

鉄道線路に発生する高周波振動の発生原因およびその解析

ANALYSIS OF THE VIBRATIONS WITH HIGH FREQUENCIES OCCURED IN THE RAILWAY TRACK

小野一良*・山田幹雄**

By Kazuyoshi ONO and Mikio YAMADA

In the present paper the causes of the noise radiated from the railway track under the running vehicles are discussed. The unevenness of rail surfaces was measured precisely by the roughness meter and the corrugations with the amplitude of less than 10 μ m and the wave length of 5 through 10 cm were detected. The elastic constants between the wheel and the rail were also estimated by applying the load through the wheel to the rail head which was moved by every 1 cm. It was found that they are scattered in the mode of Gaussian dispersion. The standard deviation of the depression between the wheel and the rail amounts to 7.6 μ m and this deviation is presumed also to be the cause of the vibration of the rail under the running vehicles.

Keywords: railway track, vibration, noise

1. ま え が き

著者らは、文献1)において列車通過時に鉄道線路に発生する振動を分析した結果を発表し、その振動には低周波から高周波にいたる種々の振動数をもつ振動が含まれているが、50~70 Hzの低周波振動が最大の振動エネルギーをもっていることを明らかにし、軌道の劣化防止に関してはこのような低周波振動の対策が重要であることを述べた。しかし、列車通過時の騒音に関しては、人間の聴覚に最も敏感な1000~3000 Hzの発生原因となる振動が問題になる。このような高い振動数の発生原因については、大きく分けて2つの説がある。その1つは、列車の通過によって軌道または軌道材料のもつ固有振動が誘発されたものであるとして、現場における列車通過時の騒音と試験軌道における車輪落下実験の結果とが比較されている²⁾。他の1つは、振動および騒音の発生は車輪とレール間の凹凸による強制振動とみなしてもよいとされている^{3),4)}。

レール面に空転傷、波状磨耗、継目落ちがあり、また

は車輪踏面にフラット部があるなど明らかな不整部があれば、これが原因となって軌道に大きな衝撃が加えられ、軌道および路盤に振動を発生するのが当然であるが⁵⁾、これらの欠陥が特に見当たらない場合にも列車通過時には軌道に振動が発生し、これが騒音の原因となるのが通例である。特に、騒音に関連の深い高周波振動が発生するためには、レール面に1 cm程度の波長をもつ凹凸が存在しなくてはならない。振動計のピックアップを走行車両の軸箱の上に固定して軸箱の上下動を測定した例も報告されているが^{4),6)}、見掛け上レール面に凹凸はなくても軸箱に上下動を生じることが凹凸の存在を証明したことになる。本論文において、著者らは高周波振動の発生原因には車輪とレールとの接触部に生じる弾性変形量のばらつきも大きく関与するのではないかと推定して、これを実験によって確かめ、さらにこれが原因となつてどの程度の振動を発生するかについて理論的解析を行った。

これまでに鉄道線路の振動を解析した論文の多くは、長く連続したレールの下でまくらぎ、道床および路盤を代表した質量が、それぞれ間にばねを挟んで上下に重ねられていると仮定している^{2),7)-9)}。このようなモデルにおいては振動エネルギーの逸散を生じることがなく、また自由度の数に対応して多数の固有振動数が導かれる。

* 正会員 工博 金沢工業大学教授 工学部土木工学科
(〒921 金沢南局区内野々市町扇が丘7-1)

** 正会員 工博 金沢工業大学講師 工学部土木工学科
(同上)

しかしながら、本論文においては軌道はその長さ方向に無限に延び、また路盤は下方に無限に続くものと仮定して、振動のエネルギーがレールの長さ方向および路盤の下方に伝播して逸散することを考慮に入れて解いた。この場合、固有振動としては振動数の比較的低いものが1個存在するだけで、これより高い振動数に対しては振幅の増減はあるが、その変化は比較的になだらかである。

2. レール面の凹凸

一般に、レール面の高低狂いは軌道検測車によって測定されており、軌道補修の指標となっている。検測車の記録から1 m 間隔でレール面の凹凸を読み取り、周波数分析を行った結果によれば、レール面に存在する波長8~40 m の高低狂いに対するパワースペクトル密度（以後 P. S. D. と書く）は波長の 1.89~2.05 乗に比例し、特に低周波域では波長の 3.10~3.24 乗に比例するということである¹⁰⁾。このように、波長の長い高低狂いの存在は車両の動揺には大きな関連をもつが、軌道に発生する高周波振動の原因になるとは考えられない。

波状磨耗を生じたレールについてレール面の凹凸を詳細に検査するために、長さ2 m の定規を用いて1 cm 間隔でレール面の凹凸を測定した場合もあるが¹¹⁾、波長5 cm 以下の凹凸の存在を発見することは困難であった。レール溶接部についてレール面の凹凸を測定した結果¹⁾

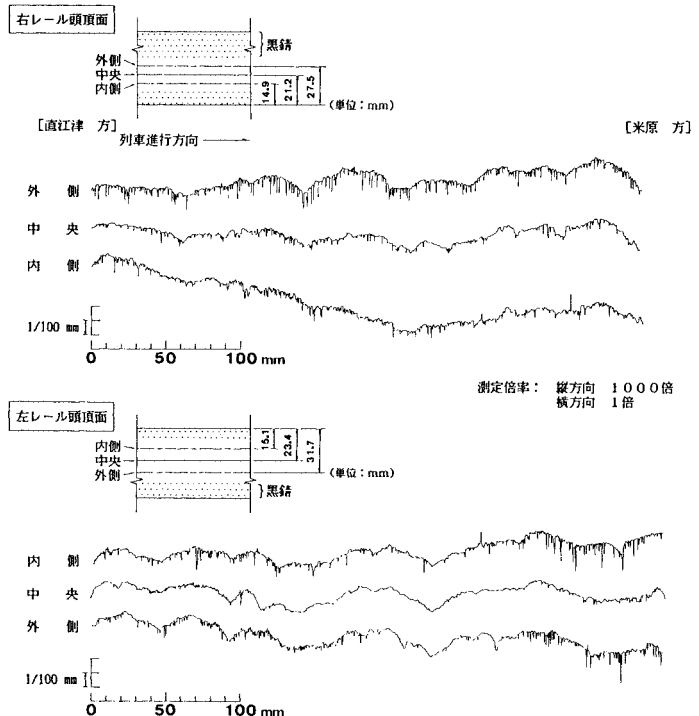
も発表されているが、波長5 cm 以下の凹凸の存在は明らかにされていない。

この問題をさらに詳細に検討するために、北陸線金沢一東金沢間の上り線において、レール更换によって発生した50 N レールを更换直後に長さ10 cm ごとに切断し、表面粗さ形状測定機を用いてレール頭頂面の凹凸を1 μm の精度で測定した（写真—1）。車輪の接触によってレールが光っている面に6.3~8.3 mm 間隔に3本の平行線を引き、この線上における測定結果を4本接続して図—1に示した。波長2~12 cm の各種の凹凸が存在しているが、その中でも波長5~8 cm のものが多い。凹凸の振幅は、波長の比較的最長いものでも7 μm (実効値) 以下である。

レール更换の実施前に、この現場で列車通過時に軌道および路盤に生じた振動速度と加速度とを測定し、これらを周波数分析した結果を図—2, 3に示した。図におけるそれぞれの値は、測定点を72~94 km/h の速度で通過した5本の特急電車の前、後台車より生じた振動の分析値86個の中央値を表わしている。線路構造としては50 N ロングレール敷設、PC 3号5型まくらぎが65 cm 間隔に配置され、砕石道床、平坦地である。図—2, 3においては、いずれも振動数63 Hz に極大値が存在している。これは前回の論文¹⁾でも述べたように、路盤も含めた軌道の固有振動を示すものと考えられる。レール



写真—1 レール頭頂面の凹凸の測定



図—1 レール頭頂面における凹凸の形状

に関して、振動速度においては500 Hz、加速度においては1 000 Hzに第2の極大値が存在している。ここで、列車速度85 km/hに対して500 Hzは波長4.72 cmに相当し、1 000 Hzは2.36 cmに相当する。図-1によれば、500 Hzの振動についてはレール面の凹凸がその発生原因であると考えられるが、1 000 Hzの振動についてはこれに相当する波長をもつ凹凸の存在は明らかでない。

以上に述べたように、レール面を精密に測定しても1 000 Hz以上の高周波振動の発生原因となるべき凹凸を見つけることは困難のようである。しかし、車輪とレールとの接触部は一般に5~6 tf (49.0~58.8 kN)の力で圧縮されていることを考えれば、このように圧縮された状態においてレール面に凹凸が存在するかどうかについて検討する必要がある。このため、レール更换によって発生したレールを約1.6 mの長さに切り取り、これを50 tf 構造物試験機の支持台上に載せ、レール面上に車輪タイヤより切り取った長さ17 cmのセグメントを置いた。レールウェブの両側には精度1/1 000 mmのダイヤルゲージを取り付け、セグメントを最高30 tf (294 kN)の力で押し付ける間に生じる変形量を測定した(写真-

2、図-4)。実験には右レールと左レール各1本ずつおよび2個のセグメントを用い、その組合せを換えてセグメントをそれぞれのレールの中央部20 cmの間を1 cm間隔で順次移動させた。

図-5は、左右のダイヤルゲージの読みの平均値 δ と荷重 P との関係の例を示す。ヘルツの理論によれば、変形量は荷重の2/3乗に比例して増加することになるので、この図における荷重の目盛りはこの割合で縮尺されている。荷重の小さい段階においては荷重と変形量との関係は不安定であるが、荷重が4 tf (39.2 kN)を越えるとほぼ直線状になることが認められる。

次に、変形量 δ と荷重 P との関係が $\delta = CP^{2/3}$ で表わされたとして、多数の測定結果についてそれぞれのたわみ係数 C を求め、この式を用いて荷重6 tf (58.8 kN)に対する変形量を算出した。この変形量は図-6に示すように正規分布を呈し、その平均値 δ_m は58.3 μm となり、標準偏差 σ は7.6 μm となった。なお、1 cm離れて隣り合う測定点間の C 値には特に関連は認められな

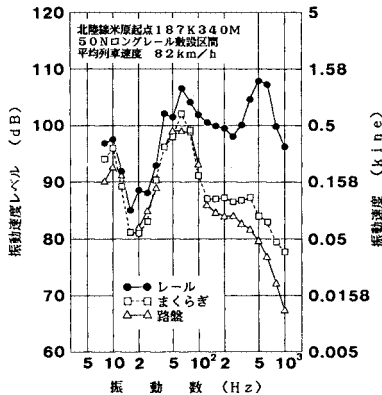


図-2 レール、まくらぎおよび路盤に生じる振動速度の周波数分析 (1/3 オクターブバンド、中央値)

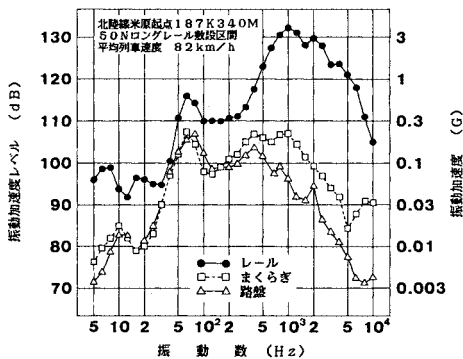


図-3 レール、まくらぎおよび路盤に生じる振動加速度の周波数分析 (1/3 オクターブバンド、中央値)

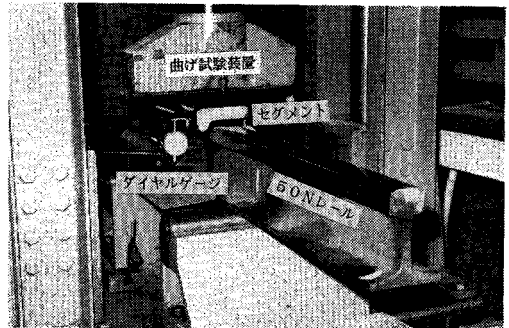


写真-2 タイヤセグメントとレール頭頂面との接触部に生じる変形量の測定

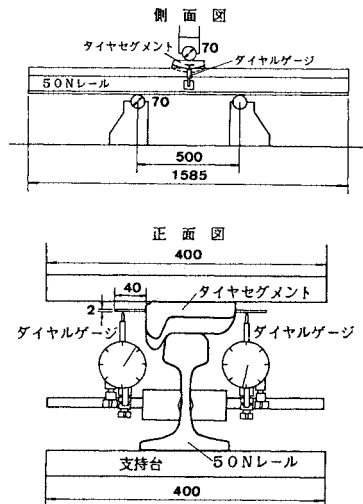


図-4 ダイヤルゲージ取付け位置 (mm)

かった。このようにたわみ係数の値にばらつきが生じた理由としては、その中に多少の測定誤差は含まれているものの本質的にはわずかに離れた位置におけるレールの材質にいくらかの違いがあるためと推定される。また、このばらつきは車輪とレールとの間の接触状態の変化によっても生じ、レール面あるいは車輪踏面の曲率のわずかな変化によってもこの程度のばらつきは起こり得ると考えられる。なお、セグメントとレールとの接触部におけるばね定数 K は $dP/d\delta$ によって求められ、その大きさは $P^{1/3}$ に比例することになる。 $P=6\text{ tf}$ (58.8 kN) に対する K の平均値は、 $1.555 \times 10^6 \text{ kgf/cm}$ (1.524 GN/m) となった。

車輪とレールとの接触を2個の円筒の接触とみなして、その接触部の形状および応力を解析する方法が

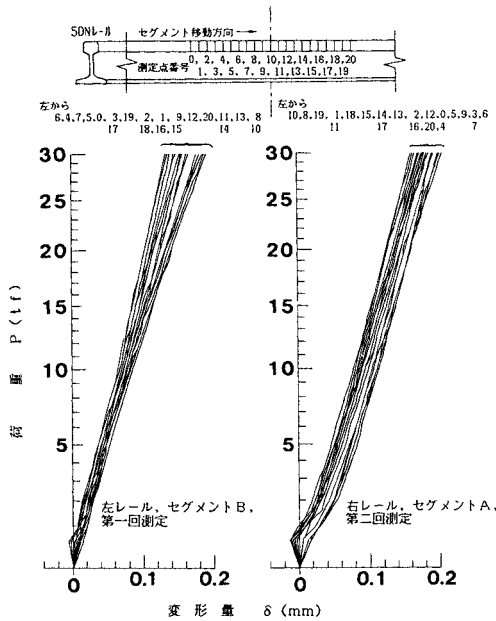


図-5 変形量と荷重との関係

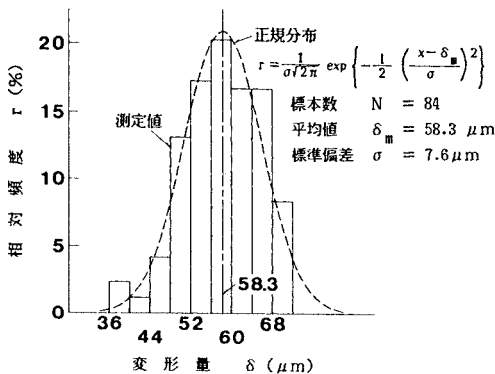


図-6 荷重6tfに対する変形量の分布

Timoshenkoの教科書に出ている¹²⁾。車輪の半径を43 cmとし、レール頭頂面の半径を30 cmとして計算を進めたところ、6 tf (58.8 kN)の荷重に対して接触部は長径11.7 mm、短径9.2 mmの楕円となった。したがって、車輪が11.7 mm進行すれば車輪とレールとの接触部はまったく更新されることになり、この2点における変形量 δ の偏差値 $\delta - \delta_m$ の間の関連はきわめて小さくなると思われる。長径の半分の長さに対応する5.85 mm離れた2点に中心をもつ2個の楕円および楕円内の接触圧力の分布を考えれば、全圧力の1/3が重複することになる。したがって、この2点における変形量 δ の偏差値はお互いに隣りの偏差値の1/3を受け継ぐとして、1次のマルコフ過程とみなすことができる。いま列車速度を85 km/hとして相関の減衰率を計算すれば、 $\alpha = 2690 \text{ sec}^{-1}$ が得られる。ラグ $\tau=0$ に対する自己相関は σ^2 によって与えられ、 $57.8 \mu\text{m}^2$ となる。これらの数値を用いて500 Hzから2000 Hz、すなわち列車速度85 km/hに対して波長4.72 cmから1.18 cmにいたる種々の凹凸についてのP.S.D.を計算した。さらに、このP.S.D.より各振動数を中央値とする1/3オクターブ幅について、その振幅(実効値)を計算した結果を表-1に示した。この表において、P.S.D.は凹凸の波長の増加に伴って大きくなるが、その増加の割合はこれまでに発表されているものとは幾分異なり、波長の2乗に比例するというほどでもない。ここに示したP.S.D.は、車輪とレールとの接触部における変形量のばらつきだけを考慮して計算したものであり、波長が長くなれば、図-1に示されるようなレール面の凹凸やレール支持条件のばらつきなどが加わるため、P.S.D.はさらに大きくなるものと考えられる。

なお、表-1には、車輪がこのレール面を走行するときに、レールに発生する振動振幅がレール面の凹凸の振幅に一致すると仮定して振動速度、加速度を計算した結果および比較のため周波数分析を行って求めた中央値を追加した。計算値は分析値にほぼ近い値を与えており、車輪とレール間のばね定数のばらつきがレールに生じる高周波振動の発生原因の1つになるということが判明した。なお、500 Hzの振動については、レール面の凹凸

表-1 レール面凹凸の波長および振幅

振動数 (Hz)	500	630	794	1000	1260	1587	2000
波長 (cm)	4.72	3.75	2.97	2.36	1.87	1.49	1.18
P.S.D. ($\mu\text{m}^2/\text{sec}$)	0.0363	0.0271	0.0193	0.0133	0.0088	0.0058	0.0038
振幅 (μm)	2.051	1.990	1.886	1.755	1.610	1.464	1.320
振動速度 (kine)	計算値	0.644	0.788	0.941	1.103	1.275	1.460
	分析値	1.230	1.148	0.501	0.327	—	—
加速度 (g)	計算値	2.07	3.18	4.79	7.07	10.30	14.85
	分析値	1.44	2.42	3.38	4.30	3.75	3.08

注) 振幅、振動速度および加速度は実効値を示す。

をその発生原因とした振動も考えに入れなければならない。

3. レール面の凹凸によって生じる振動の理論的解析

さきにも述べたように、レール面には軌道の高低狂いとよばれる比較的波長の長い凹凸から車輪とレールとの接触面におけるばね定数のばらつきによって生じる波長の短い凹凸まで混在する。ここでは、このような軌道を車両が走行するときに車輪と軌道との間に発生する振動を理論的に解明する。

いま、レールの走行面に振幅 ϵ 、波長 S なる正弦波状の凹凸があるとすれば、速度 v で走行する車両に対してはレールの高さが $\epsilon \sin \omega t$ をもって変動することに相当する。ここに、 ω は次式で示される正の実数とする。

$$\omega = 2\pi v/S \dots\dots\dots (1)$$

軌道および路盤に生じる振動の計算にあたって、レールは軌道パッドを挟んで連続的にまくらぎによって支持されるとし、またまくらぎの受けた荷重は道床および路盤に伝達されるのであるが、その支持面積は下方に行くほど広くなると仮定する。すなわち、まくらぎの長さの半分についてその底面積を R_0 とし、これより下方に伝達される圧力は、深さ z の道床または路盤中において

$$R = R_0 \exp(2\phi z) \dots\dots\dots (2)$$

の面積内に均等に分布されると仮定する。 ϕ の値は道床および路盤の状態によって変動するが、列車通過中の路盤内の圧力を測定した結果および Boussinesq の式を考慮に入れた結果、 ϕ は $1 \sim 3 \text{ m}^{-1}$ の範囲内にあると推定される。まくらぎ底面より z の深さにおける道床または路盤の沈下量を w とし、道床および路盤の圧縮に対する弾性係数を等しいと仮定してこれを k と置けば、深さ z における道床および路盤内の圧力は次式によって示される。

$$p = -k \frac{\partial w}{\partial z} \dots\dots\dots (3)$$

道床および路盤の密度は一定であると仮定してこれを ρ と置けば、この上下方向の運動に関して次式が成立する。

$$R\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial z} (Rp) \dots\dots\dots (4)$$

上式に式 (2)、(3) を代入すれば、

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = k \left(2\phi \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots (5)$$

レールは、一般に一定の間隔 a をもって配置されたまくらぎによって支持されるのであるが、これ以後、レール

はまくらぎより連続的に支持されると仮定して

$$b = R_0/a \dots\dots\dots (6)$$

と置く。レールのたわみを y とし、まくらぎのたわみを w_0 とし、レールの単位長さ当たりの軌道パッドのばね定数を s とすれば、レールは単位長さ当たりまくらぎより $s(y-w_0)$ なる反力を受ける。また、まくらぎの質量を片側レールの単位長さ当たりに換算して m と置けば、 m は道床より bp なる反力を受ける。まくらぎの圧縮による変形を無視すれば、 w_0 は $z=0$ における w に一致する。したがって、まくらぎの上下動に関して次の式が得られる。

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = s(y-w) - bp \dots\dots\dots (7)$$

レールの剛性を EI とし、単位長さ当たりの質量を r と置けば、レールのたわみ運動に関して次の微分方程式が導かれる。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + s(y-w) + r \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

レール、まくらぎ、道床および路盤の運動は式 (5)、(7)、(8) を解いて得られるのであるが、レール面の高さの変化が $\epsilon \sin \omega t$ で表わされたとき、 y 、 w は次式で示される振動を発生すると仮定する。

$$y = \exp(\lambda x) (A \sin \omega t + G \cos \omega t) \dots\dots\dots (9)$$

$$w = \exp(\lambda x + \mu z) (B \sin \omega t + H \cos \omega t) \dots\dots\dots (10)$$

y および w には、静荷重によるたわみは含まないものとする。このようなレール面を走行する1個の車輪の質量を M とし、その上下動を次式で示す。ただし、 η は下方向を正とする。

$$\eta = C \sin \omega t + D \cos \omega t \dots\dots\dots (11)$$

式 (10) を式 (5) に代入すれば、次式が導かれる。

$$\mu = -\phi \pm \sqrt{\phi^2 - (\omega/c)^2} \dots\dots\dots (12)$$

ただし、ここに c は路盤内を伝播する縦波の速度であって次式によって求められる。

$$c = (k/\rho)^{1/2} \dots\dots\dots (13)$$

ω が ϕc より小さいときには、式 (12) によって2個の μ の値が求められるが、路盤内に含まれる振動のエネルギーが下方に行くに従って増加することはあり得ないので、 μ の値が $-\phi$ より大きくなることは許されない。また、 ω が ϕc より大きくなれば、 μ は複素数となる。したがって

$$\omega < \phi c \text{ のとき } \mu = -\phi - \sqrt{\phi^2 - (\omega/c)^2} \dots\dots\dots (14)$$

$$\omega > \phi c \text{ のとき } \mu = -\phi \pm i\psi \dots\dots\dots (15)$$

$$\text{ただし、} \psi = \sqrt{(\omega/c)^2 - \phi^2}$$

式 (9)、(10) を式 (7)、(8) に代入することによって次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} -m\omega^2 B &= s(A-B) + bk\mu B \\ EI\lambda^4 A + s(A-B) - r\omega^2 A &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} -m\omega^2 H &= s(G-H) + bk\mu H \\ EI\lambda^4 G + s(G-H) - r\omega^2 G &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

式(16)より A, B を消去し、または式(17)より G, H を消去すれば、 λ を求める式が得られる。

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{EI\lambda^4 - r\omega^2} - \frac{1}{m\omega^2 + bk\mu} = 0 \dots\dots\dots(18)$$

これまで、 x, z を軌道に固定した座標と考えて多数の式を導いた。しかし、計算の便宜上これより後は x を車両とともに移動する座標とし、車輪がレールに接触する位置を $x=0$ とする。このようにすると、これまで導いた式の中であるものは訂正を要するが、次の条件が成立すればその必要のないことが証明される。

$$\left| \frac{\partial w}{\partial t} \right| \gg \left| v \frac{\partial w}{\partial x} \right| \dots\dots\dots(19)$$

これは、荷重によってレールに生じるたわみ変形の波長が、レール面の凹凸の波長に比べてはるかに大きいことを意味する。この条件に関しては、計算例においてさらに検討を加えることにする。

式(19)で示す条件が成立するときには、軌道および路盤の振動は車両が停止し、そのかわりに車輪の下でレールの高さが周期的に変化すると考えて解いてもよいことになる。このときには、 y および w は $x=0$ を中心として対称になり、これ以後は $x \geq 0$ の場合についてのみ論じる。

$x=0$ における接続の条件および無限遠方における条件として次式が要求される。

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ において } \frac{\partial y}{\partial x} &= 0 \\ x \rightarrow \infty \text{ において } y &\neq \infty, w \neq \infty \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

また、車輪とレールとの接触部のばね定数を K とすれば、この間に生じる接触圧力の変動 N は次式によって表わされる。

$$N = K(\eta - y + \epsilon \sin \omega t) \dots\dots\dots(21)$$

N の中には、静荷重による圧力を含まないものとする。この圧力は車輪に上下振動を発生させる力となり、また、この圧力はレールに生じるせん断力によって支持されることより次式が導かれる。

$$N = -M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = 2EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \dots\dots\dots(22)$$

以上の考察によって、軌道および路盤に生じる振動を求めるために基本となる諸式が導かれたのであるが、これに続いて、 ω が種々の値をもった場合について振動の形状を決定する。まず、 ω が 0 に近いときには、式(14)により μ は -2ϕ に近くなり、式(18)を解いて得られる λ' は負の実数となる。これより、 ω をしだいに増加すれば λ' も増加する。 ω が ϕc より小さく、かつ、 λ' が負の実数としてとどまる場合に生じる振動を第1種の

振動とよぶことにする。

(i) 第1種の振動

λ' が負の実数となるときには、 λ_0 を正の実数として $\lambda' = -4\lambda_0'$ と置いて式(18)より λ_0 を求めれば、 λ として $(1+i)\lambda_0, (-1+i)\lambda_0, (-1-i)\lambda_0, (1-i)\lambda_0$ の4個が得られる。 $\lambda_1 = (1+i)\lambda_0$ と置き、式(20)に示した境界条件を考慮すれば、 $x \geq 0$ となる場合についての y および w は次式によって表わされる。

$$y = F(\lambda_1 x) (A \sin \omega t + G \cos \omega t) \dots\dots\dots(23)$$

$$w = F(\lambda_1 x) \exp(\mu z) (B \sin \omega t + H \cos \omega t) \dots\dots(24)$$

ただし、ここに

$$F(\xi) = \frac{1-i}{2} \exp(i\xi) + \frac{1+i}{2} \exp(-\xi) \dots\dots\dots(25)$$

式(11)、(23)を式(21)、(22)に代入して $\sin \omega t$ および $\cos \omega t$ の係数を比較すれば、次式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} MC\omega^2 &= K(C-A+\epsilon) = \sqrt{8} EIA |\lambda|^3 \\ MD\omega^2 &= K(D-G) = \sqrt{8} EIG |\lambda|^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

上式を解けば

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\epsilon}{\sqrt{8} EI |\lambda|^3 J}, \quad C = \frac{\epsilon}{M\omega^2 J} \\ \text{ただし、} J &= \frac{1}{K} + \frac{1}{\sqrt{8} EI |\lambda|^3} - \frac{1}{M\omega^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

$$G=0, D=0 \dots\dots\dots(28)$$

また、この A, G を式(16)、(17)に代入すれば、 B, H が決定される。特に、 $J=0$ となる場合には、 A, B, C がすべて無限大となり、これは共振の状態にあることを示す。

式(28)に示されるように、一般に第1種の振動においては $\cos \omega t$ を含む項の係数はすべて 0 となる。したがって、車輪とレールとの間に作用する圧力の変動は軌道の上下運動と同一の位相になり、車輪より軌道に伝達される仕事量は 0 となる。これは、第1種の振動が第2種、第3種の振動と大きく異なる点である。

さきに述べたように、 ω を 0 から順次増加すれば、 λ' は負の実数からしだいに増加するが、特に軌道パッドのばね定数が小さいときには、 ω が ϕc に達する前に λ' が 0 となる場合がある。このときには $|\lambda| = 0$ となるので、 $C=0, D=0, A=\epsilon, G=0$ となる。したがって、レールは曲がりを生じせず、いっせいに ϵ なる振幅で上下振動をし、車輪は上下振動を生じないことになる。

次に、 λ' が 0 を越えて正となる場合には、第2種の振動が発生する。

(ii) 第2種の振動

第2種の振動においては λ' が正となるため、4個の λ の値の中の1個は正の実数になり、これを λ_1 と置く。 $x \geq 0$ において、レールのたわみは次式で表わされる。

$$y = A_1 \exp(-\lambda_1 x) + A_2 \cos \lambda_1 x + A_3 \sin \lambda_1 x \sin \omega t$$

$$+|G_1 \exp(-\lambda_1 x) + G_2 \cos \lambda_1 x + G_3 \sin \lambda_1 x| \cos \omega t \dots\dots\dots(29)$$

式 (29) には $\cos \lambda_1 x$ または $\sin \lambda_1 x$ と $\sin \omega t$ または $\cos \omega t$ との積が含まれるため、これらの積は ω/λ_1 の速度で x の正の方向または負の方向に伝播する進行波を表わす。しかし、車輪がレール面の凹凸を通過することによって振動を発生するのであるから、車輪より外方向に振動の伝播することはあっても、外方向から車輪に向かって振動が伝播することはあり得ない。このことより、次の関係が要求される。

$$G_2 = A_3, \quad G_3 = -A_2 \dots\dots\dots(30)$$

さらに、式 (20) に示した条件を考慮に入れることによって、 y は次式のように変形される。

$$y = A|\exp(-\lambda_1 x) \cos(\omega t + \alpha) + \sin(\lambda_1 x - \omega t - \alpha)| \dots\dots\dots(31)$$

ここに、 A および α は力の平衡条件によって決定される定数である。式 (31) には x の正の方向に向かう進行波が含まれており、このような振動が存在することはこれまでの解法では求められなかった点である。

式 (11) と (31) を式 (21), (22) に代入し、左右両辺に含まれる $\sin \omega t$ および $\cos \omega t$ の係数をそれぞれ等しいと置くことによって、次式が導かれる。

$$MC\omega^2 = K\{C + A(\sin \alpha + \cos \alpha) + \epsilon\} \\ = 4EI\lambda_1^3 A \sin \alpha \dots\dots\dots(32)$$

$$MD\omega^2 = K\{D + A(\sin \alpha - \cos \alpha)\} \\ = -4EI\lambda_1^3 A \cos \alpha \dots\dots\dots(33)$$

式 (33) において、 A, D がともに 0 にならないためには、 α は次式の値をとる必要がある。

$$\tan \alpha = 1 + 4EI\lambda_1^3 \left(\frac{1}{M\omega^2} - \frac{1}{K} \right) \dots\dots\dots(34)$$

この α を式 (32) に代入すれば A が求められ、次式で表わされる。

$$A = -\epsilon \cos \alpha \dots\dots\dots(35)$$

続いて、 C, D も式 (32), (33) により求められる。また、式 (16) によって B が求められ、 $x \geq 0$ に対する道床および路盤のたわみは次式によって表わされる。

$$W = B \exp(\mu z) |\exp(-\lambda_1 x) \cos(\omega t + \alpha) + \sin(\lambda_1 x - \omega t - \alpha)| \dots\dots\dots(36)$$

第 2 種の振動においては、一般に車輪とレールとの間に作用する力の変動とレールの上下動の間には位相のずれがあり、単位時間内に車輪から軌道に伝達される仕事量は次式によって計算される。

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T N \frac{dy_0}{dt} dt = 2EI\omega\lambda_1^3 A^2 \dots\dots\dots(37)$$

ここに $T = 2\pi/\omega$

上式における y_0 は、 $x=0$ における y の値である。

次に、 ω が ϕc より大きくなった場合の振動について

考察する。

(iii) 第 3 種の振動

式 (15) に示されるように、同一の ω に対して 2 個の μ が得られるが、その中の 1 個を

$$\mu_1 = -\phi + i\psi \dots\dots\dots(38)$$

とする。ただし、 ψ は正の実数とする。この μ を式 (18) に代入すれば λ' は複素数となり、 λ として 4 個の値が得られるが、このうち第 1 象限にあるものを λ_1 として次式で表わす。

$$\lambda_1 = |\lambda| \exp(i\theta) \dots\dots\dots(39)$$

式 (20) の境界条件を考慮すれば、 $x \geq 0$ に対する y および w は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} y &= F(\lambda_1 x) (A \sin \omega t + G \cos \omega t) \\ &\quad + \bar{F}(\bar{\lambda}_1 x) (\bar{A} \sin \omega t + \bar{G} \cos \omega t) \\ w &= F(\lambda_1 x) \exp(\mu_1 z) (B \sin \omega t + H \cos \omega t) \\ &\quad + \bar{F}(\bar{\lambda}_1 x) \exp(\bar{\mu}_1 z) (\bar{B} \sin \omega t + \bar{H} \cos \omega t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

ここに、 $F(\xi)$ は式 (25) によって示され、 $\bar{F}(\xi)$ はこの共役関数とする。

$$\left. \begin{aligned} A &= |A| \exp(i\alpha), \quad G = |G| \exp(i\gamma) \\ B &= |B| \exp(i\beta), \quad H = |H| \exp(i\delta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

と置く。式 (40) に含まれる z の関数には $\sin \phi z$ と $\cos \phi z$ とが含まれ、これと $\sin \omega t$ または $\cos \omega t$ との積によって下方に向かう波と上方に向かう波とが発生する。しかし、振動の波は下方に伝播することはあっても上方に向かうことはないので、次の条件が必要となる。

$$|B| = |H|, \quad \beta = \delta - (\pi/2) \dots\dots\dots(42)$$

また、 A と B または G と H とは式 (16), (17) に示されるように同一の関係によって結ばれているので、次式が導かれる。

$$\frac{|A|}{|B|} = \frac{|G|}{|H|}, \quad \alpha - \beta = \gamma - \delta \dots\dots\dots(43)$$

式 (42), (43) より次式が得られる。

$$|A| = |G|, \quad \alpha = \gamma - (\pi/2) \dots\dots\dots(44)$$

式 (21), (22) に式 (40) を代入することによって、次式が得られる。

$$MC\omega^2 = K\{C - 2|A| \cos \alpha + \epsilon\} \\ = 4EI|A| \cdot |\lambda_1|^3 \sin(\alpha + 3\theta) - \cos(\alpha + 3\theta) \dots\dots\dots(45)$$

$$MD\omega^2 = K\{D - 2|G| \cos \gamma\} \\ = 4EI|G| \cdot |\lambda_1|^3 \sin(\gamma + 3\theta) - \cos(\gamma + 3\theta) \dots\dots\dots(46)$$

式 (46) より $D, |G|$ を消去すれば、 γ を求める式が得られる。

$$\tan \gamma = \frac{Q(\cos 3\theta - \sin 3\theta) + 1}{Q(\cos 3\theta + \sin 3\theta)} \dots\dots\dots(47)$$

ただし、

$$Q=2EI|\lambda|^3\left(\frac{1}{M\omega^2}-\frac{1}{K}\right) \dots\dots\dots(48)$$

式 (47), (44) によって α が決定されれば、式 (45) によって $|A|$, C が求められる。

$$\left. \begin{aligned} |A| &= \frac{\epsilon}{2\cos\alpha+2Q\{\cos(\alpha+3\theta)-\sin(\alpha+3\theta)\}} \\ C &= \frac{2|A|\cos\alpha-\epsilon}{1-M\omega^2/K} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(49)$$

また、式 (44), (46) によって $|G|$, D も決定される。式 (47) によって 2 個の γ が得られるが、この中で $|A|$ を正とするような γ を選ぶ必要がある。

さきと同様な方法で軌道および路盤に単位時間当たり に伝達される仕事を計算すれば、

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T N \frac{dy_0}{dt} dt = \frac{KM\omega^3}{K-M\omega^2} |A| \epsilon \cos \gamma \dots\dots(50)$$

ここに $T=2\pi/\omega$

となる。上式によれば、 $K-M\omega^2=0$ となるときには W が無限大となるようであるが、このときには同時に $\cos \gamma$ も 0 となるので、 W は次式で計算される。

$$W = EI|\lambda|^3\omega(\cos 3\theta + \sin 3\theta)\epsilon^2 \dots\dots\dots(51)$$

4. 計算例

レール面に正弦波状の凹凸があり、その振幅 (実効値) ϵ は波長 S に比例するとして

$$\epsilon = 0.745 \times 10^{-4} S \dots\dots\dots(52)$$

と置く。このように仮定したことは、レール面凹凸の P. S. D. が波長の 3 乗に比例するとして、この P. S. D. を 1/3 オクターブごとに集計してそれぞれの中心周波数で代表させたことに相当する。列車速度を v とすれば、この凹凸によって生じる振動の振動数 n は v/S で与えられ、列車速度 85 km/h のときには $\epsilon=0.176/n$ cm となる。 $n=1000$ に対して $\epsilon=1.76 \mu\text{m}$ となり、表一に示した値と一致する。1000 Hz 以下では表一に示した振幅より大きくなるが、さきにも述べたように、波長が長くなればレール面の凹凸、レール支持条件の変化およびレールの高低狂いが加わることを考慮したためである。

車輪の質量を $M=560$ kg と仮定し、線路の条件としては表二に示す 5 種類を考えた。A は軌道パッドのばね定数が最も低く、かつ路盤の弾性係数が大きい場合である。A, B, C と進むに従って路盤がしだいに軟らかくなり、C, D, E と進むに従って軌道パッドが硬くなる。計算結果において、この 5 種類の中で第 2 種の振動が発生するのは A の場合だけである。一般に、第 1 種の振動の中に共振点が存在するが、E の場合には第 3 種

表一 計算に用いた線路条件

線路条件		A	B	C	D	E
K	GN/m	1.555	=	=	=	=
r	kg/m	50.4	=	=	=	=
E	GPa	206	=	=	=	=
I	cm ⁴	1960	=	=	=	=
s	mm/m ²	89	=	=	148	208
m	kg/m	121.2	=	=	=	=
b	m	0.40	=	=	=	0.60
ϕ	m ⁻¹	3.0	2.0	1.0	=	=
k	MPa	588	294	=	=	=
ρ	kg/m ³	1800	=	=	=	=

注) 表中の=は左の欄の数値に等しいことを示す。

表三 共振点または極大値においてレールに生じる振動速度、加速度および振動の逸散に消費される仕事率

線路条件		A	B	C	D	E	
1次	振動数	Hz	65.8	62.8	57.1	61.7	66.3
	仕事率	dB					142.8
	振動数	Hz	65.8	62.8	57.1	61.7	64.4
	振動速度	dB	∞	∞	∞	∞	125.7
2次	振動数	Hz	65.8	62.8	57.1	61.7	64.4
	仕事率	dB					132.0
	振動数	Hz	1088.0	1088.0	1087.9	1107.9	1132.3
	仕事率	dB	135.1	135.1	135.1	135.1	135.0
3次	振動数	Hz	1002.2	1002.1	1002.1	1016.2	1030.6
	仕事率	dB	109.9	109.9	109.9	109.9	109.9
	振動数	Hz	1307.7	1307.6	1307.6	1312.7	1318.1
	振動速度	dB	141.2	141.2	141.2	141.2	141.3

ただし 仕事率 1W=120dB
振動速度 (実効値) 5cm/sec=120dB
加速度 (実効値) 1g=120dB

の振動の中に共振点が移動する。しかし、第 3 種の振動においては、共振点といっても振幅が無限大となることはない。したがって、厳密な意義で共振点ということとはできない。これとは別に、一般に第 3 種の振動の中に軌道の振動が極大となる振動数があるが、その振動数は仕事率 W について求めた場合と振動速度でみた場合と加速度でみた場合でいくらか異なっている。これを 2 次の極大値として、表三に示した。

表三に示されるように、線路条件が大きく変化しても共振点または極大値の位置および 2 次の極大値における仕事率、振動速度および加速度にはほとんど変化はない。E の場合について、振動数と仕事率、振動速度および加速度との関係を図一に示したが、図二、三に示した現場測定値と比較して、一般に計算値の方が測定値より大きい。ただ、500 Hz における振動速度については、両者はほぼ一致している。2 個の極大値の間で加速度を表わす曲線はほぼ平坦となり、このような傾向はこれまでの解法では得られなかった点である。

線路条件 E の場合について、振動数と車輪、レールの振動振幅および車輪とレール間の圧縮変形の変動振幅との関係を計算して図八に示した。この図においては、レール面の凹凸の振幅を 1 とし他の振幅を表わしている。低周波から 1 次の極大値にいたるまでの間では、主

として車輪がレール面の凹凸にならって上下動をし、1次から2次の極大値にいたる間では、主としてレールがレール面の凹凸にならって上下動することが示されている。しかし、2次の極大値を過ぎた後ではレールの上下動振幅はしだいに減少して、レール面の凹凸は車輪とレール間の圧縮量の変動で対応されることになる。

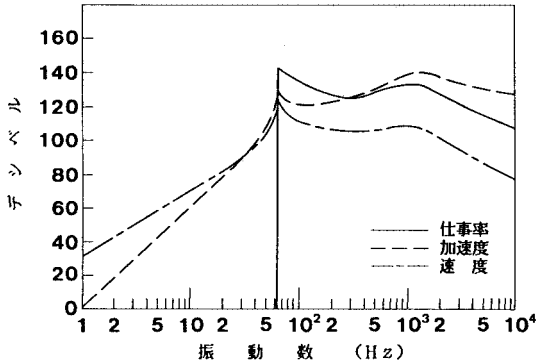


図-7 レール面の凹凸によってレールに生じる振動加速度、速度および振動の逸散に消費される仕事率

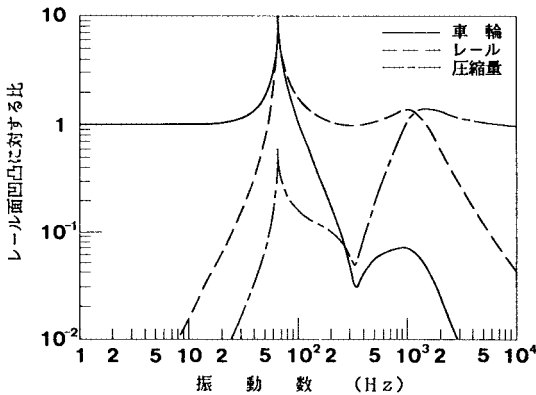


図-8 車輪およびレールの振動振幅および車輪、レール間の圧縮量の変動

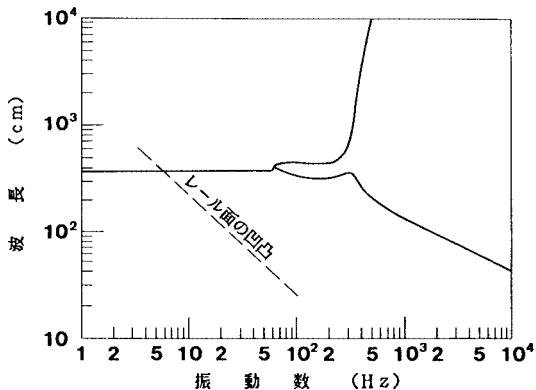


図-9 車輪荷重の変動によってレールに生じる変形の波長

10 000 Hz 近くになれば、車輪およびレールは上下動を生じることなく、ただレール面に作用する圧力の変動が存在するだけとなる。

次に、線路条件Eの場合について、レールに生じる曲げ変形の波長と振動数との関係を計算して図-9に示した。振動数 64 Hz 以下では第1種の振動となり、曲げ変形の波長はほぼ一定である。64 Hz 以上では第3種の振動を生じ、2種類の波長をもつ曲げ変形を生じる。これらの波長はいくらか異なるが、250 Hz までは大きな差はない。しかしながら、300 Hz を越えると一方の波長は急に増加するが、この波長をもつ変形は x の増加とともに急速に減衰し、したがって、このような変形は $x = 0$ の近辺に限られる。他方の波長は振動数の増加とともにしだいに減少する。前節の理論式は、レール面の凹凸の波長がレールの曲げ変形の波長よりはるかに短いことを前提条件として導いた。しかしながら、図-9では、6 Hz 以下においてレール面凹凸の波長がレールに生じる曲げ変形の波長より長くなっている。したがって、さきの計算結果は 6 Hz 付近およびこれ以下の振動数には適用できないことになる。

5. 結 論

列車通過時に発生する高周波振動はレール面の凹凸が原因であると考えて、レール面の凹凸を詳細に測定したが、波長 5 cm 以下の凹凸の存在は明らかでなかった。しかしながら、車輪とレールとの接触部は車輪の回転によって移動し、この間の圧縮変形量は車輪およびレールの材質の変動などによって一定でなく、いくらかのばらつきがある。このばらつきが車輪またはレールの振動の原因になるのではないかと推察して、この変形量の変動を測定し、またこの変動を含むレール面の凹凸を原因として発生する振動について理論的解析を行った。その結果、列車の走行時に、車輪とレールとの接触部における圧縮量の変動によってレールに 1 000 Hz 以上の振動が発生することが推論され、計算結果は現場における測定値をいくらか上回るようになった。

このような振動は、人間の聴覚に最も敏感とされる 1 000 ~ 3 000 Hz の騒音の発生源となるために、これまでもその発生原因の探求および防止方法に関して多くの研究がなされてきた。しかし、本論文において述べたように、高周波振動の発生原因が鋼車輪と鋼レールとの接触部における変形量のばらつきであるならば、この振動を回避することはほとんど不可能ということになる。だが、レール面の凹凸が高周波振動の発生にまったく無関係というわけではなく、今回の研究では測定できなかったが、車輪踏面の凹凸もまた騒音の発生に大きな関連をもっている。特に、フラット部が存在する場合には

非常に大きな振動を発生し、それゆえ騒音も顕著となることをすでに報告した^{5),13)}。したがって、これらの整備を完全にすることによって、ある基準以上の振動および騒音を回避することはできると考えられる。

なお、軌道構造の改良によって高周波振動の発生を回避または軽減できるかどうかを検討するために、レールとまくらぎ間の軌道パッドのばね定数、道床および路盤の硬さを種々の段階に変えて計算を行ってみたが、その効果はほとんど認められなかった。

謝 辞：現場測定に際してご協力をいただいた金沢鉄道管理局の方々、ならびにレール面の凹凸の測定にあたりご助言をいただいた金沢工業大学機械工学科助手新谷一博氏に対し、深謝の意を表します。また、実験およびデータ整理に協力いただいた金沢工業大学土木工学科卒業研究生諸君に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 小野一良・山田幹雄：鉄道線路の軌道および路盤に生ずる振動の解析，土木学会論文報告集，第339号，1983。
- 2) 松浦義満・梶 容郎：車輪とレールの相互作用による振動と騒音に関する実験的研究，土木学会論文報告集，第278号，1978。
- 3) 佐藤吉彦：軌道の高周波振動と各種軌道の特性，鉄道線

路，Vol.25，1977。

- 4) 佐藤吉彦・小菅俊一：輪重変動の立場から見たレール頭頂面凹凸の評価法，鉄道技術研究報告，No.1198（施設編第520号），1981。
- 5) 小野一良・伊藤義男：砂利道床軌道が走行車輛より受ける衝撃の測定および解析，土木学会論文報告集，第240号，1975。
- 6) 佐藤吉彦：高速軌道検測装置（HISTIM）の開発，鉄道線路，Vol.23，1975。
- 7) 佐藤 裕：軌道構造と振動との関係についての理論的考察，鉄道業務研究資料，第13巻第8号，1956。
- 8) 佐藤吉彦：軌道高周波振動の理論解析，鉄道技術研究報告，No.1013（施設編第453号），1976。
- 9) 角 知憲：都市鉄道の継目衝撃音の発生機構に関する研究，土木学会論文報告集，第321号，1982。
- 10) 池守昌幸：軌道狂いのパワースペクトル，鉄道線路，Vol.29，1981。
- 11) 小野一良：波状磨耗レールが受ける衝撃の測定，土木学会論文集，第55号，1958。
- 12) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N. : Theory of Elasticity, Third Edition, 141. Pressure between Two Bodies in Contact. More General Case (pp.414~420), McGraw-Hill, 1970.
- 13) 小野一良・伊藤義男：鉄道線路の軌道に生ずる振動の解析，土木学会論文報告集，第179号，1970。

(1985.10.23・受付)