

亀裂をもつ板の曲げ問題の解析に適した特異関数

SINGULAR FUNCTION APPROPRIATE FOR ANALYSIS OF BENDING PROBLEMS OF PLATES WITH CRACKS

堀 晃芳*・段 樹金**・中川 建治***

By Akiyoshi HORI, Shujin DUAN and Kenji NAKAGAWA

In this paper two kinds of singular functions are derived to analyze bending problems of plates with cracks. Assume that an infinite thin elastic plate lies on the xy plane and that the plate contains a crack of length $2a$ along the y -axis and are loaded on the crack surfaces only. One of the singular functions $W_1(x, y, a)$ is a deflection function in which the slope dW/dx is discontinuous on the crack opening line $(-a, a)$ and deflection, bending moments and shearing forces are continuous. Another is the deflection $W_2(x, y, a)$ of the plate which is discontinuous only on the crack opening. Substituting arbitrary values a_j into a of the singular functions and superposing these functions, practical cracks in the plate are realized.

Keywords: crack, singular solution, numerical analysis

1. まえがき

構造物に生じる亀裂周辺の応力集中を解析して安全性の検討を行うことは構造解析の重要なテーマの1つである。亀裂周辺の応力解析の研究は Griffith¹⁾ に始まり、Westergaard²⁾, Irwin³⁾, Dugdale⁴⁾, Rice⁵⁾ 等によって二次元問題としての理論的研究の基礎が樹立された。理論的な研究に限っても多くの成果が報告されているが¹³⁾⁻¹⁵⁾, 二次元問題の亀裂のモード I (亀裂に直角方向に引張り力を受ける場合) の応力集中の代表的なものは、図-1 に示すものであろう。Westergaard による応力分布²⁾ は数学的には簡便であるが亀裂先端で無限大の応力が生じるものである。これに基づいて Irwin³⁾ によって応力拡大係数 K という安全性の指標が提案されて、応力が無限大になる不合理さをそのまま不問にしても意義の高いこの K 値が多くの実験的研究において活用されている。

応力集中が無限大になるという特異性を解消して応力分布が σ_{yd} で打ち切られた状態の解を Dugdale⁴⁾ が導い

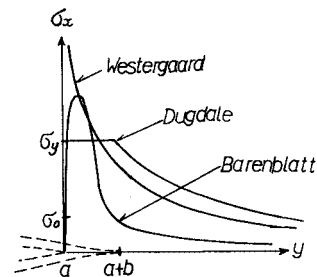


図-1 従来の弾性解による応力集中

た。

Dugdale の解は亀裂先端に生じる塑性状態の応力分布に対応した有意義な解であるから多くの研究において引用されていて、結局ほとんどの研究は図-1 に示すような Westergaard の解と Dugdale の解に属するものとなっている。他方 Barenblatt⁶⁾ は亀裂先端部分の変形と応力分布について非常に興味ある見解を公表している。すなわち、亀裂先端部分の開口は滑らかに閉じ合っていて応力集中は有限である。その閉じ合せ部分の応力度はヤング率に相当する大きな応力であるが領域は非常に狭く、その応力分布の形状は作用外力によるものではなく、材料の物理的特性に依存したものとなっていると仮定するのである。しかしこの有用な見解にもかかわらず具体

* 正会員 工修 中日本建設コンサルタント(株)

** 正会員 華北水利水電学院教師 中国河北省邯郸市(旧岐阜大学研修生)

*** 正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科
(〒501-11 岐阜市柳戸 1-1)

的な応力分布の決め手が示されていないのが残念である。応力分布の具体的な形状を追求する代わりにエネルギー解放率 J という考え方を Rice⁵⁾ が提案しているが実験的研究とともに大いに発展させられている。

本研究は亀裂先端の応力集中に対する扱い方を改変して、Barenblatt^{6), 15)} の考え方に添って開口変位が滑らかに閉じ合うという方式の応力解析法の1つを提示するものである。次のような特性をもって構成されている。

(1) 対象とするものは、直線状の亀裂を含む板が面外力によって曲げを受けるものとする。面内力の影響は考慮しない(面内力の場合については稿を改める)。

(2) 板は亀裂部分も含めて弾性体であるとする。

(3) 亀裂は断面力が解放された部分(曲げモーメントと換算せん断力が0の部分)と、その先端部分で断面力も開口変形も共存する部分(本文では遷移区間と仮称する)より構成されるものとする。遷移区間では断面力は有限な勾配で滑らかに立ち上がり、有限な値となる。

(4) このような状態を実現させるために特異曲面 I (要素亀裂曲面 I) $W_1(x, y, a)$ と特異曲面 II (要素亀裂曲面 II) $W_2(x, y, a)$ という重調和関数を定義して実際の亀裂を近似的に表現する。境界条件は選点法や最少二乗法、あるいは著者の1人が提示した群荷重法を活用する¹⁷⁾。

(5) 有限な応力集中と開口変位が共存する部分が形成されることは数学的には複素数の対数分岐の特性によるもので、Dugdale の解もこの一例である。代数的分岐を仮定すると従来より最も広く活用されている Westergaard の解となる。

亀裂を含む平板の曲げの問題に関しては、能町⁷⁾、長谷部^{9), 10)}、Williams⁸⁾、Folias¹¹⁾、Boduroglu¹²⁾ 等の研究が見受けられる。それぞれ完結した解であるが亀裂先端で応力集中が無限大になる Westergaard の解に所属するものである。本研究では応力勾配が直立することが予測されるような金属材料系のような材質中の亀裂ではなく、土木工学で主体となっている鉄筋コンクリート系材料のように緩やかに応力勾配も開口変位も生じる場合を想定した近似解法を目的としている。

2. 基本的な特異曲面

Pucher¹⁶⁾ は板の曲げたわみの問題で断面力の影響線を求めるために関数の特異点の特性を積極的に活用する方法を提案した。本研究では平板の亀裂部分に面外力によって生成される開口形状を表現するために関数の特異点とそれに伴う分岐の現象を用いるので特異曲面という用語を用いる。

以下において2変数 x, y に関する関数を定義するが、表現を簡素化するために左辺の関数名は積分のこと

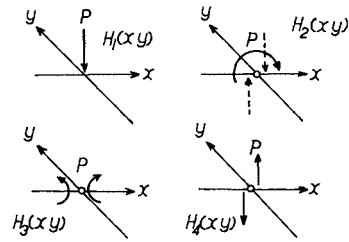


図-2 基本的な曲面

を配慮して x, y 系で定義して、右辺は複素数 z, \bar{z} 系で表わすので注意されたい。

xy 平面上に広がる薄い平板に図-2 に示すような集中外力をそれぞれ作用させる場合のたわみ曲面の非斉次解の項は、板剛度を D とすると次のようになる。

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy \dots \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 H_1(x, y) &= P \delta(x) \delta(y) \\ \nabla^2 \nabla^2 H_j(x, y) &= 0 \quad (j=2, 3, 4) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} H_1(x, y) &= R_a [Cz \bar{z} \ln z] \\ H_2(x, y) &= -2C \cdot R_a [\bar{z} + 2x \ln z] \\ H_3(x, y) &= 2C \cdot R_a \left[2 + \frac{\bar{z}}{z} + 2 \ln z \right] \\ H_4(x, y) &= 2C \cdot R_a \left[\frac{\bar{z}}{z^2} - \frac{3}{z} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

$$C = P/8\pi D \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 $H_2(x, y)$ は集中モーメントによるものであり、図-2 より推定し得るように $H_1(x, y)$ を x で微分したものに相当する。 $H_3(x, y), H_4(x, y)$ も同図よりわかるように逐次 x で微分することによって構成される曲面である。 $H_3(x, y)$ と $H_4(x, y)$ は原点にピンホールが存在していて、そこへ集中力が図のように作用しているものと解釈される。

3. 特異曲面 I (要素亀裂曲面 I)

(1) 開口形状の仮定

xy 平面上に広がる無限板の y 軸上の区間 $|y| \leq a$ のみ直線状の亀裂があって、図-3 に示すようにたわみ

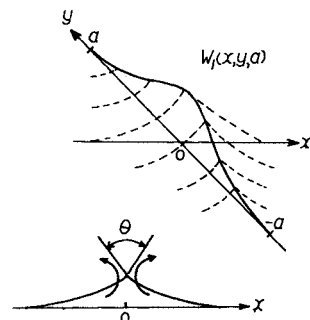


図-3 要素亀裂曲面 I, $W_1(x, y, a)$

はすべて連続であり、回転角が亀裂区間で不連続で $\rho_1(y)$ となるように亀裂部分に外力モーメントが分布しているものとする。 y 軸上の $|y| \leq a$ で

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} \Big|_{x=+0} - \frac{\partial W_1}{\partial x} \Big|_{x=-0} = \theta(y) \propto \rho_1(y) \dots\dots\dots (5)$$

$$\rho_1(y) = 2|y^3| - 3ay^2 + a^3 \dots\dots\dots (6)$$

y 軸上の $|y| > a$ では $\partial W_1 / \partial x = 0$,
 $x, y \rightarrow \infty$ では $W_1 \rightarrow 0$

という条件を満足するたわみ曲面を特異曲面 I (要素亀裂曲面 I) と名づける。 $\rho_1(y)$ は $y = \pm a$ で 2 位の 0 点であって滑らかな開口形状を形成するので、この点近傍で生じる断面力 (集中応力) は有限値となる。

(2) 不連続なたわみ角を与える曲面 F_1

回転角の不連続性 $\rho_1(y)$ を与える曲面を求めるには

$$F_1(x, y, a) = R_e \left[\int_{y-a}^{y+a} H_3(x, \eta) \rho_1(\eta - y) d\eta \right] \\ = R_e [\bar{z} \varphi_1(z) + \psi_1(z)] \dots\dots\dots (7)$$

とすればよい。演算過程を省いて結果を示すと次のようになる。

$$\varphi_1(z) = 2C \{ 4z^3 \ln z - 2z^3 \ln(z_\rho z_m) - 2a^2 z \\ + ia(3z^2 + a^2) \ln(z_m/z_\rho) \} \\ \psi_1(z) = 2C \{ 6z^4 \ln z - (3z^4 - a^4) \ln(z_\rho z_m) \\ - 7a^2 z^2 + ia(5z^2 + 3a^2)z \ln(z_m/z_\rho) \} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} z_\rho &= z + ia \\ z_m &= z - ia \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに得られた $F_1(x, y, a)$ による y 軸上のたわみ角は目的とする $\rho_1(y)$ に比例するが、開口部の両側に沿って換算せん断力 (同方向) $R_{x1}(y)$ が現われる。

$$|y| \leq a, x \rightarrow \pm 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} = 8\pi C \rho_1(y) \text{sign}(x) \dots\dots\dots (10)$$

$$R_{x1}(y) = -48\pi \nu DC(2|y| - a) \text{sign}(x) \dots\dots\dots (11)$$

(3) $R_{x1}(y)$ を打ち消す曲面 F_2

$F_1(x, y, a)$ による $R_{x1}(y)$ は $x \rightarrow \pm 0$ で符号を変えるので y 軸上の $|y| \leq a$ に $2R_{x1}(y)$ という線荷重が作用していることになる。これを打ち消すには亀裂をもたない無限板に $2R_{x1}(y)$ という線荷重が作用している場合のたわみ $F_2(x, y, a)$ を導いて差し引けばよい。すなわち、 $H_3(x, y)$ と $R_{x1}(y)$ との合成積を導けばよい。

$$F_2(x, y, a) = -R_e \left[\int_{y-a}^{y+a} H_3(x, \eta) R_{x1}(\eta - y) d\eta \right] \\ = R_e [\bar{z} \varphi_2(z) + \psi_2(z)] \dots\dots\dots (12)$$

$$\varphi_2(z) = \frac{-C}{3} \{ 4z^3 \ln z - z_m^2(z + z_\rho) \ln z_m \\ - z_m^2(z + z_m) \ln z_\rho - 4a^2 z \} \\ \psi_2(z) = \frac{-C}{3} \{ 2z^4 \ln z - z_m^2(z^2 + ia z - a^2) \ln z_m \\ - z_\rho^2(z^2 - ia z - a^2) \ln z_\rho - a^2 z^2 \} \dots\dots\dots (13)$$

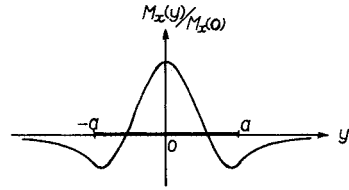


図-4 $W_1(x, y, a)$ による y 軸上の曲げモーメント $M_x(y)$

この F_2 による亀裂部分の換算せん断力 $R_{x2}(y)$ は $R_{x2}(y) = -8\pi DC(2|y| - a) \text{sign}(x) \dots\dots\dots (14)$ となり、 $|y| \geq a$ では $R_{x2}(y) = 0$ となる。

(4) 特異曲面 I (要素亀裂曲面 I) $W_1(x, y, a)$

xy 平面上に広がり、 y 軸上の $|y| \leq a$ において亀裂があってこの開口部分で分布外力モーメントを受けている無限平板を想定する。たわみは全平面で連続であって、たわみ角は亀裂部分でのみ不連続で $\partial W_1 / \partial x \propto \rho_1(y)$ となっているものとする。このような板のたわみ曲面 $W_1(x, y, a)$ は $F_1(x, y, a)$ と $F_2(x, y, a)$ より次のように得られる。これは y 軸上の換算せん断力を消去したものである。

$$W_1(x, y, a) = F_1(x, y, a) - 6\nu F_2(x, y, a) \dots\dots\dots (15)$$

この $W_2(x, y, a)$ による y 軸に沿う曲げモーメント $M_x(y)$ を求めると図-4 のようになる。区間 $|y| < a$ では外力として亀裂断面に作用するモーメントであり、 $|y| > a$ では板の内部の曲げモーメントとなる。 F_1, F_2 における対数項のみが開口形状を生成する関数であり、代数項は $xy \rightarrow \infty$ で $W_1 \rightarrow 0$ となるための役目をもっている。したがって有限な板の亀裂を解析するには対数項のみを活用して、他の重調和関数とともに選点法で境界条件を満足させることも許されるのである。

4. 特異曲面 II (要素亀裂曲面 II)

無限平板が y 軸上の亀裂部分 $|y| < a$ でせん断方向外力を受けて z 方向にくい違う (モード III) 不連続たわみを図-5 のように生じている場合を特異曲面 II (要素亀裂曲面 II), $W_2(x, y, a)$ として導く。

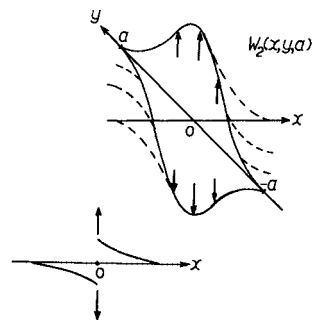


図-5 要素亀裂曲面 II $W_2(x, y, a)$

(1) 開口変位

亀裂部分の±z 方向への開口は $|y| \geq a$ では0, $|y| < a$ では $x \rightarrow \pm 0$ で

$$W_2(+0, y, a) - W_2(-0, y, a) \propto \rho_2(y) \dots\dots\dots(16)$$

$$\rho_2(y) = (y^2 - a^2)^4 \dots\dots\dots(17)$$

とする。 $\rho_2(y)$ はなるべく低次の代数式の方が好ましいが $(y^2 - a^2)^3$ とするとせん断力が $y = \pm a$ で特異点となって発散するので不都合である。ここでたわみ角はすべて連続であるとする。

(2) 開口変位を与える曲面 $F_3(x, y, a)$

たわみ曲面 $F_3(x, y, a)$ を導く手法は特異曲面 I の場合と同様である。すなわち基本曲面 $H_2(x, y)$ と $\rho_2(y)$ との合成積をとる。

$$F_3(x, y, a) = R_e \left[\int_{y-a}^{y+a} H_2(x, \eta) \rho_2(\eta - y) d\eta \right] \\ = R_e [\bar{z} \varphi_3(z) + \psi_3(z)] \dots\dots\dots(18)$$

$$\varphi_3(z) = 2C \left\{ iz z_\rho^3 z_m^3 \ln(z_\rho/z_m) \right. \\ \left. + 2a \left(z^6 + \frac{8}{3} z^4 a^2 + \frac{11}{5} z^2 a^4 + \frac{16}{35} a^6 \right) \right\} \\ \psi_3(z) = C \left\{ i(3z^2 + a^2) z_\rho^3 z_m^3 \ln(z_\rho/z_m) \right. \\ \left. + \left(6z^6 + 18z^4 a^2 + \frac{278}{15} z^2 a^4 + \frac{50}{7} a^6 \right) az \right\} \\ \dots\dots\dots(19)$$

$F_3(x, y, a)$ による y 軸上 $|y| \leq a$ における不連続なたわみ (開口変位) は

$$F_3(+0, y, a) - F_3(-0, y, a) = 4\pi C \rho_2(y) \dots\dots\dots(20)$$

となり予定どおりであるが、亀裂に沿って次のような曲げモーメント $M_{x1}(y)$ が生じる。

$$M_{x1}(y) = 8\pi C(2-\nu)(7y^2 - a^2)(y^2 - a^2) \text{sign}(x) \\ \dots\dots\dots(21)$$

(3) 開口部の $M_x(y)$ を打ち消す曲面 F_4

亀裂を含まない無限板の y 軸上 $|y| \leq a$ に外力モーメント $2M_{x1}(y)$ が作用している場合のたわみ曲面を求めて F_3 による $M_{x1}(y)$ を打ち消す。すなわち $H_2(x, y)$ と $M_{x1}(y)$ との合成積を求めよう。

$$F_4(x, y, a) = R_e \left[\int_{y-a}^{y+a} H_2(x, \eta) M_{x1}(\eta - y) d\eta \right] \\ = R_e [\bar{z} \varphi_4(z) + \psi_4(z)] \dots\dots\dots(22)$$

$$\varphi_4(z) = -C \left\{ \frac{i}{3} z z_\rho^3 z_m^3 \ln(z_\rho/z_m) \right. \\ \left. + a \left(\frac{2}{3} z^6 + \frac{16}{9} z^4 a^2 + \frac{22}{15} a^4 z^2 + \frac{32}{105} a^6 \right) \right\} \\ \psi_4(z) = -C \left\{ \frac{i}{3} z^2 z_\rho^3 z_m^3 \ln(z_\rho/z_m) \right. \\ \left. + az \left(\frac{2}{3} z^6 + \frac{16}{9} a^2 z^4 + \frac{22}{15} a^4 z^2 + \frac{32}{105} a^6 \right) \right\} \\ \dots\dots\dots(23)$$

$F_4(x, y, a)$ による y 軸上の曲げモーメント $M_{x2}(y)$ は

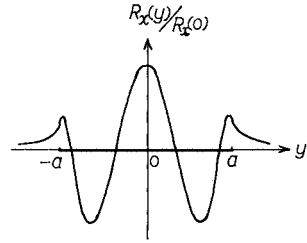


図-6 $W_2(x, y, a)$ による y 軸上の $R_x(y)$

次のようになる。

$$M_{x2}(y) = -\frac{4}{3} C \pi (7y^2 - a^2)(y^2 - a^2) \text{sign}(x) \dots\dots(24)$$

(4) 特異曲面 II (要素亀裂曲面 II) $W_2(x, y, a)$

xy 平面に広がり、 y 軸上の亀裂部分でせん断方向外力のみを受けて $\rho_2(y)$ に比例する不連続変位を生成している無限板のたわみ曲面 (特異曲面 II) は、 F_3 と F_4 より $M_{x1}(y)$ を消去して得られる。

$$W_2(x, y, a) = F_3(x, y, a) + 6(2-\nu)F_4(x, y, a) \dots\dots(25)$$

y 軸上の曲げモーメントは 0 となり、換算せん断力 $R_x(y)$ の分布は図-6 のようになる。

5. 亀裂をもつ板の解析方法

特異曲面 I と II は亀裂部分に不連続な変形をもつが開口部分の断面力を 0 にしたのではないので単独で用いることはできない。実際に直線状の亀裂を数本もつ板の曲げ問題を解く場合に本文中で導いた特異曲面を活用する方法を次のように提案したい。

(1) 面外力 $p(x, y)$ に対する板の曲げたわみの非同次項 $w_s(x, y)$, $\nabla^2 \nabla^2 w_s(x, y) = p(x, y)/D$ を導く。境界条件は考慮しなくてもよい。

(2) 特異曲面 I の開口長さ $2a$ を種々の長さに変化させて、曲面の平行移動と座標回転を適宜行って、実際の亀裂を特異曲面の開口部で何重にも覆う。それぞれの要素亀裂曲面に未定係数 u_j を乗じて ($j=1 \sim m$)

$$\sum W_{1j}(\xi - \xi_j, \eta - \eta_j, a_j) \cdot u_j$$

の群で覆うのである。

(3) 実際の亀裂で曲げモーメントのみならず換算せん断力も消去 (開放) することが必要なら特異曲面 II も同様にして活用する。未定係数を v_j ($j=1 \sim n$) とすると $\sum W_{2j}(\xi - \xi_j, \eta - \eta_j, a_j) v_j$ の群で実際の亀裂線を要素亀裂の線で覆うのである。

(4) 周辺の境界条件 (たとえば単純支持や固定辺) を満足させるために必要ならば、亀裂には無関係の任意の重調和解 $\nabla^2 \nabla^2 F_k(x, y) = 0$ を未定係数 λ_j を乗じつつ重ね合わせる。 $\sum F_j(x, y) \lambda_j$, ($j=1 \sim k$)

(5) すなわちたわみ曲面の解 $F(x, y)$ として、

$$F(x, y) = w_s + \sum_{j=1}^m W_{1j} \cdot u_j + \sum_{j=1}^n W_{2j} v_j + \sum_{j=1}^k F_j \lambda_j \dots\dots(26)$$

を定義して、亀裂部分の断面力に対する条件と周辺の境界条件とを選点法、あるいは最小二乗法的手法で満足させるのである。これらの条件より未定係数 $u_j \sim \lambda_j$ が定められる。

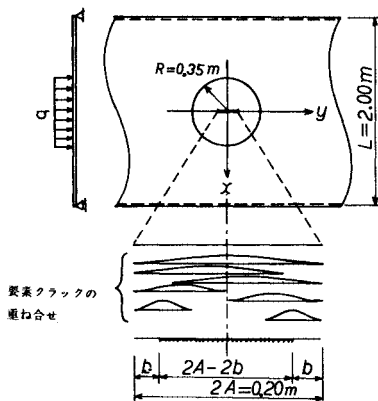
(6) 実際の亀裂先端部分は塑性域が生じるので曲げモーメントはその部分で塑性モーメント M_p になるように条件を付けるのである。したがってこの部分は解析上では開口しているものとして要素亀裂で覆う。

(7) 外力が増加して亀裂先端部分の曲げモーメントが大きくなって板の表面に σ_{yd} が生じ始めても中立面近傍はまだ弾性域である。したがって曲げによる降伏では亀裂部分の断面力は0の部分から滑らかに M_p へ至るのが一般的であり、二次元の引張り問題の応力集中における Dugdale の解 (図一1) のように断面力が0から M_p へ直立して変化することは不自然である。このように変形が大きくなるとともに断面力が0より M_p へ滑らかに増加する状態を表わすには、この部分を特異曲面群の亀裂線で覆いつつ断面力の拘束はこの部分では行わずに放置する手段も考えられる。あらかじめ拘束条件を付けて増加形状を指定することも可能である。

(8) 開口部分の断面力を0とする代わりに一定値 M_p あるいはせん断力も一定 R_p と拘束して解くと、亀裂の解析というよりは板の塑性解析に相当して亀裂線は降伏線ということになる。この場合のたわみ角の開き θ は塑性ヒンジの回転角とみなされよう。

6. 計算例

本研究の特異関数の曲面ⅠとⅡが亀裂をもつ平板の解析に対してどのような例に適用し得るかの一例を示す。ここに示す例以外にもすでに著者らによって公表されたものもあるが^{18), 19)}、要素亀裂線と実際の亀裂線との重ね方で開口部分の断面力の閉じ合せ誤差が著しく変化するので、良好な例2題を示し最後に亀裂の重ね方の可否を



図一7 相対2辺単純支持の帯板と1本の亀裂

検討するために使用した例を示す。

(1) 計算例-1 相対2辺単純支持の帯板

図一7に示すようなスパン $L=2.0\text{ m}$ の相対2辺が単純支持された無限帯板のスパン中央部分に支持辺に平行で長さ $2A=0.2\text{ m}$ の亀裂があるものを対象にする。荷重は半径 $R=0.35\text{ m}$ の円形領域に等分布するもの q とする。

長さ $2A=0.2\text{ m}$ の亀裂を図一7に示すように要素亀裂曲面Ⅰの開口長さ $2a$ をそれぞれ変化させたもの7組で覆うことにする。対称性より亀裂部分にはせん断力が生じないので要素亀裂Ⅱを用いる必要はない。したがって、簡略化して表現してある式 (26) の未定係数は $u_1 \sim u_7$ まで7個となる。

要素亀裂の先端が実際の亀裂線の先端で重なり合うようにしてあるが、これは開口部の断面力の閉じ合せ誤差を小さくするために工夫した結果に基づいたものである。

円形等分布荷重 q に対する非同時解 (式 (26) の w_s) は著者の1人が群荷重法の研究で併せて導いて文献17) に示してあるものを引用するが、

円内 $r \leq R$ では

$$w_{s1}(x, y, R) = \frac{qr^4}{64D}$$

円外 $R < r$ では

$$w_{s2}(x, y, R) = \frac{qR^4}{64D} \left\{ 5 + 4 \ln \left(\frac{r}{R} \right) - \frac{4r^2}{R^2} + 4 \frac{r^2}{R^2} \ln \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \dots \dots \dots (27)$$

となる。単純支持辺の条件を満足させるためには他の重調和解 $F_j(xy)$ を重ねることが必要であるが、この代わりに亀裂曲面も円形荷重の非同次解も1体として前述の文献17) の群荷重法を適用して支持辺の条件を満足させる。

単純支持された無限帯板のたわみ曲面を導くには群荷重法が最適であり、文献17) には式 (27) も併せて詳しく述べてあるので本文での記述は割愛して結果のみを示す。6群1組の群荷重その1方式で7群重ね合わせる方式を採用する。このようにして単純支持辺の条件は満足されて未定係数はそのまま $u_1 \sim u_7$ のみとなる。

亀裂線上の曲げモーメントを0にする条件は、区間 $2l=2(A-b)$ の部分についてはこの部分を30等分割する点の曲げモーメントの二乗和を最小化する条件を採用した。これは $u_1 \sim u_7$ に対応して7個の点のみで $M_x(y_i) = 0$ とする選点法に比べて閉じ合せ誤差をより小さくするには有効である。

亀裂の両端部分の区間長 b の部分に対しては、曲げモーメントをあらかじめ所定の値になるように上記の最

小二乗法的な手法で条件を付けることは簡単である。その条件式の数だけ多くの要素亀裂曲面を重ね合わせるのである。しかしこの区間の断面力には何の条件も付けずに放置して生じる変位と断面力をみる方が興味深い。図-8は区間 b には条件を付けずに $u_1 \sim u_7$ を定めて y 軸上の $M_x(y)$ を描いたものである。亀裂が存在しない場合の荷重中心直下の曲げモーメント M_0 で無次元化しており、次のような点が注目される。

1° 区間長 b が短くなると曲げモーメントの集中量はほぼ $\sqrt{A/b}$ に比例して増加する。

2° 曲げモーメントの最大値は亀裂の先端でなく区間 b の内部で生じる。これは次のようにしてうまく板の塑性曲げと符合して興味ある現象となる。先端ではちょうど板の表面近傍応力が σ_{yd} となる降伏モーメント M_y であり、曲げ応力が完全塑性分布となり曲げモーメントが M_p になるのは開口回転角が大きくなる区間 b の中間部である。この点が曲げモーメントが最大となる点でそれより内側は本当に破断が始まるのである。

3° 曲げモーメント 0 になるべき区間 $2(A-b)$ で等間隔点の曲げモーメント二乗和を最小化する方式では閉じ合せ誤差は 3.0% 以下となった。

(2) 計算例-2 周辺単純支持板と放射状亀裂

数本の亀裂が放射状に交差する部分へ載荷する場合にはくさび状の板の根元（亀裂の先端近傍）には曲げモーメントが集中して、中心へ向かって板の曲率が反対となって亀裂をもたない板に比べて反り返る状態が現われ

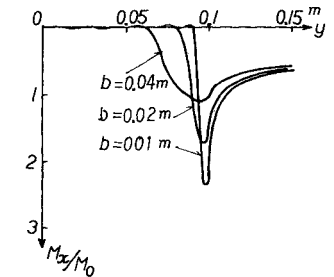


図-8 y 軸上の曲げモーメント $M_x(y)$

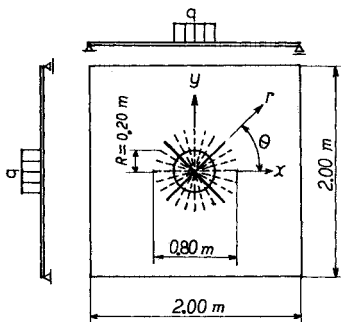


図-9 放射状亀裂をもつ周辺単純支持板

るはずである。本解析法では亀裂の相互の干渉効果を照査することも容易である¹⁹⁾ことを示す一例として図-9に示すようなスパン 2 m の正方形の単純支持板を対象とする。荷重は中央に半径 $R=0.2$ m の円形領域に等分布 q するものとする。亀裂は $2A=0.8$ m のものが対角線方向に 2 本（図-9の中の実線）のみが存在するものを B として、 15° ずつ合計 12 本の亀裂が存在するもの（同図中の点線も含む）を A の場合とする。比較のために亀裂を含まない正方形板の解を C と表わし、曲げモーメントもたわみもこの板の中央点の値 M_0, W_0 で無次元化して図化している。

円形荷重の非同次解、1本の亀裂を7本の要素亀裂曲面で覆う方式、周辺の単純支持辺の境界条件を群荷重方式で満足させて余計な重調和関数 F_j, λ_j を設けないこと等はすべて計算例-1と同様なものとする。周辺単純支持であるから群荷重方式を x 方向と同様に y 方向にも適用している。亀裂部分ではせん断力は 100% 伝達可能とみなして要素亀裂曲面 II は活用していない。

亀裂先端の遷移区間長 $b=0.1$ m として、各亀裂の曲げモーメント開放区間 (0.6 m) は 30 等分する点で二乗和最小とするように条件付けたのも計算例-1と同様である。要素亀裂を多くすると断面解放部分の閉じ合せ

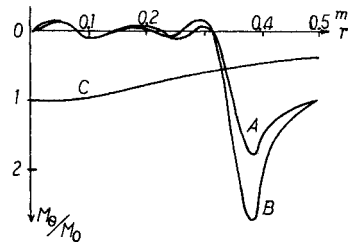
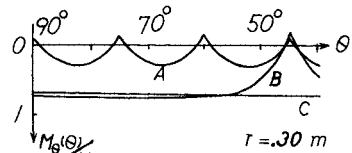
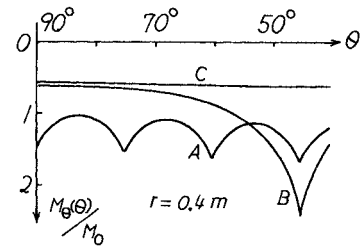


図-10 対角線上の亀裂に沿う M_0



(a) $r=0.3$ m



(b) $r=0.4$ m

図-11 円周に沿う M_0

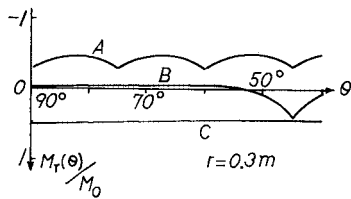
誤差は小さくなることは自明であるから、亀裂が交差していることによって生じる誤差を検討するために1本の亀裂を7本の要素亀裂で覆う方式をそのまま採用している。このために図-10のように大きな閉じ合せ誤差が生じていることがわかる。亀裂先端近傍 $r=0.4\text{ m}$ の曲げモーメント M_θ はAの方が小さいのは、亀裂が多いために力が分散していることを示している。

図-11(a) は、 $r=0.3\text{ m}$ の円周に沿う $M_\theta(\theta)$ を示している。図-10でわかるように $r=0.3\text{ m}$ では閉じ合せ誤差の大きい部分であるからAの場合は 15° 間隔で M_θ が0になるべきであるにもかかわらず誤差があって0とはなっていない。Bの場合も亀裂部分では0より外れている。

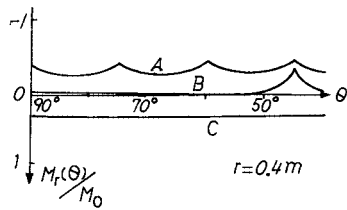
Bの場合は亀裂から離れると M_θ はCの場合に近づくことは興味を引く。

図-11(b) は $r=0.4\text{ m}$ の円周上で亀裂先端部分の $M_\theta(\theta)$ であり、大きな値である。 $r=0.3$ の場合に比べて曲線の曲率が反対になっているのは亀裂部分の応力集中によるものである。

図-12(a) と図-12(b) とは $r=0.3\text{ m}$ と $r=0.4\text{ m}$ の円周に沿う $M_r(\theta)$ である。亀裂のないCの場合と反対符号になっている点に注目されたい。くさび状の板が上側引張りとなって下方へ垂れ下がっていることを示している。



(a) $r=0.3\text{ m}$



(b) $r=0.4\text{ m}$

図-12 円周に沿う $M_r(\theta)$

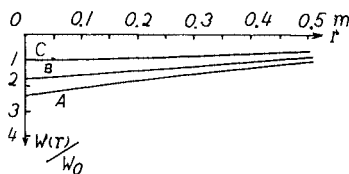


図-13 中央線 y 軸に沿うたわみ

図-13 は中央断面のたわみであり、Aは明らかに下方へ突き出ていることが判明する。この場合はせん断力は100% 伝達するとしているので極端には下がらない。

(3) 計算例-3 要素亀裂の重ね方について

亀裂の開口部分における閉じ合せ誤差のあまり好ましくない例を示すことは本解析方法を活用する場合には有用な情報であろう。

計算例-1 で対象とした図-7 に示す無限帯板における y 軸上の亀裂部分の $M_x=0$ の条件の乱れ方について次のような検討を行った。板の大きさ、荷重の大きさ、亀裂の長さは図-7 に示したものと全く同じものとして、亀裂部分を要素亀裂を9個重ね合わせて表現することにする。重ね方は図-14 の下段に示すようにA, B, Cの3通りを設定する。Aは長さの等しい $2a=0.02\text{ m}$ の要素亀裂9個を、亀裂の半分の長さ a ずつ重ねるように等間隔に配置する。Bは両端に $2a=0.08\text{ m}$ の要素亀裂を置き内部に $2a=0.06\text{ m}$ のもの7個を等間隔 (0.015 m) に配置する。Cは $2a=0.08\text{ m} \sim 2a=0.11\text{ m}$ のものを不等間隔に配置したものである。

開口部の応力度を0 ($M_x=0$) とする条件として9個の要素亀裂のそれぞれの中心点の $M_x=0$ を採る選点法を用いて、その開口線 (y 軸) 上の M_x の分布の様子を図-14 に示す。Bの場合の最大曲げモーメントで正規化して、下を向く応力集中の図は見苦しいので上向きを正として図-14 を描いている。A, B, Cの場合それぞれで要素亀裂の中心点で $M_x=0$ としているので最外側の要素亀裂の半分の長さが遷移区間に相当する。Aでは $b=0.02\text{ m}$, Bでは $b=0.04\text{ m}$, Cでは $b=0.04\text{ m}$ となるので最大曲げモーメントが異なるのは当然である。多くの解析例をまとめると、要素亀裂の重なり方が重複す

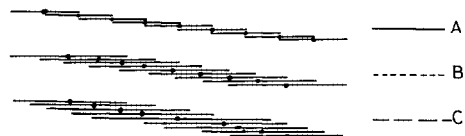
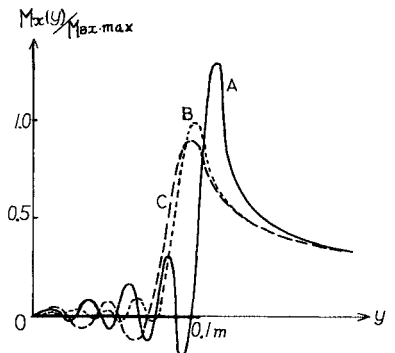


図-14 選点法による閉じ合せ誤差

るほど、いろいろな長さの要素が混在するほど閉じ合せ誤差が小さくなるように思われる。さらに亀裂先端部分は長さの異なる要素亀裂の先端を重ねるのがよい結果を与える。図-14の結果によるとAの重ね方ではほとんど役立つ結果であることがわかる。BとCでは、計算例-1の図-8に比べて要素数が多いにもかかわらず大きな誤差がみられる。これは選点法の限界であろう。計算例-1では $M_x=0$ の区間を30等分する点で M_x の二乗和を採って最小化する最小二乗法的方法を採用しているために図-8のように非常に好ましい状態が得られたのであろう。計算例-1では図-7に示すように要素亀裂の先端が両端部分で揃っていることも結果をよくしている原因である。

7. むすび

本研究で導いた要素亀裂曲面による板の解析方法についてはおおよそ次のような結論が導かれる。

(1) 亀裂先端部分でも有限な断面力しか生じない。さらにDugdaleのように常に全塑性モーメントになるのではなく、小さな荷重では小さな曲げモーメントが生じる。したがって荷重漸増法で亀裂周辺の応力解析を行うには非常に有効である。

(2) 断面力を亀裂部分で0以外の任意の値に指定することが可能であるから、開口亀裂でなく全塑性モーメントの降伏線の成長を追求する場合にも有効である。

(3) 遷移区間を設けて開口させつつ断面力には何の条件も付けずに放置すると、亀裂先端部分では σ_{yd} を縁端に生じる降伏モーメント M_{yd} 、少し内側には全塑性モーメント M_p に相当したものが生じるような状態が出現して興味深い。

(4) 遷移区間で断面力が急勾配で0へ下る部分は破壊しつつある部分に相当しよう。

(5) 遷移区間は長さの異なる多くの要素亀裂で重複して覆い、図-7に示したように先端を揃える方が閉じ合せ誤差の小さい安定した解が得られるように思われる。選点法でなく最小二乗法的方法の方が誤差を小さくし得る。

(6) 有限要素法で亀裂先端の応力解析を行うには遷移区間の部分において幅0の弾性体(あるいは長さ0のばね)を設置するような工夫が必要であるが、本研究の解析方法ではそのような煩わしさはない。

(7) 複数の亀裂が交差したり近接したりする場合も一応解析し得る。

(8) 亀裂をもつ板の二次元問題を研究するための特異曲面も本文の手法で導くことは可能であるがこれについては稿を改めたい²⁰⁾。

本研究では徳島大学・兒嶋弘行助教授に貴重なご指導

をいただいた。三品孝洋氏(建設技術研究所)には数値解析でご尽力をいただいた。ここに厚く感謝の意を表したい。

参考文献

- 1) Griffith, A. A. : The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Philosophical Transactions of the Royal Society, London, Series A, Vol. 221, pp. 163~168, 1920.
- 2) Westergaard, H. M. : Bearing Pressures and Cracks, J. of Applied Mechanics, Trans. of the ASME, pp. A-49~A-53, 1939.
- 3) Irwin, G. R. : Analysis of Structures and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, J. of Applied Mechanics, Trans. of the ASME, pp. 361~364, 1957.
- 4) Dugdale, D. S. : Yielding of Steel sheets Containing Slits, J. of Mech. Phys. Solids, Vol. 8, pp. 100~104, 1960.
- 5) Rice, J. R. : A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, J. of Applied Mechanics, Trans. of the ASME, pp. 379~386, 1968.
- 6) Barenblatt, G. I. : The Formation of Equilibrium Cracks During Brittle Fracture, General Ideas and Hypotheses. Axially-symmetric Cracks, PMM. 23, 3, pp. 434~444, 1959.
- 7) 能町純雄：平板のクラック周辺の曲げ応力の集中について、土木学会論文報告集, No. 68, pp. 27~31, 1960.
- 8) Williams, M. L. : The Bending Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack, J. of the Applied Mechanics, Trans. of the ASME, pp. 78~82, 1961.
- 9) 長谷部宣男：3角形切欠きおよび突起を有する半無限板の応力解析, 土木学会論文報告集, No. 194, pp. 29~40, 1971.
- 10) 長谷部宣男：切欠きを有する半無限弾性体の縦せん断応力, 土木学会論文報告集, No. 221, pp. 11~18, 1973.
- 11) Folias, E. S. : On the Three-Dimensional Theory of Cracked Plates, J. of Applied Mechanics, Trans. of the ASME, pp. 663~674, 1975.
- 12) Boduroglu, H. and Erdogan, F. : Internal and Edge Cracks in a Plate of Finite Width under Bending, J. of Applied Mechanics, Trans. of the ASME, Vol. 50, pp. 621~629, 1983.
- 13) 村上裕則・大南正英, ほか：破壊力学入門, オーム社, 1979.
- 14) 白鳥正樹・三好俊郎・中山英明：数値破壊力学, 実教出版社, 1980.
- 15) 岡村弘之：線型破壊力学入門, 培風館, 1980.
- 16) Pucher, A. : Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten, Ing. Archiv, XII Band, pp. 76~100, 1941.
- 17) 中川建治・長瀬裕信・松浦良和：群荷重と特異曲面とによる単純支持板の解析, 土木学会論文報告集, No. 299, pp. 1~12, 1980.
- 18) 三品孝洋・堀 晃芳・中川建治：降伏線状のクラックを持つ単純支持無限板の曲げモーメント分布に関する研究,

- 土木学会第 36 回年次学術講演会概要集 I, pp. 83~84, 1981.
- 19) 白河忠良・堀 晃芳・中川建治：薄板の曲げクラック先端の応力集中に関する研究，土木学会中部支部研究発表会講演概要集，pp. 2~3, 1982.
- 20) 石坂 豊・冬木武浩・中川建治：スリット状クラックを含む平板の 2 次元問題について，土木学会中部支部研究発表会概要集，pp. 22~23, 1984. (1985. 9. 24・受付)
-