2, 3, \dots, N$, N は節線上にとった選点の個数である (以上を case 1 とする).

次に, 図-3(b) に示すように板の右半分に着目し, 中央線を節線 i , 端辺 (0) を節線 j とし, case 1 と同様に, 節線 i 上の荷重 $2p_{ki}$, $2m_{ki}$ を作用させれば, これらの荷重による節線 i, j 上の選点 (θ_0, r_k) , $(0, r_k)$ の断面力と変位が case 1 と同様の操作で求まる (以上を case 2 とする).

さらに, case 1 と case 2 の結果を重ね合わせることで, 図-3(c) に示すような, 円弧の2辺が自由で, 相対する節線 i, j の選点に, 任意の材端力と材端変位をもつ大形の扇形平板要素に対して, 剛性マトリックスを与える次の関係が得られる.

$$\begin{Bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & b_{ii2} & a_{ij1} & b_{ij1} \\ \bar{a}_{ii2} & I & 0 & 0 \\ a_{jii2} & b_{jii2} & I & b_{jji1} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{jji1} & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i \\ m_i \\ p_j \\ m_j \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} p_i \\ m_i \\ p_j \\ m_j \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ \phi_i \\ w_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{ii2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{ii2} & c_{ij1} & d_{ij1} \\ 0 & 0 & c_{jji1} & 0 \\ \bar{c}_{jii2} & d_{jii2} & 0 & d_{jji1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i \\ m_i \\ p_j \\ m_j \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} p_i \\ m_i \\ p_j \\ m_j \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここで, V_i, M_i, V_j, M_j : 節線 i, j の選点における材端

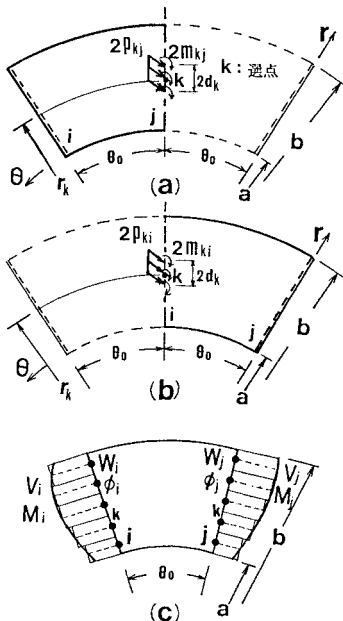


図-3 剛性方程式を求めるための扇形平板要素と力の分布の近似

力のベクトル, w_i, ϕ_i, w_j, ϕ_j : 同様に材端変位のベクトル, p_i, m_i, p_j, m_j : 図-3 に示した節線荷重のベクトル. $a, \bar{a}, b, c, \bar{c}, d$: 節線荷重の影響係数の部分マトリックス, I : 単位マトリックス, 添字 1, 2 は case 1, 2 に相当する.

また, マトリックス $[A], [B]$ は, これらを求める過程で用いた図-3(a), (b) の板の条件により, 単位マトリックス, 零マトリックスを含み, 演算の精度のうえで有利な形になっている.

式 (27), (28) より節線荷重のベクトルを消去すると

$$\begin{Bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = [A][B]^{-1} \begin{Bmatrix} w_i \\ \phi_i \\ w_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} w_i \\ \phi_i \\ w_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで, $[K]$ は, 図-3(c) に示されている大形扇形板要素の剛性マトリックス.

一方, 図-2 を参照すれば, 板内荷重による支持辺 i, j の変位と断面力は前述のように式 (20) から求まる. この変位を式 (29) の節線変位で相殺し, 断面力を重ね合わせると荷重項のベクトルが得られる. すなわち

$$\begin{Bmatrix} V_{iF} \\ M_{iF} \\ V_{jF} \\ M_{jF} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{iq} \\ M_{iq} \\ V_{jq} \\ M_{jq} \end{Bmatrix} - [K] \begin{Bmatrix} w_{iq} \\ \phi_{iq} \\ w_{jq} \\ \phi_{jq} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここで, $V_{iF}, M_{iF}, V_{jF}, M_{jF}$: 節線 i, j の選点における荷重項のベクトル, $V_{iq}, M_{iq}, V_{jq}, M_{jq}$: 図-2 の板の支持辺の選点における板内荷重 q による断面力のベクトル, ただし M_{iq}, M_{jq} は 0, $w_{iq}, \phi_{iq}, w_{jq}, \phi_{jq}$: 同様に変位のベクトル, ただし w_{iq}, w_{jq} は 0.

式 (29) と (30) を組み合わせて剛性方程式が

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{iF} \\ f_{jF} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (31)$$

の形に得られる. ここで, $f_i, f_j, \delta_i, \delta_j$: 節線 i, j の選点における材端力, 材端変位のベクトル, f_{iF}, f_{jF} : 同様に荷重項のベクトル.

なお, 以上の剛性方程式を誘導する過程で, 図-3(a), (b) の板が単純支持辺をもつため板要素の隅角点において式 (5) で示される拘束力 R が残っている. これらは図-3(a), (b) に示した節線荷重に対して, ほかの断面力と同様に求められ, 次の関係を得る.

$$\begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g_{ii2} & e_{ij1} & g_{ij1} \\ e_{jii2} & g_{jii2} & 0 & g_{jji1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i \\ m_i \\ p_j \\ m_j \end{Bmatrix} = [c] \begin{Bmatrix} p_i \\ m_i \\ p_j \\ m_j \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここで, R_i, R_j : 節線 i, j 上の隅点における拘束力の

ベクトル, e, g : 節線荷重の影響係数の部分マトリックス, 添字 1, 2 は case 1, 2 に相当する.

式 (28), (32) より

$$\begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} = [c][B]^{-1} \begin{Bmatrix} w_i \\ \phi_i \\ w_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} = [\bar{K}] \begin{Bmatrix} w_i \\ \phi_i \\ w_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(33)$$

また, 式 (30) と同様の操作によって荷重項のベクトル R_{iJ}, R_{jJ} が求まり

$$\begin{Bmatrix} R_{iJ} \\ R_{jJ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{iq} \\ R_{jq} \end{Bmatrix} - [\bar{K}] \begin{Bmatrix} \phi_{iq} \\ w_{jq} \\ \phi_{jq} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(34)$$

ここで, R_{iq}, R_{jq} : 図-2 の板の隅点における拘束力のベクトル.

式 (33) と (34) を組み合わせて簡単に表わすと

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{ii} & \bar{K}_{ij} \\ \bar{K}_{ji} & \bar{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{iJ} \\ \bar{f}_{jJ} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(35)$$

ここで, \bar{f}_i, \bar{f}_j : 節線 i, j の隅点における拘束力のベクトル, $\bar{f}_{iJ}, \bar{f}_{jJ}$: 同様に荷重項のベクトル.

3. リラクゼーション (材端力の分配) の方法

2.(2) で誘導した剛性方程式は大形平板要素に対するものであり, 有限要素法などに比べて, 解析上必要な自由度の数を大幅に減少させており, 剛性法を用いて, 任意の支持条件をもつ長大な多径間曲線平板構造の全体, ならびに局所の挙動を同時に解析することができる. ここでさらに, 著者が文献1) で提案したリラクゼーション法を導入すれば, 解析上必要な自由度の数は, 1つの節線上の選点における材端変位のみに通減され, パソコンのような小型計算機を活用し, 構造物の規模 (長さや径間数) を制限することなく, その全体, ならびに局所の挙動を同時に解析することができる. 以下, リラクゼーションの方法について説明する.

最初に概算値としての初期変位 (たとえば慣用計算に用いられる曲がりばりの解など) を導入すると, 各板要素の節線には, その状態での材端力の不平衡を生ずる.

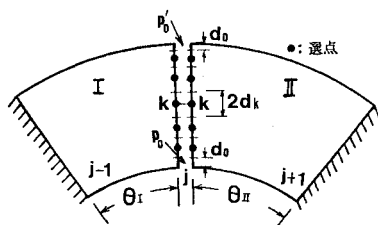


図-4 選点において力の分配を受けるパネル

そこで, 着目する節線の支持条件, つり合い条件, 変位の適合条件を考慮し, 相対する節線を固定した状態で材端力を分配し, 不平衡量を修正する. この操作を順次各節線に及ぼし, 適当な収束値を得るまで反覆する.

いま, 図-4 に示す開角の異なる 2つの扇形板要素 (パネル) I, II の節線 j に着目したとき, 節線上の選点 k における各パネルの材端力, ならびに隅角点の拘束力は, 反覆 t 回の時点でも式 (31), (35) の表示により次のように表わされる.

$$\left. \begin{aligned} \{f_{ji}^t\} &= \{f_{ji}^{t-1}\} + \{\Delta f_{ji}^t\} \\ \{f_{jn}^t\} &= \{f_{jn}^{t-1}\} + \{\Delta f_{jn}^t\} \\ \{\bar{f}_{ji}^t\} &= \{\bar{f}_{ji}^{t-1}\} + \{\Delta \bar{f}_{ji}^t\} \\ \{\bar{f}_{jn}^t\} &= \{\bar{f}_{jn}^{t-1}\} + \{\Delta \bar{f}_{jn}^t\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

ここに, $f_{ji}^{t-1}, f_{jn}^{t-1}, \bar{f}_{ji}^{t-1}, \bar{f}_{jn}^{t-1}$: 反覆 $t-1$ 回の時点でのパネル I, II の材端力, ならびに隅角点の拘束力のベクトル, $\Delta f_{ji}^t, \Delta f_{jn}^t, \Delta \bar{f}_{ji}^t, \Delta \bar{f}_{jn}^t$: 反覆 t 回の時点でのパネル I, II の材端力, ならびに隅角点の拘束力の修正量のベクトル.

次に, 反覆 t 回の時点でのパネル I, II の選点 k での材端変位の修正量のベクトルを $\Delta \delta_{ji}^t, \Delta \delta_{jn}^t$ とすれば, この時点で相対する節線を固定することにより, 式(31), (35) から

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta f_{ji}^t\} &= [K_{ji}] \{\Delta \delta_{ji}^t\}, \{\Delta f_{jn}^t\} = [K_{jn}] \{\Delta \delta_{jn}^t\} \\ \{\Delta \bar{f}_{ji}^t\} &= [\bar{K}_{ji}] \{\Delta \delta_{ji}^t\}, \{\Delta \bar{f}_{jn}^t\} = [\bar{K}_{jn}] \{\Delta \delta_{jn}^t\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(37)$$

節線 j における材端力のつり合いを考える場合, 隅角点の拘束力の不平衡を同時に解除するために, 図-4 にみるように, 隅角点の近傍に, できるだけ微小な区間 d_0 を設け, パネル I, II のこれらの区間における選点の接続に際して, 外力 P_0, P'_0 を作用させる. すなわち, 薄板理論における Kirchhoff の仮定によって生ずる隅角点の拘束力の不平衡は, 外力 P_0, P'_0 の付加によって解除される. しかも, このような隅角点近傍の力系による局所的な応力の攪乱は, St. Venant の原理により, 境界を少し離れた内部の選点には影響を及ぼさないと考えることができる.

選点における材端力のつり合いは

$$\{f_{ji}^t\} + \{f_{jn}^t\} + \{P_j^t\} + \{P'_j\} / d_0 = \{0\} \dots\dots\dots(38)$$

ここで, P_j^t : 反覆 t 回の時点での選点における外力 (支持条件による反力を含む) のベクトル, P'_j : 前述の微小区間 d_0 の選点のみに付加される外力 P_0, P'_0 のベクトルで, その他の選点では 0 である.

また, 隅角点の拘束力のつり合いは

$$\{\bar{f}_{ji}^t\} + \{\bar{f}_{jn}^t\} + \{P_j^t\} = \{0\} \dots\dots\dots(39)$$

式 (38), (39) に式 (36), (37), ならびに変位の適合条件

$$\{\Delta \delta_{ji}^t\} = \{\Delta \delta_{jn}^t\} = \{\Delta \delta_j^t\} \dots\dots\dots(40)$$

を代入すると, 修正変位量 $\Delta \delta_j^t$, ならびに外力 P_0, P'_0

は次式で求まる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \delta_j^t \\ P_j^t \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{jj} + K_{im} & 1/d_0 \\ \bar{K}_{jj} + \bar{K}_{im} & I \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} f_{jn}^{t-1} + f_{jn}^{t-1} + p_j^{t-1} \\ \bar{f}_{jn} + \bar{f}_{jn}^{t-1} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (41)$$

したがって、各パネルの選点における反覆 t 回の時点での材端力の修正量は、式 (31) を考慮して次式で求まる。

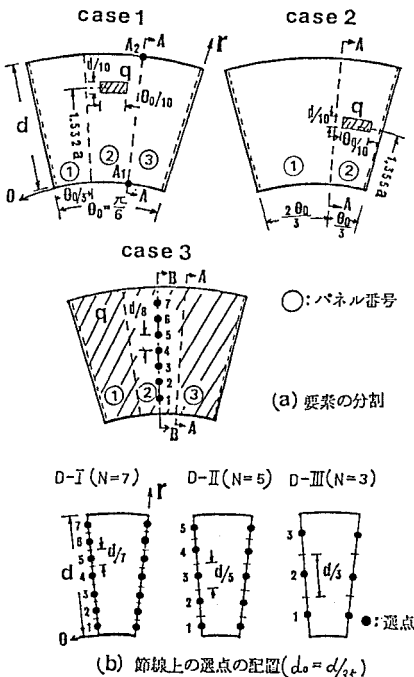
$$\begin{Bmatrix} \Delta f_{j-1,n}^t = [K_{ij}] \Delta \delta_j^t \\ \Delta f_{j,n}^t = [K_{jj}] \Delta \delta_j^t \\ \Delta f_{j,m}^t = [K_{im}] \Delta \delta_j^t \\ \Delta f_{j+1,n}^t = [K_{jm}] \Delta \delta_j^t \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (42)$$

また、隅角点の拘束力の修正量は、式 (35) を考慮して次式で求まる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{f}_{j-1,n}^t = [\bar{K}_{ij}] \Delta \delta_j^t \\ \Delta \bar{f}_{j,n}^t = [\bar{K}_{jj}] \Delta \delta_j^t + |P_j^t|/2 \\ \Delta \bar{f}_{j,m}^t = [\bar{K}_{im}] \Delta \delta_j^t + |P_j^t|/2 \\ \Delta \bar{f}_{j+1,n}^t = [\bar{K}_{jm}] \Delta \delta_j^t \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (43)$$

4. 数値計算例

まず、2. に提示した扇形平板要素の剛性方程式、および 3. で述べたリラクゼーション法の適用性を調べるために、図—5(a) にみるような、相対する円弧の2辺が自由、直な2辺が単純支持された単一扇形板を、同図 (b) に示す要素で分割し、直接剛性法、ならびにリラ

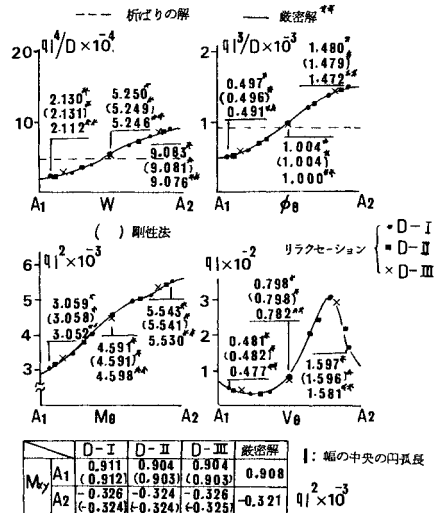


図—5 単一扇形板 ($\nu=0.0, b/a=1.709291$)

クゼーション法の双方による接続を行って、それぞれの計算結果を厳密解 (板を分割せず求めた級数解法による有効数字 6 桁の収束値) と比較した。なお、以下の例題の計算には小型計算機 (OKITAC SYSTEM 50, NEC PC-9801) を用い、単精度で計算している。

図—6 は、図—5(a) の半径方向に偏った部分荷重を受ける場合 (case 1) の本解析値と厳密解を比較したものであるが、図—5(b) に示される節線上の分割数 ($N=3, 5, 7$) のいずれの場合でも、選点上では満足すべき値を得ている。また、図中の表で、要素の隅点の拘束力の不平衡を同時に修正して得られた節線の両端におけるねじりモーメントを厳密解と比較しているが、これらについても同様の結果を得ている。また、図—5(a) の荷重の異なる場合、および、不等分割の場合 (case 2, case 3) についても同様の結果が得られた。表—2, 3, 4 には、それぞれの板の選点 ($N=7$) における、すべての解析値を記載しているが、これらの結果を通じて、本解析値の厳密解に対する誤差は 1% 台にとどまっている。なお、本解析値のうち、直接剛性法によるものと、リラクゼーション法によるものとの差異は 0.2% 以下である。なお、表—5 には case 3 の中央断面における本解析値と芳村の解²⁾ を比較した結果を示している。ここで、リラクゼーションの初期の概算値としては、荷重を幅方向に平均化し、ねじりを考慮した折ればり線の中心線の変位を各節線上の選点に導入した。リラクゼーションは 7 回の反覆によって有効数字 3 桁の収束をみた。ここで 1 回とは、板の左端から右端への 1 回のリラクゼーションのことである。このような収束の様子は、各選点、また節線上の各分割数において同様であった。

次に、前題において適用性を検証した扇形平板要素を



図—6 変位と断面力の分布 (Case 1, A-A 断面)

表-2 変位と断面力 (case 1, A-A 断面, l : 幅の中央の円弧長)

選点	$W \ q1^4/D \times 10^4$			$\phi_0 \ q1^3/D \times 10^3$			$M_0 \ q1^2 \times 10^3$			$V_0 \ q1 \times 10^2$		
	リラクセーション	剛性法	厳密解	リラクセーション	剛性法	厳密解	リラクセーション	剛性法	厳密解	リラクセーション	剛性法	厳密解
1	2.130	2.131	2.112	0.497	0.496	0.491	3.059	3.058	3.052	0.481	0.482	0.477
2	2.857	2.858	2.861	0.614	0.613	0.615	3.097	3.498	3.501	0.313	0.313	0.317
3	3.918	3.916	3.928	0.788	0.788	0.787	4.037	4.035	4.045	0.392	0.390	0.397
4	5.250	5.249	5.246	1.004	1.004	1.000	4.591	4.591	4.598	0.798	0.798	0.782
5	6.681	6.683	6.699	1.236	1.238	1.242	4.927	4.928	4.931	2.051	2.050	2.056
6	8.000	8.001	8.009	1.403	1.405	1.412	5.100	5.100	5.103	3.093	3.091	3.100
7	9.803	9.081	9.076	1.480	1.479	1.472	5.543	5.541	5.530	1.597	1.596	1.581

表-3 変位と断面力 (case 2, A-A 断面, l : 幅の中央の円弧長)

選点	$W \ q1^4/D \times 10^4$			$\phi_0 \ q1^3/D \times 10^4$			$M_0 \ q1^2 \times 10^3$			$V_0 \ q1 \times 10^2$		
	リラクセーション	剛性法	厳密解	リラクセーション	剛性法	厳密解	リラクセーション	剛性法	厳密解	リラクセーション	剛性法	厳密解
1	1.173	1.173	1.169	2.227	2.223	2.201	2.027	2.020	2.002	0.295	0.292	0.280
2	1.511	1.511	1.517	2.277	2.279	2.283	2.283	2.280	2.289	0.242	0.240	0.247
3	1.961	1.963	1.966	1.995	1.993	1.998	2.531	2.533	2.522	-3.681	-3.680	-3.668
4	2.322	2.328	2.331	1.621	1.623	1.628	2.376	2.373	2.383	-2.158	-2.154	-2.169
5	2.493	2.490	2.495	2.196	2.199	2.203	2.495	2.499	2.502	-0.375	-0.379	-0.385
6	2.541	2.539	2.545	2.693	2.701	2.714	2.260	2.260	2.271	0.099	0.097	0.102
7	2.615	2.611	2.598	2.947	2.941	2.922	2.041	2.045	2.025	0.108	0.109	0.104

表-4 変位と断面力 (case 3, A-A 断面, l : 幅の中央の円弧長)

選点	$W \ q1^4/D \times 10^2$			$\phi_0 \ q1^3/D \times 10^2$			$M_0 \ q1^2 \times 10^1$			$V_0 \ q1 \times 10^1$		
	リラクセーション	剛性法	厳密解	リラクセーション	剛性法	厳密解	リラクセーション	剛性法	厳密解	リラクセーション	剛性法	厳密解
1	0.750	0.750	0.740	1.691	1.691	1.688	1.120	1.120	1.111	2.121	2.120	2.112
2	0.880	0.880	0.888	1.860	1.860	1.863	1.127	1.126	1.133	1.815	1.815	1.817
3	1.070	1.070	1.074	2.063	2.063	2.067	1.150	1.150	1.156	1.730	1.730	1.738
4	1.270	1.272	1.279	2.270	2.269	2.271	1.178	1.177	1.179	1.732	1.733	1.735
5	1.491	1.491	1.496	2.461	2.461	2.466	1.192	1.192	1.197	1.719	1.718	1.722
6	1.710	1.712	1.716	2.640	2.640	2.640	1.201	1.200	1.204	1.650	1.650	1.654
7	1.922	1.921	1.913	2.782	2.781	2.776	1.210	1.211	1.201	1.541	1.542	1.536

表-5 変位と断面力 (case 3, B-B 断面, l : 幅の中央の円弧長)

選点	$W \ q1^4/D \times 10^2$		$M_0 \ q1^2 \times 10^1$	
	リラクセーション	芳村の解	リラクセーション	芳村の解
1	0.908	0.903	1.270	1.271
2	1.080	1.075	1.291	1.282
3	1.271	1.266	1.311	1.310
4	1.480	1.473	1.330	1.331
5	1.699	1.691	1.349	1.346
6	1.920	1.912	1.351	1.355
7	2.141	2.131	1.342	1.359

多くのパネルにわたって接続する場合の全体、ならびに局所における解の収束性と精度を調べる。このために、図-7(a), (b), (c) にみるような、全面等分布荷重、および1パネルおきの等分布荷重を受ける相対する円弧の2辺が自由、端辺単純支持、中間支点で同図 (d), (e) のようなばね支持の条件をもつ20径間連続板を、同図 (f), (g) のように20, 40のパネルに分割したそれぞれの場合についてリラクセーション法による解析を行った。また前題を参考に $N=7$ とした。初期の概算値としては、前題同様、支点のばねを幅方向に平均化し、ねじりを考慮した折ればりの中心線の変位を導入した。この場合も7回の反復で有効数字3桁の収束をみた。この結

果と前題の結果を勘案すれば、パネル数のいかにかわらず、同様の反復回数で収束値が期待できることがわかる。

図-8(a) には、図-7(a) の載荷で、中間支点が剛支持の場合の中心線上の M_0 の分布を示しているが、パネル数 (20, 40) のいかにかわらず安定した解が得られている。同図 (b) は中央部分の支持節線上における M_0 の分布を示したもので、節線を固定した単一板の固定モーメントとの間に良好な一致がみられる。

図-9(a) には、中間支点が部分的に剛支持される場合の全体のモードを中央線上の M_0 の分布についてみたもので、ここでもパネル数のいかにかわらず安定した解が得られている。同図 (b) は支持節線上における M_0 の分布を示し、部分支持による局所のモードが、全体のモードと同時に得られていることがわかる。

図-10(a), (b) はそれぞれ、同じ部分支持の連続板が、図-7(b), および (c) にみるような、1パネルおきの等分布荷重を受ける場合の結果を示したもので、中央部付近の支持節線上の M_0 は同一の値となっている。また、これらの結果を重ね合わせたものは、図-9(b) の結果と一致する。以上の検証により、荷重のいかに

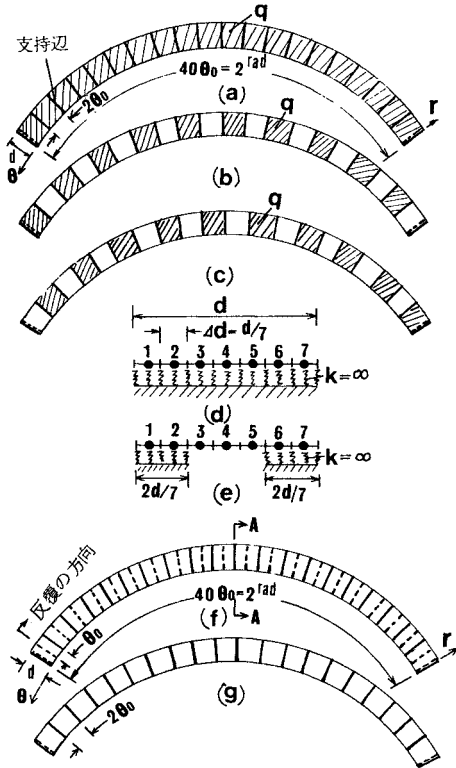


図-7 多径間連続曲線板の荷重の分布、ならびに要素の分割と支持条件 (K :ばね定数, $\nu=0.3$, $b/a=1.10526$)

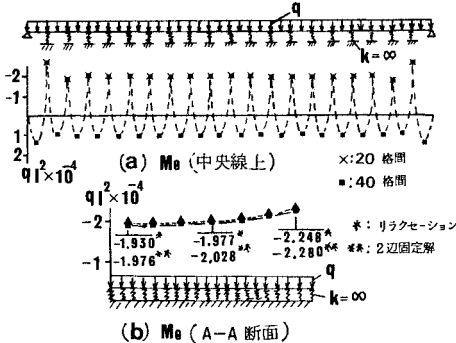


図-8 多径間連続曲線板の曲げモーメントの分布

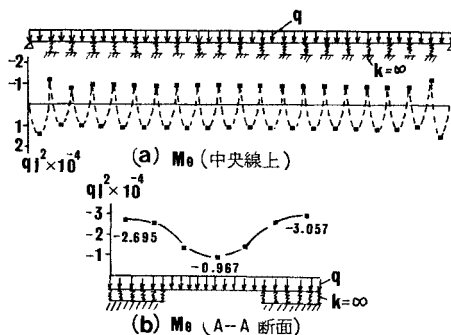


図-9 多径間連続曲線板の曲げモーメントの分布

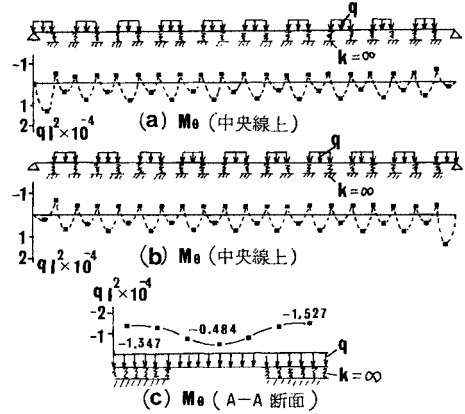


図-10 多径間連続曲線板の曲げモーメントの分布

かかわらず安定した解が得られることがわかる。

なお、図-8, 9, 10 に示す連続板の解析は、左端より右端に向かうリラクセーションの反覆によって行われているが、いずれの場合も良好な対称性をもつ結果が得られており、荷重、ならびにパネル数のいかにかわらず、リラクセーションによる誤差の累積は、実用上生じていないと判断できる。

5. まとめ

(1) 本解法で提示した相対する円弧の2辺が自由、直な2節線に隅角点を含め任意の材端力と材端変位を与え得る大形の扇形平板要素の剛性方程式は、級数解法と選点法を組み合わせで求めたものであるが、種々の荷重状態における一方の接続に対し厳密解と比較した結果、実用上十分と思われる精度を保持した。このような大形の要素を用いれば、FEMなどに比べて解析上必要な自由度の数を大幅に減少させることができ、任意の支持条件をもつ多径間曲線平板構造の全体ならびに局所の挙動を同時に、かつ容易に解析することができる。

(2) さらに、本解法で提示したリラクセーション(材端力の分配)の方法によれば、このような連続板構造をその規模(長さや径間数)を制限することなく小型計算機による単精度計算で解析できることがわかった。すなわち数値計算の結果によれば、リラクセーションは数回の反覆で有効数字3桁の収束をみ、荷重、ならびにパネル数のいかにかわらず、構造全体、ならびに局所の両面にわたって実用上十分な精度の解が得られた。また、リラクセーションの初期の概算値として板の特性を幅方向に平均化した折ればりの解を有効に用いることができた。リラクセーション法は慣用計算における概算値を、その方法では評価できない問題を含めて一連の計算の流れの中で修正できるもので、小型計算機を対話的に利用するうえで有効である。

(3) 本解析の結果により、著者がすでに文献1)に提示した多径間直線平板構造の解析法が、それを曲線構造に拡張した場合にも有用であることが判明した。

(4) 本解法は、最近多径間化の傾向にある曲線スラブ高架橋などを解析するための1つの有効な方法として寄与できるものと考えられる。なお、本解法では、平板要素として等方性のものを扱ったが、2.(1)の基本解の出発点である集中荷重の解を求めるに際して、式(6)の同次解に直交異方性板のものを当てはめれば、直交異方性板の解が求まることが知られており⁸⁾、これを出発点とすれば、直交異方性板要素の剛性方程式を求めることが可能である。このことは、本解法の実際構造物への適用性をさらに拡張できることを示唆するものといえる。

参 考 文 献

- 1) 岡村宏一・石川一美：小型計算機による多径間平板構造の解析，土木学会論文集，第344号/I-1，pp.313~322，1984年4月。
- 2) 芳村 仁：曲線直交異方性扇形平板の曲げについて，土木学会論文集，第82号，pp.1~8，1962。
- 3) Coull, A. and Das, P. C. : Analysis of Curved Bridge Decks, Proc. Institution of Civ. Eng. Vol.37, pp.75~85, 1967.
- 4) Cheung, Y. K. : The Analysis of Cylindrical Orthotropic Curved Bridge Decke, IABSE, Vol. 29, No. 2, pp. 41~51, 1969.
- 5) Pardoen, G. C. and Marienthal, M. J. : Finite Strip Method in Polar Coordinates, Proc. ASCE, Vol.104, No.EM3, pp.587~604, 1978.
- 6) Rubin, C. : General Solution to Bending of Orthotropic Sectors, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.109, No.1, pp.168~174, 1983.
- 7) Harik, I. E. : Analytical Solution to Orthotropic Sector, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.110, No.4, pp.554~568, 1984.
- 8) Harik, I. E. and Pashanasangi, S. : Curved Bridge Decks : Analytical Strip Solution, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.111, No.7, pp.1517~1532, 1985.
- 9) 井浦雅司・平嶋政治：任意の境界条件に適用し得る扇形直交異方性板のフーリエ級数解，構造工学論文集，Vol.31 A, pp.171~181, 1985.
- 10) 春日康伸・岡村宏一・石川一美：多径間曲線平板構造の解析における大形平板要素の作成について；土木学会第39回年次学術講演会講演概要集，第1部，pp.189~190, 1984.

(1985.11.8・受付)