

弾性節点・弾性支点を有する骨組構造物の動的解析法

A DYNAMIC ANALYSIS METHOD OF FRAME-STRUCTURE WITH ELASTIC NODES AND SUPPORTS

久保雅邦*・小堀為雄**

By Masakuni KUBO and Tameo KOBORI

A dynamic analysis method of frame-structure with elastic nodes and supports is proposed to evaluate its natural frequencies and mode shapes. In this study, the theoretical development of the analysis for three-dimensional beam structures is mainly noticed, which has been applied to the case of continuous girder bridges before. The basic unknowns of equations are integral constants in general solutions same as before, whereas bending, torsional and axial forces and deformations are taken into considerations. Nodal imperfections between beam member as well as support restrictions are modeled by using each elastic springs so that the dynamic properties of the structure with these conditions can be accurately estimated in the analysis. The method composed herein will be highly useful to the dynamic analysis of such structures, e. g. highway bridges, buildings, etc.

Keywords: dynamic analysis, frame-structure, beam, elastic node, elastic support

1. ま え が き

橋梁や建築構造物のように、はりや柱で構成される構造物の動的解析にあたっては、これを平面あるいは立体の骨組構造物にモデル化することが多い。その際、骨組構造物の節点条件や支点条件のモデル化をどのようにするかは動的解析に重要な点である¹⁾。一般に骨組構造物では、ラーメン構造物やトラス構造物に代表されるように、その節点や支点は剛結合や剛支点、あるいはヒンジ結合やヒンジ支点であるが、実構造物にあつてはこれらの仮定を満足させることが難しい場合がある。このような、いわば不完全な節点条件や支点条件は実構造物においてはむしろしばしば経験することであり、これらの不完全さが構造物の動的特性に与える影響が大きいため、これを考慮した動的解析が必要となる²⁾。

いま、構造物に対して大変形の応答を問題にするのでなければ、一般にはこれらの節点や支点における変形を近似的に弾性変形と考えることが可能であり、弾性ばねを用いて上記の節点条件や支点条件をモデル化すること

ができる。すなわち、ばね定数の大きさによって節点における部材の結合度や支点の拘束度を表わすもので、このような節点および支点を弾性節点および弾性支点とよぶ。

従来、この種の動的解析にはいくつかの研究^{3)~5)}があるが、著者らは先の論文において任意の弾性節点・弾性支点を有する連続桁橋の動的解析について報告した⁵⁾。そこでは、構造物の振動モードを表わす固有関数の一般解に着目し⁶⁾、その積分定数を未知変数において連立斉次方程式を組み立て、その係数行列を用いて振動数方程式を求める解析法を提案した。同時に、部材応力や節点変位を未知変数におく従来の動的解析法^{7),8)}に比べて、任意の弾性節点や弾性支点を有する連続はりに対して実用的かつ確実な動的解析ができることを示した。

本論文は、上記の解析法をさらに発展させ、任意の弾性節点や弾性支点を有する骨組構造物の動的解析法を提案するものである。本解法では、上記したように部材の振動モードを表わす一般解の積分定数を未知変数とし、自由振動をしている個々のはり部材の両端におけるつり合い条件式を用いて、骨組構造物全体に関する連立斉次方程式、さらには振動数方程式を組み立てる。その際、最終的に振動数方程式として使われる係数行列を組み立てるにあたって、はり部材の応力-ひずみ関係式、およ

* 正会員 工修 総合技術コンサルタント技術部
(〒533 大阪市東淀川区東中島3-5-9)

** 正会員 工博 金沢大学教授 土木建設工学科
(〒920 金沢市小立野2-40-20)

び部材端と節点との適合条件式をそれぞれ独立した係数行列の形で扱うことができる。その結果、弾性節点や弾性支点を表わすばね定数の大きさに応じてつり合い条件式を使い分けることが可能であり、連続桁橋の場合と同様、このような骨組構造物に対しても振動数方程式の誘導が簡明であり、かつ実用的な動的解析の方法が得られた。

ここでは立体骨組構造物について、各部材の曲げのみならず、ねじりや軸方向の変形をも考慮した解析法を示す。弾性節点や弾性支点を有する骨組構造物の動的解析は、たとえば高架橋の上部構造と下部構造との連成を考慮した解析や、部分的に塑性ヒンジを生じた建築構造物の動的特性の把握などに必要であり、本解法の適用が有効と思われる。また、従来の解法に比べて本解法の特徴は、求めようとする振動モードの一般解を未知変数として直接解くことにある。このことから、本解法を改めて直接法とよぶことにする。

2. 解析理論

(1) 弾性節点と弾性支点を有する骨組解析モデル

一般解法として立体骨組構造物について示すが、同様の考え方が平面骨組構造物の場合にも適用できる。

いくつかの節点とはり部材とで構成される線形構造の骨組モデルを考え、部材番号 i ($i=1, 2, \dots, N$)、節点番号 j ($j=1, 2, \dots, M$) とする。図-1 に示すように、節点座標を右手直交系の全体座標系 $O-XYZ$ によって与える。 X, Y, Z が水平変位成分、 U, V, W が回転変位成分を表わす。さらに、個々の部材において、部材端を原点とする部材座標系 $o-xyz$ を定義する。 x 軸は部材の中心を通過して、部材端が接続する節点の番号が小さい方から大きい方に向かって正の方向とし、 y 軸、 z 軸は部材断面の主軸方向とする。同じく、 x, y, z が水平変位成分、 u, v, w が回転変位成分を表わす。

まず、部材端と節点との結合度を弾性ばねで表わす。部材 i の節点 j に接続する部材端変位 $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}$ に対して、それぞれ独立な弾性ばね $(k_x)_{ij}, (k_y)_{ij}, (k_z)_{ij}, (k_u)_{ij}, (k_v)_{ij}, (k_w)_{ij}$ を定義し、図-2 に示す。な

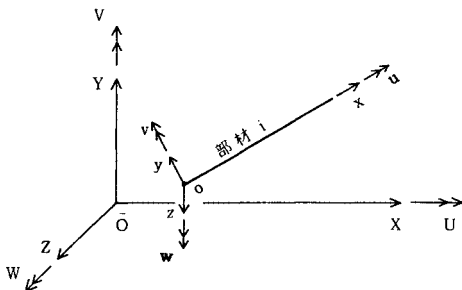


図-1 全体座標系と部材座標系

お、図-2 では部材端と節点との位置を離して表示しているが、解析上の両者の座標は一致しているものとする。各ばね定数の大きさは、部材端と節点との間で部材座標軸上の相対的な単位の水平変位あるいは回転変位を生ずる力とモーメントの大きさを表わし、部材端と節点との結合度に応じて $0 \sim +\infty$ の範囲の値をもつものとする。たとえば、あるばね定数の値が 0 の場合、対応する変位成分方向の結合度は自由であり、一方 $+\infty$ の場合、その結合度は剛結であることを表わす。この弾性ばねを弾性節点ばねとよび、行列 $[K]_{ij}$ で表わす。

$$[K]_{ij} = \begin{bmatrix} k_x & & & & & 0 \\ & k_y & & & & \\ & & k_z & & & \\ & & & k_u & & \\ & & & & k_v & \\ 0 & & & & & k_w \end{bmatrix}_{ij} \dots\dots\dots (1)$$

なお、図-2 に示した 6 個の弾性ばねは部材 i と節点 j との結合度を表わすものであり、節点 j に接続する他の部材においても同様にそれぞれの弾性ばねを考える。

次に、節点 j における支点の拘束度を弾性ばねで表わす。節点 j の変位 $X_j, Y_j, Z_j, U_j, V_j, W_j$ に対して、それぞれ独立な弾性ばね $(f_x)_j, (f_y)_j, (f_z)_j, (f_u)_j, (f_v)_j, (f_w)_j$ を定義し、これを図-3 に示す。各ばね定数の大きさは、それぞれ節点における単位の水平変位あるいは回転変位を生ずる支点拘束力を表わし、支点条件に応じて $0 \sim +\infty$ の範囲の値をもつものとする。たとえば、あるばね定数の値が 0 の場合、対応する変位成分方向の支点拘束はなく、一方 $+\infty$ の場合は剛に支持されていることを表わす。この弾性ばねを弾性支点ばねとよび、行列 $[F]_j$ で表わす。

$$[F]_j = \begin{bmatrix} f_x & & & & & 0 \\ & f_y & & & & \\ & & f_z & & & \\ & & & f_u & & \\ & & & & f_v & \\ 0 & & & & & f_w \end{bmatrix}_j \dots\dots\dots (2)$$

以上の弾性節点ばねと弾性支点ばねを考慮して骨組構造物のモデル化を行うには、必要な結合条件や支点条件のみをモデル化すればよいことになる。しかし、ここでは解析の便宜上すべての節点と部材端とにおいて、それぞれの弾性節点ばねおよび弾性支点ばねを定義するものとする。このモデル化を概念的に図-4 に示す。

(2) 骨組構造部材の振動微分方程式

骨組構造物は一般にはり部材で代表されるので、ここでははり部材について説明する。さて図-5 に示すように、等断面はり部材の振動として代表的な 4 つの振動、すなわち $x-y$ 面内と $x-z$ 面内の各曲げ振動、 x 軸方向

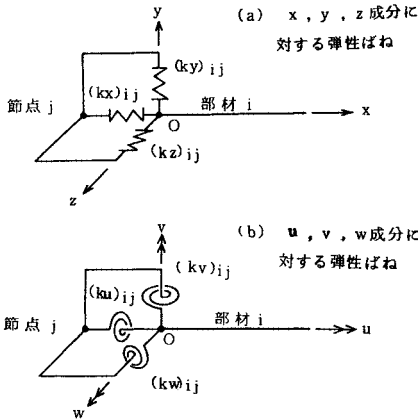


図-2 弾性節点

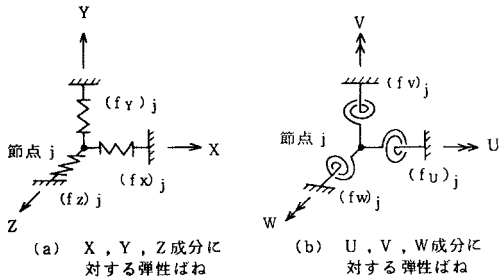


図-3 弾性支点

の縦振動，および x 軸まわりのねじれ振動を考える。この場合には，その自由振動は次の4つの独立な振動微分方程式によって与えられる⁹⁾。ただし，表記上では簡単のために部材番号 i を省略する。

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho}{EI_z} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\rho}{EI_y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\rho}{EA} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{\rho I_x}{GJA} \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここに， t は時間， p, q はそれぞれ x 点における縦方向の相対変位および部材のねじれ角を表わす。 ρ は部材の単位長さ当たり質量， A は断面積， l は部材長さ， I_z, I_y はそれぞれ z 軸まわりと y 軸まわりの断面二次モーメント， I_x は断面二次極モーメント， J はねじり剛度， E は弾性係数， G はせん断弾性係数を表わす。以上の部材変位を表わす変数と断面諸元を表わす定数は，各部材ごとに定義するものとする。

いま，曲げ振動に関する変位 y, z ，および縦振動とねじれ振動に関する変位 p, q はいずれも x と t との関数となり，それぞれ次の直交関数を用いて与えら

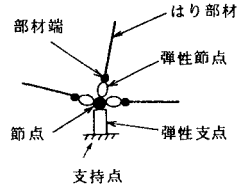


図-4 弾性節点と弾性支点の概念図

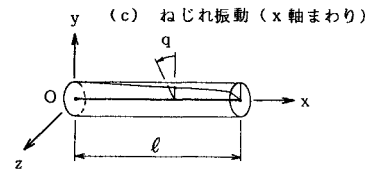
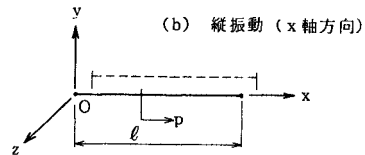
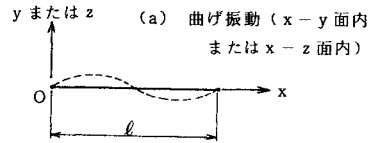


図-5 はり部材の振動

れると仮定する。

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_y^{(n)}(x) \cdot e^{i\omega_n t} \dots\dots\dots (7)$$

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_z^{(n)}(x) \cdot e^{i\omega_n t} \dots\dots\dots (8)$$

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_x^{(n)}(x) \cdot e^{i\omega_n t} \dots\dots\dots (9)$$

$$q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_x^{(n)}(x) \cdot e^{i\omega_n t} \dots\dots\dots (10)$$

ここに， $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位， ω_n は n 次振動における固有円振動数を表わし， $e^{i\omega_n t}$ がここでは一般座標にあたる。さらに， $\phi_y^{(n)}(x), \phi_z^{(n)}(x), \phi_x^{(n)}(x), \theta_x^{(n)}(x)$ は固有関数であり，ここでは n 次振動における振動モードとなる。

式(7)~(10)をそれぞれ対応する式(3)~(6)に代入し，得られる固有関数に関する微分方程式の一般解は次式で与えられる。

$$\phi_y^{(n)}(x) = c_1^{(n)} \cdot \cos \beta_y^{(n)} x + c_2^{(n)} \cdot \sin \beta_y^{(n)} x + c_3^{(n)} \cdot \cosh \beta_y^{(n)} x + c_4^{(n)} \cdot \sinh \beta_y^{(n)} x \dots\dots\dots (11)$$

$$\phi_z^{(n)}(x) = c_5^{(n)} \cdot \cos \beta_z^{(n)} x + c_6^{(n)} \cdot \sin \beta_z^{(n)} x + c_7^{(n)} \cdot \cosh \beta_z^{(n)} x + c_8^{(n)} \cdot \sinh \beta_z^{(n)} x \dots\dots\dots (12)$$

$$\phi_x^{(n)}(x) = c_9^{(n)} \cdot \cos \beta_x^{(n)} x + c_{10}^{(n)} \cdot \sin \beta_x^{(n)} x \dots\dots\dots (13)$$

$$\theta_x^{(n)}(x) = c_{11}^{(n)} \cdot \cos \beta_u^{(n)} x + c_{12}^{(n)} \cdot \sin \beta_u^{(n)} x \dots\dots\dots (14)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \beta_y^m &= \sqrt[4]{\frac{\rho}{EI_z} \cdot \omega_n^2}, \quad \beta_z^m = \sqrt[4]{\frac{\rho}{EI_y} \cdot \omega_n^2} \\ \beta_x^m &= \sqrt{\frac{\rho}{EA} \cdot \omega_n^2}, \quad \beta_u^m = \sqrt{\frac{\rho I_x}{GJA} \cdot \omega_n^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

また、 $c_1^m \sim c_{12}^m$ は一般解の積分定数を表わし、各振動モードが決定するまでは未知変数である。添字 (n) は n 次振動モードの次数を表わすが、以後の説明では特に必要ではない限り、簡単のために添字 (n) を省略する。

x - y 面内、つまり z 軸まわりの曲げ振動のうち、ある振動モードにおける部材のたわみ $\phi_y(x)$ 、たわみ角 $\theta_z(x)$ 、せん断力 $S_y(x)$ 、および曲げモーメント $M_z(x)$ の間には、部材の応力-ひずみ関係から次式が成り立つ。

$$\theta_z(x) = \frac{d\phi_y(x)}{dx} \dots\dots\dots (16)$$

$$M_z(x) = -EI_z \cdot \frac{d^2\phi_y(x)}{dx^2} \dots\dots\dots (17)$$

$$S_y(x) = -EI_z \cdot \frac{d^3\phi_y(x)}{dx^3} \dots\dots\dots (18)$$

同様に、 x - z 面内の曲げ振動においては、式 (16)~(18)

の y と z を入れ換えた関係式が成り立つ。一方、部材の縦方向変位 $\phi_x(x)$ 、軸力 $S_x(x)$ 、ねじれ角 $\theta_x(x)$ 、およびねじりモーメント $M_x(x)$ の間には、次の応力-ひずみ関係式が成り立つ。

$$S_x(x) = EA \cdot \frac{d\phi_x(x)}{dx} \dots\dots\dots (19)$$

$$M_x(x) = GJ \cdot \frac{d\theta_x(x)}{dx} \dots\dots\dots (20)$$

ここで、部材の x 軸上の任意の 2 点 x_1, x_2 ($x_2 > x_1$) ではさまれる部分を取り出し、その両端における変位と断面力の符号を次のように考える。すなわち、式 (16)~(20) に示した応力-ひずみ関係式における符号は、図-6 に示す矢印の方向を正としている。一方、部材座標系で表わされる部材端変位と部材端力の符号は、図-7 に示す矢印の方向を正としている。そこで、両者の符号を統一する必要があり、ここでは解析の利便を考慮して図-7 に示す符号の規則に従って着符し、解析する。

式 (11)~(14) を式 (16)~(20) へ代入し、上記した符号変換を考慮すれば、部材の両端における変位と断面力に関して次の関係式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_y(0) \\ \theta_z(0) \\ M_z(0) \\ S_y(0) \\ \phi_z(0) \\ \theta_x(0) \\ M_y(0) \\ S_z(0) \\ \phi_x(0) \\ S_x(0) \\ \theta_z(0) \\ M_x(0) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & 0 \\ & 0 & \beta_y & 0 & 0 & & & & & & & \\ & E_y^3 & 0 & -E_y^3 & 0 & & & & & & & \\ & 0 & -E_y^3 & 0 & E_y^3 & & & & & & & \\ \hline & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & -\beta_z & 0 & -\beta_z & & & \\ & & & & & -E_z^3 & 0 & E_z^3 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & -E_z^3 & 0 & E_z^3 & & & \\ \hline & & & & & & & & & 1 & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 & -E_x & \\ \hline & & & & & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 & -E_u \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_y(l) \\ \theta_z(l) \\ M_z(l) \\ S_y(l) \\ \phi_z(l) \\ \theta_x(l) \\ M_y(l) \\ S_z(l) \\ \phi_x(l) \\ S_x(l) \\ \theta_z(l) \\ M_x(l) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cc|cc} CN_y & SN_y & CH_y & SH_y & & & & & & & & 0 \\ -\beta_y SN_y & \beta_y CN_y & \beta_y SH_y & \beta_y CH_y & & & & & & & & \\ -E_y^3 CN_y & -E_y^3 SN_y & E_y^3 CH_y & E_y^3 SH_y & & & & & & & & \\ -E_y^3 SN_y & E_y^3 CN_y & -E_y^3 SH_y & -E_y^3 CH_y & & & & & & & & \\ \hline & & & & CN_z & SN_z & CH_z & SH_z & & & & \\ & & & & \beta_z SN_z & -\beta_z CN_z & -\beta_z SH_z & -\beta_z CH_z & & & & \\ & & & & E_z^3 CN_z & E_z^3 SN_z & -E_z^3 CH_z & -E_z^3 SH_z & & & & \\ & & & & -E_z^3 SN_z & E_z^3 CN_z & -E_z^3 SH_z & -E_z^3 CH_z & & & & \\ \hline & & & & & & & & CN_u & SN_u & & \\ & & & & & & & & -E_u SN_u & E_u CN_u & & \\ \hline & & & & & & & & & & CN_u & SN_u \\ & & & & & & & & & & -E_u SN_u & E_u CN_u \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

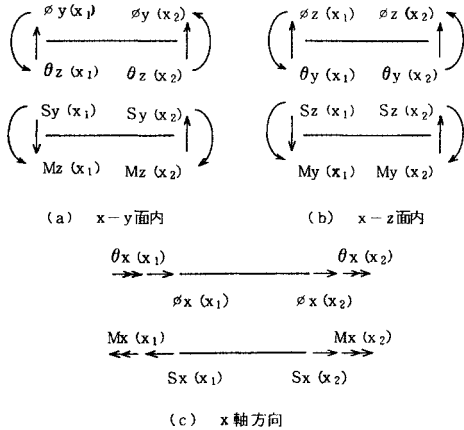


図-6 応力-ひずみ関係式における変位と断面力の符号

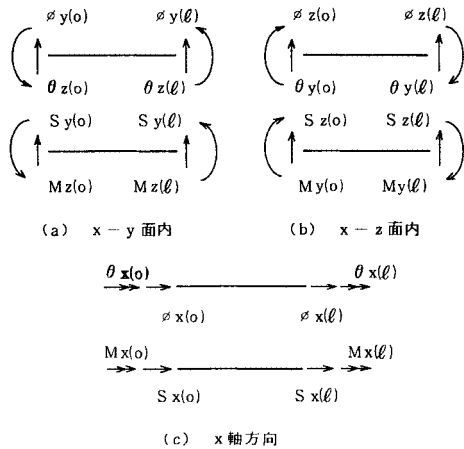


図-7 部材座標系における部材端変位と部材端力の符号

ここに、各記号の意味を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned}
 E_y^2 &= EI_z \cdot \beta_y^2, & E_y^3 &= EI_z \cdot \beta_y^3, & E_x &= EA \cdot \beta_x \\
 E_z^2 &= EI_y \cdot \beta_z^2, & E_z^3 &= EI_y \cdot \beta_z^3, & E_u &= GJ \cdot \beta_u \\
 CN_x &= \cos \lambda_x, & SN_x &= \sin \lambda_x, & CN_u &= \cos \lambda_u, \\
 SN_u &= \sin \lambda_u \\
 CN_y &= \cos \lambda_y, & SN_y &= \sin \lambda_y, & CH_y &= \cosh \lambda_y, \\
 SH_y &= \sinh \lambda_y \\
 CN_z &= \cos \lambda_z, & SN_z &= \sin \lambda_z, & CH_z &= \cosh \lambda_z, \\
 SH_z &= \sinh \lambda_z \\
 \lambda_x &= \beta_x \cdot l, & \lambda_y &= \beta_y \cdot l, & \lambda_z &= \beta_z \cdot l, & \lambda_u &= \beta_u \cdot l
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

(3) 適合条件式とつり合い条件式

骨組構造解析は、次の3つの条件式を満足するように行われる¹⁰⁾。

- 条件一：部材の応力-ひずみ関係式（フックの法則）
- 条件二：部材端と節点との適合条件式
- 条件三：節点におけるつり合い条件式

前節で定義した骨組モデルに対して、まず部材端と節点との適合条件式を求める。部材*i*と節点*j*とにおける変位と断面力の関係を行列表示すると次式となる。

$$|d|_{ij} = [A]_i \cdot |D|_j - [K]_{ij}^{-1} \cdot |V|_{ij} \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 $|d|_{ij}$ は部材*i*の節点*j*側の部材端変位ベクトル、 $[A]_i$ は部材*i*の変位変換行列、 $|D|_j$ は節点*j*の変位ベクトル、 $|V|_{ij}$ は部材*i*の節点*j*側の部材端力ベクトル、 $[K]_{ij}$ は式(1)の弾性節点ばね行列を表わす。右辺の第2項が、ここでは弾性節点に関する項である。また、 $[A]_i$ は直交行列である。

ベクトル $|d|_{ij}$ と $|V|_{ij}$ は、式(21)あるいは式(22)の左辺に示す部材端変位および部材端力を要素とする。ここでは、解析の便宜上、次のようにその要素配列を定義する。

$$|d|_{ij}^T = \{\phi_x, \phi_y, \phi_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z\} \dots\dots\dots (25)$$

$$|V|_{ij}^T = \{S_x, S_y, S_z, M_x, M_y, M_z\} \dots\dots\dots (26)$$

$|I|$ は転置ベクトルを表わす。また、 $|D|_j$ の要素配列を次のように定義する。

$$|D|_j^T = \{X, Y, Z, U, V, W\} \dots\dots\dots (27)$$

ところで、式(24)は弾性節点ばねの値が近似的にゼロでない要素に対してのみ有意義である。対応する部材端変位と部材端力、たとえば ϕ_x と S_x とに関する弾性節点ばね $k_x=0$ の場合には、式(24)を次式のように変形する必要がある。

$$[K]_{ij} \cdot |d|_{ij} = [K]_{ij} \cdot [A]_i \cdot |D|_j - |V|_{ij} \dots\dots\dots (28)$$

式(28)によれば、ばね定数の値が近似的にゼロの場合にも有意義なことは明らかであろう。式(24)と式(28)が部材端と節点との適合条件式である。

次に、節点*j*におけるつり合い条件式を求める。構造物が自由振動をしている状態では外力は作用していないから、この関係を行列表示すると次式となる。

$$\{0\} = [F]_j \cdot |D|_j + \sum_i^{(j)} [A]_i^{-1} \cdot |V|_{ij} \dots\dots\dots (29)$$

ここに、 $\{0\}$ はゼロベクトルを表わし、 $[F]_j$ は式(2)の弾性支点ばね行列を表わす。また、記号 $\sum_i^{(j)}$ は節点*j*に接続しているすべての部材について合計することを表わすものとする。式(29)の右辺の第1項は弾性支点の支点反力を表わし、第2項が節点に集まる部材端力を表わしている。

ところで、式(29)で弾性支点ばねの値が無限大に近い場合には、右辺の第1項が不定形に近くなり意味をもたない。この場合には、式(24)を式(28)に変形したのと同様に、次式のように変形する必要がある。

$$\{0\} = |D|_j + [F]_j^{-1} \cdot \sum_i^{(j)} [A]_i^{-1} \cdot |V|_{ij} \dots\dots\dots (30)$$

式(29)と式(30)が節点におけるつり合い条件式である。

(4) 振動数方程式

(2)と(3)において条件-1~条件-3を定義した。次に、これらの条件式を用いて振動数方程式を求めるにあたって、ここで分布質量系による従来の動的解析法と本解法との解析手順について簡単に比較考察する。静的構造解析上の変位法や応力法を応用した、代表的な従来の解法である振動たわみ角法⁷⁾、動力学的三連モーメント法⁸⁾と本解法とにおける構造解析上の未知変数、および各条件式の適用順序の比較を表-1に示す。

振動たわみ角法の第1段階では、条件-1と条件-2とを用いて部材端変位を消去し、部材端力を節点変位で表わす。その結果を第2段階で条件-3へ代入し、節点変位に関する連立斉次方程式を組み立てる。また、動力学的三連モーメント法の第1段階では、条件-1と条件-3とを用いて部材端変位と部材端力を不静定力で表わす。その結果を第2段階で条件-2へ代入し、不静定力に関する連立斉次方程式を組み立てる。ただし、この場合の節点変位は不静定力に変換されている。

これに対してこの直接法では、まず条件-2と条件-3とを用いて節点変位を消去し、部材端変位と部材端力の関係式を作る。一方、条件-1によって部材端変位と部材端力は、未知変数である一般解の積分定数と関係付けられている。そこで、これを上記の部材端変位と部材端力との関係式へ代入して、積分定数に関する連立斉次方程式を組み立てる。このように、直接法では条件-1を最後に用いる点と、条件-2と条件-3との使い方に特色がある。従来の解法では、部材端変位や部材端力を未知変数によって表わすために条件-2や条件-3を用いるのに対して、直接法では条件-2や条件-3には未知変数が介在せず、これらの条件を単に部材端変位と部材端力を関係付けるために用いる。未知変数の導入は、最後に条件-1を適用する段階においてのみ行う。

上記の特色は、とりわけ弾性節点を考慮した解析を行ううえで都合がよい。というのは、式(24)または式(28)から明らかなように、適合条件式が部材端変位と節点変位だけでなく部材端力をも含む関係式となるために、従

来の解法では方程式の誘導が煩雑になる。これに対して、本解法では方程式の誘導が簡明であり、簡単な行列の計算によって行うことができる。次にその解法を示す。

まず、適合条件式とつり合い条件式とを用いて節点変位を消去する。その際、式(24)と式(28)、および式(29)と式(30)のおのおのにおいてどちらの関係式を用いるかは、ばね定数の大きさに応じて選択すればよい。しかし、方程式の誘導のうえではどちらを用いても最後に変形すれば同じ結果となり、またこの変形は容易に行える。したがって、以後の誘導では式(24)と式(29)の関係を用いて説明する。式(24)と式(29)より次の関係式が得られる。

$$\{0\} = [F]_j \cdot [A]_i^{-1} \cdot \{d\}_{iU} + [F]_j \cdot [A]_i^{-1} \cdot [K]_{iV}^{-1} \cdot \{V\}_{iU} + \sum_{i=1}^n [A]_i^{-1} \cdot \{V\}_{iU} \dots \dots \dots (31)$$

ここで、式(24)の関係式の数は部材数の2倍、つまり2N個であり、式(29)の関係式の数は節点数Mに等しい。一般に、骨組構造物ではM ≤ 2Nの関係にあるから、式(31)による関係式の数は2N個となる。また、式(31)は式(24)と式(29)の適用順序には関係しない。これらの関係は、図-8の部材端と節点との結合に関する模式図に示すように、各部材端と節点との間に1組ずつ成立する。

ところが、2つ以上の部材が接続する節点において、弾性支点ばねの値がゼロに近い場合には式(31)では不十分な結果となる。この場合には、これらの部材端における関係式が同じ形となり、振動数方程式を解くうえで擬特異となる。そこで、この点を解決するために、図-8に示した関係式の結合状態を図-9のように改善する。いま、部材iと部材kとが節点jに接続しているとする

表-1 従来の解法と本解法の比較

		従来の解法		本解法
		振動たわみ角法	動力学的三連モーメント法	直接法
解析上の未知変数		節点変位	不静定力	一般解の積分定数
条件式の適用順序	第1段階	条件-1と条件-2を適用	条件-1と条件-3を適用	条件-2と条件-3を適用
	第2段階	その結果を条件-3へ代入	その結果を条件-2へ代入	条件-1をその結果へ代入

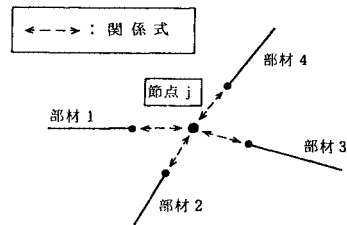


図-8 関係式の結合(1)

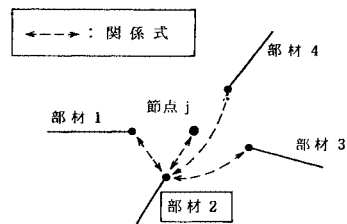


図-9 関係式の結合(2)

ると、これらの2つの関係式の差によって式(31)を次のように変形することができる。

$$\{0\} = [A]_i^{-1} \cdot \{d\}_{i\alpha} + [A]_i^{-1} \cdot [K]_{i\beta}^{-1} \cdot \{V\}_{i\beta} - [A]_k^{-1} \cdot \{d\}_{k\alpha} - [A]_k^{-1} \cdot [K]_{k\beta}^{-1} \cdot \{V\}_{k\beta} \dots \dots \dots (32)$$

式(32)が弾性支点ばねの大きさに無関係に成り立つことは明らかであり、かつ式(31)と式(32)は互いに独立した方程式である。

式(31)または式(32)の関係式をすべての部材について集合すれば、すべての部材端変位と部材端力との関係を次の簡単な形にまとめることができる。

$$\{0\} = [B_\alpha, B_\beta] \cdot \begin{Bmatrix} d \\ V \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (33)$$

ここに、 $\{d\}$ はすべての部材端変位を要素とする部材端変位ベクトル、 $\{V\}$ は同じくすべての部材端力を要素とする部材端力ベクトルを表わす。また、行列 $[B_\alpha]$ 、 $[B_\beta]$ はそれぞれ $\{d\}$ と $\{V\}$ に対応する係数行列であり、その要素は式(31)と式(32)から明らかとなっており、すべての部材の変位変換行列 $[A]_i$ 、および弾性節点ばね行列と弾性支点ばね行列 $[K]_{i\beta}$ 、 $[F]_j$ ($i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, M$)の要素から成る。

一方、自由振動をしている骨組構造物の部材端における応力-ひずみ関係式、式(21)と式(22)をすべての部材について集合すれば、次の簡単な形にまとめることができる。

$$\begin{Bmatrix} d \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_\alpha(\omega_n) \\ H_\beta(\omega_n) \end{Bmatrix} \cdot \{c\} \dots \dots \dots (34)$$

ここに、 $\{c\}$ はすべての積分定数を要素とするベクトルを表わす。行列 $[H_\alpha(\omega_n)]$ 、 $[H_\beta(\omega_n)]$ は $\{c\}$ からそれぞれ $\{d\}$ と $\{V\}$ を与えるところの係数行列であり、その要素は式(21)および式(22)の右辺の係数行列の要素から成る。ただし、行列の各行の順序は、式(21)、(22)の左辺に示す部材端変位と部材端力の順序を式(25)、(26)に示すベクトルの要素の順序に合わせる必要がある。また、 $[H_\alpha(\omega_n)]$ 、 $[H_\beta(\omega_n)]$ の要素の中には式(15)と式(21)、(22)からわかるとおり、固有円振動数 ω_n ($n=1, 2, \dots$)が含まれており、これが振動数方程式の未知変数となる。

そこで、式(33)へ式(34)を代入して部材端変位と部材端力を消去すれば、すべての積分定数を未知変数とする次の連立斉次方程式が得られる。

$$\{0\} = [B_\alpha, B_\beta] \cdot \begin{Bmatrix} H_\alpha(\omega_n) \\ H_\beta(\omega_n) \end{Bmatrix} \cdot \{c\} \dots \dots \dots (35)$$

式(35)の右辺の係数行列を改めて $[E(\omega_n)]$ と表わす。

$$[E(\omega_n)] = [B_\alpha, B_\beta] \cdot \begin{Bmatrix} H_\alpha(\omega_n) \\ H_\beta(\omega_n) \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (36)$$

したがって、式(35)が有意義な解をもつという条件から、次の振動数方程式が得られる。

$$|E(\omega_n)| = 0 \dots \dots \dots (37)$$

ところで、係数行列 $[B_\alpha, B_\beta]$ は骨組モデルの幾何学的条件と、弾性節点、弾性支点を表わすばね定数とによって決定される。一方、 $[H_\alpha(\omega_n), H_\beta(\omega_n)]^T$ は部材の断面諸元、部材長および固有円振動数のみから成り、はり部材の動的条件を表わしている。このように、直接法では部材の適合条件と動的条件とをそれぞれ独立した形で扱うことができる。

(5) 振動モード

式(37)の振動数方程式を解いて固有円振動数 ω_n ($n=1, 2, \dots$)を求め、これを再び式(35)へ代入して各部材の未知変数 c_k^m ($n=1, 2, \dots; k=1, 2, \dots, 12$)について解けば、ある基準値に対する比の形でこれらを求めることができる。さらに、この結果を次の正規化条件を用いて正規化すれば、振動モード $\phi_1^m(x)$ 、 $\phi_2^m(x)$ 、 $\theta_1^m(x)$ が得られたことになる。

$$\sum_{i=1}^N \left[\int_0^l \rho |\phi_1^m(x)|^2 + [\phi_2^m(x)]^2 + [\theta_1^m(x)]^2 + [\theta_2^m(x)]^2 dx \right]_{i_0} = 1 \dots \dots \dots (38)$$

ここに、添字(i)は部材番号を表わす。しかしながら、より実用的に骨組構造物を解析するうえでは、式(38)の正規化条件に換えて各振動次数における振動モードの最大値を1.0に置き、相対的に振動モードを決定する方法が有効であると思われる。また、本解法では ω_n を求めた後直接振動モードを求めることができるが、従来の解法では式(35)に相当する方程式の未知変数が応力や変位であるため、まずこれらについて解きその結果を式(34)へ代入して振動モードを算出する必要がある。

3. 計算例と考察

(1) ばね定数に応じた係数行列の変形

前節に示した解析理論は、弾性節点ばねおよび弾性支点ばねの値が0~+∞の任意の場合において成り立つが、ばね定数の値が0や+∞に近い場合にも数値計算が可能となるように、式(33)の係数行列 $[B_\alpha, B_\beta]$ を変形する。

前記したように、係数行列 $[B_\alpha, B_\beta]$ を組み立てる際に式(24)と式(28)、および式(29)と式(30)のおのおのにおいて、ばね定数の値に応じてどちらかを選択する必要がある。式(31)と式(32)の結果では、代表的に式(24)と式(29)とを用いた場合を示しているが、同様に式(28)と式(30)とを用いた場合の誘導も可能であり、解析理論をたとえば電算プログラム化する場合にはその使い分けを考慮すればよい。しかしながら、プログラムの中で2つの関係式を用意し、個々のばね定数の値に応じてそれらを使い分けるのは煩雑であるため、ここではさらに実用的な計算方法として数値計算によ

て係数行列を変形し、自動的に関係式を使い分ける方法を用いる。

まず、係数行列のプログラム化では、式(31)と式(32)に示した形のみを用いる。これらの関係は弾性節点ばねの値が大きい場合や、弾性支点ばねの値が小さい場合には問題なく成り立つが、その反対に弾性節点ばねの値がゼロに近い弾性支点ばねの値が無限大に近い場合に、それらの値を直接代入すると数値計算のうえでオーバーフローするという問題が生ずる。そこで、ばね定数の値がゼロや無限大に等しいか非常に近い場合に対しては、その近似値としてたとえば 10^{-35} や 10^{+35} をそれぞれに設定する。これらの値は一般には十分に実用的な近似値であり、また上記の係数行列に代入してもこの時点で数値計算上不都合な問題が生ずることはない。

次に、このようにして組み立てられた係数行列の各要素の値は大小さまざまであり、これを解くにあたってオーバーフローや擬特異の問題が生じないように次のように係数行列を変形する。係数行列の各行において、絶対値が最大となる要素で他の要素を規準化するとともに、この要素をピボットにして他の行の要素を消去する。式(33)を非常に簡単に模式化した 3×6 の行列を用いて、以上の手順を示すと次のようになる。

$$\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \end{bmatrix} \begin{cases} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{cases} \dots\dots\dots(39)$$

$$\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{b_{11}}{b_{13}} & \frac{b_{12}}{b_{13}} & 1, \dots \\ b_{21} - b_{23} \times \frac{b_{11}}{b_{13}} & b_{22} - b_{23} \times \frac{b_{12}}{b_{13}} & 0, \dots \\ b_{31} - b_{33} \times \frac{b_{11}}{b_{13}} & b_{32} - b_{33} \times \frac{b_{12}}{b_{13}} & 0, \dots \end{bmatrix} \begin{cases} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{cases} \dots\dots\dots(40)$$

式(39)の係数行列の第1行目では、要素 b_{13} の値が絶対最大値であるとしており、これを用いて第1行目を規準化するとともに他の行を変形している。第2行目以下についても、同様な手順を行う。

このような係数行列の変形では、式(33)が斉次方程式であることを利用している。また、変形の意味するところは式(24)と式(28)、および式(29)と式(30)のおのおのにおける関係式を使い分けているのと同じ結果であり、と同時に係数行列が擬特異とならないようにしている。この方法によれば、容易につり合い条件式を使い分けることができる。また、係数行列 $[B_a, B_v]$ は固有振動数の大きさには関係しないため、振動数方程式

を解くにあたって以上の変形を唯一回行えばよい。

(2) 自由度と行列の大きさの関係

立体骨組構造物の場合には、図-5に示したように4つの代表的な振動を考慮するため、1部材について12個の積分定数が存在する。これに対して、平面骨組構造物で面内振動のみあるいは面外振動のみを考慮する場合には、それぞれ面内あるいは面外の曲げ振動と縦振動あるいはねじれ振動のみを考慮することになるため、1部材について6個の積分定数が存在する。さらに、連続ばりで曲げ振動のみを考慮する場合には、文献5)にもあるように同じく4個となる。これらの積分定数の数は、いずれも部材の両端における変位(水平変位や回転変位)の自由度の数と一致している。したがって、立体骨組構造物の場合の行列 $[B_a, B_v]$ 、 $[H_a(\omega_n), H_v(\omega_n)]^T$ および $[E(\omega_n)]$ の大きさは、それぞれ $12N \times 24N$ 、 $24N \times 12N$ 、および $12N \times 12N$ となる。

(3) 計算例

ここでは、図-10に示す一般的な単純桁の高架橋を対象にして、上部構造と下部構造との節点条件の変化が動的特性に及ぼす影響について調べた。単純桁を3連考え、上部構造と下部構造を一体にした平面骨組モデルを図-11に示す。なお、文献5)の解法では連続ばりの曲げ振動のみを解くことができるが、本解法では図のような立体解析ができ、解析手法の拡張を示している。

主桁と橋脚はそれぞれ等断面部材と仮定し、全橋当たりの平均的な断面諸元を考えた。基礎と地盤による橋脚の支持条件を弾性支点ばねによって表わし、また上部構造と下部構造との間の支承条件を弾性節点ばねによって表わした。図-12(a)に示すように、一般に主桁が中立軸まわりに回転変形をすると、中立軸と支承との間の距離によって支承には水平移動を生ずるが、この移動が支承の摩擦等の理由によって拘束されると主桁端部には

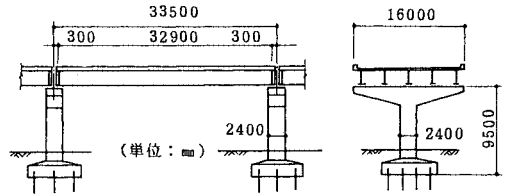


図-10 対象とした高架橋

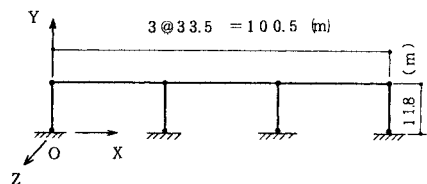


図-11 骨組モデル

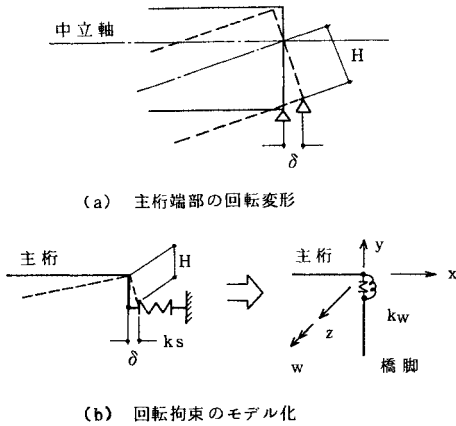


図-12 支承条件のモデル化

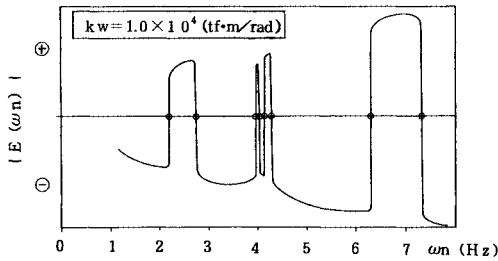


図-13 行列式 $|E(\omega_n)|$ の変化と解の存在

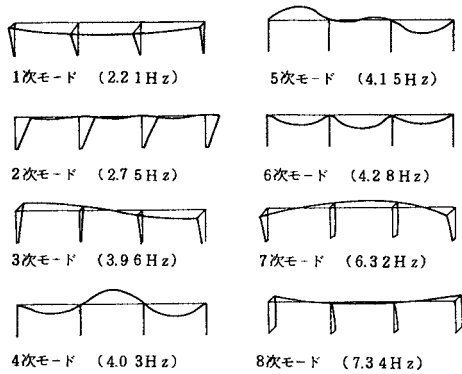


図-14 高架橋の動的解析 ($k_w = 1.0 \times 10^6$)

回転拘束が生ずる。このような回転拘束を、ここでは弾性ばね k_w によって仮定する。

$$k_w = H^2 \times k_s \dots \dots \dots (41)$$

なお、実際の単純桁橋では一般に支承位置と橋脚中心線とは一致していないが、ここでは主桁の部材端と橋脚の部材端とは同一の節点に接続しているとした。

表-2、表-3 にそれぞれ弾性支点ばね定数と弾性節点ばね定数を示し、表-4 に部材の断面諸元を示す。振動数方程式を解くにあたって、ここでははさみ打ち法を用いる。この方法では、適切な初期値とステップ値とを

表-2 弾性支点ばね定数

	単位	ばね定数
f_x	(tf/m)	6.80×10^4
f_y	(\circ)	5.22×10^5
f_z	(\circ)	5.67×10^4
f_u	(tf·m/rad)	5.30×10^6
f_v	(\circ)	1.00×10^7
f_w	(\circ)	3.30×10^6

表-3 弾性節点ばね定数

	単位	ばね定数
k_x	(tf/m)	1.00×10^{35}
k_y	(\circ)	1.00×10^{35}
k_z	(\circ)	1.00×10^{35}
k_u	(tf·m/rad)	1.00×10^{35}
k_v	(\circ)	1.00×10^{35}
k_w	(\circ)	$1.00 \times 10^2 \sim 10^0$

表-4 部材の断面定数

	単位	主桁	橋脚
I_x	(m^4)	1.50	1.00
I_y	(\circ)	1.50	0.50
I_z	(\circ)	0.326	0.50
J	(\circ)	2.00	1.00
A	(m^2)	0.639	0.820
ρ	(t/m)	1.531	3.200
E	(tf/m ²)	2.1×10^7	
G	(\circ)	8.1×10^6	

設定すれば確実に正解を解くことができるが、解をはさむために解の存在範囲を知っておくことは非常に役に立つ。まず、式 (37) の左辺の符号の変化を調べた。 $k_w = 1.0 \times 10^6$ (tf·m/rad) の場合の結果を図-13 に示す。これによれば、解の存在範囲が明らかであり、各振動次数の正解を確実に求めることができる。また、2つの解が接近している場合などでは、この時点で正解をはさむことができないことがあるが、その場合にも $|E(\omega_n)|$ の値の増減の変化をみることによって解の存在を予測することができる。つまり、解が存在する近傍では $|E(\omega_n)|$ の値はゼロに近くなる。

次に、振動数方程式を解いて得た固有振動数と振動モードの例を図-14 を示す。立体解析によってさまざまな振動モードが得られたが、このうち4次振動から6次振動までが主桁の鉛直方向曲げ振動が支配的な振動であり、1次振動と3次振動が橋脚の橋軸直角方向ロッキング振動、また2次振動が同じく橋軸方向ロッキング振動が支配的な振動である。このように、本橋のモデルでは比較的 low order の振動モードにおいて橋脚自身の振動がみられることから、走行荷重による橋梁の動的応答を考え

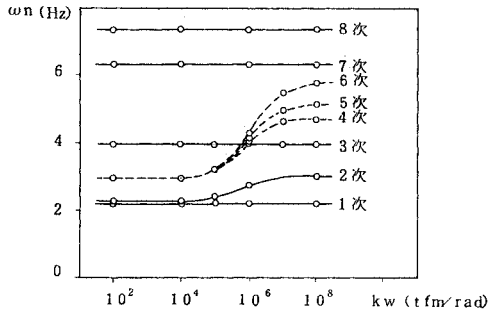


図-15 k_w の変化の影響

る場合などでは主桁の鉛直方向曲げ振動のみでなく、橋脚のロッキング振動にも着目した解析が必要なことを示唆している。しかし、さらに詳細な評価をするには、より正確に橋梁の構造特性を表現する立体骨組モデルによる動的解析が望ましい。

主桁の支承における回転拘束度の大小によって、振動特性がどのように変化するかを調べた結果を図-15に示す。ここでばね定数 k_w は、たとえば鋼製支承がさびや腐食によって移動が拘束されるとき回転拘束度を表わす。しかし、その値を正確に評価するのは必ずしも容易ではなく、実橋における実験等によって求める必要があると思われる。ここでは $k_w = 1.0 \times 10^2 \sim 10^6$ (tf·m/rad) の範囲で任意に変化させたが、ちなみに一般的な形式のゴム支承における設計上の水平せん断抵抗による回転拘束度を調査したところ、本橋のモデルでは全橋当たり $k_w = 1.0 \times 10^4$ (tf·m/rad) 程度であった。図-15の結果によれば、この程度の回転拘束度ならば近似的にヒンジ構造に等しいといえるが、上記した鋼製支承のような場合にはさらに大きな回転拘束度が予測され、たとえば $k_w = 1.0 \times 10^5 \sim 10^6$ (tf·m/rad) 程度であるとすると、主桁の鉛直方向曲げ振動特性に大きな影響のあることを示している。しかしこの場合でも、主桁の鉛直方向曲げ振動以外に対しては、 k_w の影響は小さいことがわかる。

4. ま と め

本研究では、弾性節点・弾性支点を有する骨組構造物の動的解析を目的として実用的な解析法を提案し、簡単な計算例によってその有用性を考察した。得られた成果と今後の展望とをまとめると以下のようである。

(1) 本解法は、部材の振動モードを表わす一般解の積分定数を未知変数に置いて連立斉次方程式を組み立て、任意形状の平面や立体の骨組構造物が弾性節点・弾性支点をもつ場合について、はり部材の曲げ振動のみならずねじれ振動や縦振動を考慮した動的解析ができる。

(2) 本解法は分布質量系による方法であるが、従来

の解法に比べて次のような利点がある。はり部材の応力-ひずみ関係式および節点と部材端との適合条件式をそれぞれ独立の形で扱うことができ、方程式の誘導が簡明である。0～ $+\infty$ の範囲における任意のばね定数に対して、特異解を生ずることなく確実に正解を算出できる。簡単な行列計算によって解析でき、解析手法の汎用的な電算プログラム化に適している。固有振動数を求めた後、直接振動モードを算出することができる。このことから、本解法を直接法と名付けた。

(3) 本解法の適用としては、走行荷重による橋梁の動的応答解析に利用することができると思われる。上部構造と下部構造を一体化した骨組モデルによる計算例では、主桁の曲げ振動のみならず橋脚のロッキング振動にも注目すべきことが指摘できた。また、支承の水平移動が拘束された場合の動的特性の変化を調べたところ、支承条件によっては大きな影響があることが示された。

(4) しかしながら、本解法で立体解析をする場合には1部材につき12個の未知変数が存在するため、比較的大型構造物になると大きな行列の計算が必要となる。この点で計算機の制約や演算時間の問題が考えられ、たとえば、本研究では考慮していないが、係数行列がバンド行列となることを利用して上記の点を改善する必要があると思われる。

参 考 文 献

- 1) 小堀為雄・近田康夫・平井明成：不完全剛結節点を有する立体骨組構造物の解析，金沢大学工学部紀要，Vol. 17, No. 2, 1984年10月。
- 2) 阪神高速道路公団・総合技術コンサルタント：振動解析モデルによる防振効果の検討報告書，昭和57年3月。
- 3) 平井一男：結合法による弾性支承を有する連続ばりの動的解析，土木学会論文集，第104号，1964年4月。
- 4) 小堀為雄・森本千秋：不完全な剛結部を有する構造物の振動性状について，土木学会論文報告集，第186号，1971年12月。
- 5) 小堀為雄・久保雅邦：弾性節点・弾性支点を有する連続桁橋の汎用的な動的解析法，土木学会論文集，第356号／I-3, 1985年4月。
- 6) 小坪清真：土木振動学，pp. 199～202，森北出版，1974年1月。
- 7) 建築学大系19（建築耐震論），pp. 118～130，彰国社，1974年4月。
- 8) 岡本舜三：建設技術者のための振動学，pp. 119～128，オーム社，1967年5月。
- 9) 小堀為雄：応用土木振動学，pp. 29～75，森北出版，1974年4月。
- 10) R. K. リプスレイ，山田・川井（訳）：マトリクス構造解析入門，pp. 8～11，培風館，1968年9月。

(1985. 10. 7・受付)