

選点法による回転殻の応力波伝播問題の解析

APPLICATION OF THE COLLOCATION METHOD TO STRESS WAVE PROBLEMS
OF SHELLS OF REVOLUTION

三上 隆*・芳村 仁**

By Takashi MIKAMI and Jin YOSHIMURA

The collocation method for wave propagation problems of elastic shells of revolution is developed. This is a weighted residual method in which the collocation points are taken at the roots of orthogonal polynomial.

In this paper the collocation method is employed to replace a partial differential equations by a system of ordinary differential equations in time, and the resulting equations are solved by two different numerical methods of time integration: an implicit (Houbolt) method and an explicit (second order central difference) method.

The versatility and accuracy is illustrated through several numerical examples. The method appears to be relatively easy to formulate and gives satisfactory results.

Keywords: collocation method, shells of revolution, stress wave problems

1. ま え が き

構造物の動的問題は、構造の全体的振動を扱い、低次の振動モードに支配される構造振動問題と局所的な波の伝播を追跡し、低次のみならず高次モードにも支配される波動伝播問題に大別される。

本論文は後者の問題を対象とし、時間領域には直接積分法の使用を前提とした空間領域の一離散化手法を提示するとともに、具体的な数値計算例によって、その有効性や妥当性の検証を行ったものである。

回転殻の動的応答問題の場合、解析解が得られるのはそれほど多くはなく、一般には近似的手法が適用される。その際とられる過程は、まず数値解析手法 (FDM, FEMなど)¹⁾により空間を近似することである。しかしながら、これらの手法を波動伝播の問題に適用すれば、要求される精度に呼応して、構造振動問題に適用するとき以上の格子点数や要素分割数が必要となり、大次元な行列の演算の必要性や計算精度の低下などの固有の問題が生じる。

本論文は、以上の状況を踏まえ、回転殻の応力波伝播

の問題を扱う際の一計算法として、選点法による実用的解法を述べたものである。ここで提示する手法は、古典殻理論に基づき構造振動問題を扱った前論文²⁾を基礎とするが、計算対象とする問題の固有の特性およびそれに起因する数値解析上の問題点に考慮を払い、拡張整理したものである。すなわち、①応力波伝播の問題において、重要な因子となるせん断変形と回転慣性の影響^{3)~10)}が考慮された修正殻理論に基づく定式化を行った。②選点法に基づいて定式化された時間に関する2階の連立常微分方程式に対し、陽 (explicit) と陰 (implicit) の直接時間積分法を適用して構成した、2種の解析アルゴリズムを提示した。各アルゴリズムは、選点法固有の利点が生かされて次数の低い行列演算により解が得られるものとなっており、選点法と陽解法の組合せに対しては必然的に、また選点法と陰解法の組合せに対しては、FEMで知られている部分構造法に類似な手法の導入により可能となったものである。③陽解法による場合、時間間隔に関する安定限界と選点法に基づいて定式化された固有振動問題の関連を明確にした。

数値計算例では、まず解析解が容易に得られる円筒殻について行い、解の比較を通して本手法の有効性、妥当性について検討を加えた後、任意形状の回転殻への一適用例として、双曲殻の解析例を示す。

* 正会員 工修 北海道大学助手 工学部土木工学科
(〒060 札幌市北区北13西8)

** 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科(同上)

2. 基礎方程式

修正殻理論に基づく基礎式の誘導過程は、文献3)に譲ることにして、ここでは後の展開に必要なことのみを示す。なお、殻は等方等質な様な厚さとした。

Fig. 1 に示すように、経線、円周方向座標を (x, θ) 、法線方向座標 z を垂直外向きに定める。座標 (x, θ, z) に対応する変位成分を (U, V, W) 、 (x, θ) 軸に垂直な断面の回転角成分を (Φ_x, Φ_θ) とする。また、荷重、合応力および合モーメントの成分を (P_x, P_θ, P_z) 、 $(N_x, N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x}, Q_x, Q_\theta)$ および $(M_x, M_\theta, M_{x\theta}, M_{\theta x})$ で表示する。時間を t 、弾性係数、ポアソン比、厚さおよび単位体積当たりの質量をそれぞれ E, ν, h, ρ と表わす。ここで、次式で定義される時間と経線方向座標の無次元量 (τ, ξ) および演算子を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \tau &= ct/a, \quad \xi = x/l \\ (\cdot)' &= \partial(\cdot)/\partial\xi, \quad (\cdot)^* = \partial(\cdot)/\partial\theta \\ (\cdot)'' &= \partial^2(\cdot)/\partial\xi^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ここに、 $c^2 = E/\rho(1-\nu^2)$ 、 a = 代表長さ、 l = 経線の長さである。殻の半径を R 、主曲率半径を R_1, R_2 とすれば、無次元化曲率 $r_1 (= a/R_1)$ 、 $r_2 (= a/R_2)$ と無次元化半径 $r (= R/a)$ の間の関係式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} r_1 r_2 &= -(\gamma' + \gamma^2)/s^2 = -r''/rs^2 \\ r_1' &= \gamma(r_1 - r_2) \\ r_2 &= \sqrt{1 - r''/s^2}/r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $\gamma = r'/r$ 、 $s = l/a$ である。

さて、構成方程式は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= K \{ \epsilon_x + \nu \epsilon_\theta + \delta(r_1 - r_2)(r_1 \epsilon_x - \alpha \chi_x) \} \\ N_{x\theta} &= Gh \{ \beta_x + \beta_\theta + \delta(r_1 - r_2)(r_1 \beta_x - \alpha \bar{\beta}_x) \} \\ M_x &= D \{ \chi_x + \nu \chi_\theta - (r_1 - r_2) \epsilon_x / a \} \\ M_{x\theta} &= Gh^2 \{ \bar{\beta}_x + \bar{\beta}_\theta - (r_1 - r_2) \beta_x / a \} / 12 \\ Q_x &= \chi Gh \{ 1 + \delta r_1 (r_1 - r_2) \} \mu_x \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

ここに、 $K = Eh/(1-\nu^2)$ 、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 、 $G = E/2(1+\nu)$ 、 $\delta = h^2/12a^2$ 、 χ = センズ補正係数である。他の構成方程式は式(3)で、添字 x と θ を交換し、また r_1 を r_2 に、 r_2 を r_1 に置き換えればよい。さらに、ひずみと変位関係式などは次式で与えられる。

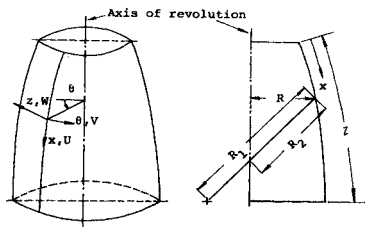


Fig. 1 Typical shell of revolution.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= U'/s + r_1 W/a, \\ \epsilon_\theta &= (V^* + r'U/s + r r_2 W)/ar \\ \chi_x &= \Phi_x'/s, \quad \chi_\theta = (\Phi_\theta^* + r'\Phi_x/s)/ar \\ \beta_x &= V'/s, \quad \beta_\theta = (U^* - r'V/s)/ar \\ \bar{\beta}_x &= \Phi_\theta'/s, \quad \bar{\beta}_\theta = (\Phi_x^* - r'\Phi_\theta/s)/ar \\ \mu_x &= W'/s - r_1 U/a + \Phi_x \\ u_\theta &= (W^* - r r_2 V)/ar + \Phi_\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

運動方程式は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} N_x'/s + \gamma(N_x - N_\theta)/s + N_{x\theta}^*/r + r_1 Q_x &= aP_x + \rho h c^2 (f_{11} \ddot{U}/a + f_{14} \ddot{\Phi}_x) \\ N_{x\theta}'/s + \gamma(N_{x\theta} + N_{\theta x})/s + N_\theta^*/r + r_2 Q_\theta &= aP_\theta + \rho h c^2 (f_{22} \ddot{V}/a + f_{25} \ddot{\Phi}_\theta) \\ Q_x'/s + \gamma Q_x/s + Q_\theta^*/r - r_1 N_x - r_2 N_\theta &= aP_z + \rho h c^2 f_{33} \ddot{W}/a \\ M_x'/s + \gamma(M_x - M_\theta)/s + M_{x\theta}^*/r - aQ_x &= \rho h c^2 (f_{41} \ddot{U} + a f_{44} \ddot{\Phi}_x) \\ M_{x\theta}'/s + \gamma(M_{x\theta} + M_{\theta x})/s + M_\theta^*/r - aQ_\theta &= \rho h c^2 (f_{52} \ddot{V} + a f_{55} \ddot{\Phi}_\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} f_{11} &= f_{22} = f_{33} = 1 + \delta r_1 r_2 \\ f_{14} &= f_{25} = f_{41} = f_{52} = \delta(r_1 + r_2) \\ f_{44} &= f_{55} = \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

であり、 f_{ij} は後述する式(9)に現われる行列 F の非零成分を表わす。

境界条件は、次の5組の対の適当な組合せによって構成される。

$$\left. \begin{aligned} W \text{ or } Q_x, \quad U \text{ or } N_x, \quad V \text{ or } N_{x\theta} \\ \Phi_x \text{ or } M_x, \quad \Phi_\theta \text{ or } M_{x\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

変位 $(U, V, W, \Phi_x, \Phi_\theta)$ と荷重 (P_x, P_θ, P_z) を、 $(u, v, w, \phi_x, \phi_\theta)$ と (p_x, p_θ, p_z) を係数とする形で、合応力 $(N_x, N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x}, Q_x, Q_\theta)$ と曲げモーメント $(M_x, M_\theta, M_{x\theta}, M_{\theta x})$ を、 $(n_x, n_\theta, n_{x\theta}, n_{\theta x}, q_x, q_\theta)$ と $(m_x, m_\theta, m_{x\theta}, m_{\theta x})$ を係数とする形で周方向に Fourier 級数展開する。代表応力を σ 、周方向波数を n と記し、正弦展開されるもののみを示すと、

$$\left. \begin{aligned} V &= (\sigma a^2 / Eh) \sum_n v^{(n)} \sin n\theta \\ \Phi_\theta &= (\sigma a / Eh) \sum_n \phi_\theta^{(n)} \sin n\theta \\ P_\theta &= \sigma \sum_n p_\theta^{(n)} \sin n\theta \\ (N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x}, Q_\theta) &= \sigma a \sum_n (n_\theta^{(n)}, n_{x\theta}^{(n)}, n_{\theta x}^{(n)}, q_\theta^{(n)}) \sin n\theta \\ (M_\theta, M_{x\theta}, M_{\theta x}) &= \sigma a^2 \sum_n (m_\theta^{(n)}, m_{x\theta}^{(n)}, m_{\theta x}^{(n)}) \sin n\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

となる。以下では Fourier 係数の添字 (n) は省略する。

さて、以上の諸式を用いれば、任意回転殻の運動方程式は変位成分に関する2階5元偏微分方程式として次の

ように得られる。

$$CX'' + DX' + EX = (1 - \nu^2)P + F\ddot{X} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} X^T &= (u, v, w, \phi_x, \phi_\theta) \\ P^T &= (p_x, p_\theta, p_z, 0, 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

であり、**C**、**D**、**E**と**F**は、殻の幾何学的諸量 r, r_1, r_2, γ および r_1' で表わされる 5×5 次の行列である (**F** の非零成分は式 (6) で与えられ、他の行列のそれは付録 I を参照されたい)。

境界条件の規定に必要な合応力と曲げモーメントの Fourier 係数は次のように行列表示される。

$$T^T = GX' + HY \dots\dots\dots (11)$$

ここに、

$$T^T = (n_x, n_{x\theta}, q_x, m_x, m_{x\theta}) \dots\dots\dots (12)$$

であり、 5×5 次の行列 **G** と **H** の非零成分は付録 I を参照されたい。

3. 解析法

(1) 選点法による空間領域の離散化

Fig. 2 (a) に示すように回転軸に沿って N 個の要素に分割する。 k 番目の要素を (k) 要素と名付け、境界条件が指定される殻の両端を 1, $N+1$, 分割点を 2, 3, ..., N と番号付けをする。各要素 (経線の長さ l_k) で成立する基礎式の位置に関する独立変数 ξ は $0 \leq \xi \leq 1$ で定義されるものとする。

さて、選点法による空間領域の近似過程は文献 2) に従うので、ここでは後の展開で必要なことのみを記す。

① 内部選点と端点; Fig. 2 (b) に示すように各要素の経線に沿って $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_M < \xi_{M+1} = 1$ の $M+2$ 個の点を配置する。内部選点 ξ_j ($j=1 \sim M, M=$ 内部選点数) には、区間 $[0, 1]$ で定義される M 次の shifted Legendre 多項式の零点を採用する。 $\xi_0=0$ と $\xi_{M+1}=1$ は、境界条件が指定される点や分割点に配置されるもので、端点とよぶことにする。

② 行列 **A** と **B**; 各要素において、時刻 τ での ξ に関する 1, 2 階微分を時刻 τ での内部選点と端点における関数値 (変位の値) に結びつける $(M+2) \times (M+2)$ 次の行列である (具体的な内容は文献 2) を参照された

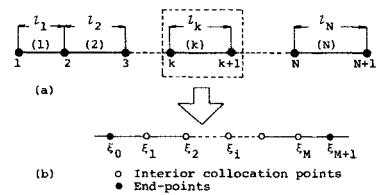


Fig. 2 Shell element: (a) Division of shell into N elements; (b) Location of collocation points in element (k).

い). (k) 要素の変位成分 ($u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}, \phi_x^{(k)}, \phi_\theta^{(k)}$) の 1 つを $z^{(k)}$ (以下 (k) 要素に関する諸量には肩添字 (k) をつけて表わす) と記せば、次のような関係式となる。

$$Z^{(k)} = AZ^{(k)}, Z^{(k)} = BZ^{(k)} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $(M+2) \times 1$ 次のベクトル、たとえば $Z^{(k)}$ は次のようなものである。

$$Z^{(k)T} = (Z(\xi_0)^{(k)}, Z(\xi_1)^{(k)}, \dots, Z(\xi_{M+1})^{(k)}) \dots\dots\dots (14)$$

③ $Z_c^{(k)}$ と $Z_e^{(k)}$; 式 (14) は内部選点と端点に関する成分より構成されている。以下ではこれらを分離し、内部選点に関するものには添字 c を、端点のそれには添字 e を付して表わす。

$$\left. \begin{aligned} Z_c^{(k)T} &= (Z(\xi_1)^{(k)}, Z(\xi_2)^{(k)}, \dots, Z(\xi_M)^{(k)}) \\ Z_e^{(k)T} &= (Z(\xi_0)^{(k)}, Z(\xi_{M+1})^{(k)}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

未知量を内部選点と端点に関するものに分離する操作は、後に示すように解法の展開が簡潔に行え、また次元の高い方程式の求解過程を回避できる解法の開発を可能にしている。

以上の準備のもとに、 N 個の要素分割による $5(M+2)$ N 個の未知数に対する条件は次のように与えられる。

a) 基礎微分方程式の残差の条件 ($5MN$ 個の条件) この条件は、基礎微分方程式 (9) の内部選点における残差の条件より求められる。(k) 要素に着目すれば、最終的に次の時間に関するマトリクス常微分方程式を得る。

$$\alpha_c^{(k)} \delta_c^{(k)} + \alpha_e^{(k)} \delta_e^{(k)} = P_c^{(k)} + \beta_c^{(k)} \ddot{\delta}_c^{(k)} \quad (k=1 \sim N) \dots\dots\dots (16)$$

ここに、添字 c と e はそれぞれ内部選点、端点に関する行列やベクトルを表わす。ベクトルの内容を式 (15) の表わし方に従って示すと次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_c^{(k)T} &= (u_c^{(k)T}, v_c^{(k)T}, w_c^{(k)T}, \phi_{xc}^{(k)T}, \phi_{\theta c}^{(k)T})_{1 \times 5M} \\ \delta_e^{(k)T} &= (u_e^{(k)T}, v_e^{(k)T}, w_e^{(k)T}, \phi_{xe}^{(k)T}, \phi_{\theta e}^{(k)T})_{1 \times 10} \\ P_c^{(k)T} &= ((1 - \nu^2) P_x^{(k)T}, (1 - \nu^2) P_\theta^{(k)T}, \\ &\quad (1 - \nu^2) P_z^{(k)T}, 0, 0)_{1 \times 5M} \\ \ddot{\delta}_c^{(k)T} &= (\ddot{u}_c^{(k)T}, \ddot{v}_c^{(k)T}, \ddot{w}_c^{(k)T}, \ddot{\phi}_{xc}^{(k)T}, \ddot{\phi}_{\theta c}^{(k)T})_{1 \times 5M} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

さらに、 $\alpha_c^{(k)}$ と $\alpha_e^{(k)}$ は、式 (9) に現われる ξ の微分階数に応じて、式 (13) の行列 **A** と **B** の成分で構成されるそれぞれ、 $5M \times 5M$ と $5M \times 10$ 次の行列であり、 $\beta_c^{(k)}$ は慣性力の係数 (式 (6)) を成分とする $5M \times 5M$ 次の行列である。なお $\alpha_c^{(k)}$ と $\alpha_e^{(k)}$ の内容は付録 II を参照されたい。

b) 境界条件式 (10 個の条件)

10 個の条件は、(1) 要素の境界点 1 と (N) 要素の境界点 $N+1$ でそれぞれ規定される 5 個の条件より、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{c,1}^{(1)} \delta_c^{(1)} + \gamma_{e,1}^{(1)} \delta_e^{(1)} &= g^{(1)} \\ \gamma_{c,N+1}^{(N)} \delta_c^{(N)} + \gamma_{e,N+1}^{(N)} \delta_e^{(N)} &= g^{(N)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

と得られる。ここに、コンマ (,) の後の下付き添字 i ($=1, N+1$) は境界点を表わす。 $\gamma_{c,i}^{(1)}$ と $\gamma_{e,i}^{(N)}$ および

$\gamma_{e,i}^{(i)}$ と $\gamma_{e,N+1}^{(N)}$ は、式 (13) の行列 A の成分で構成されるそれぞれ $5 \times 5 M$ 、 5×10 次の行列であり、 $g^{(1)}$ と $g^{(N)}$ はあらかじめ規定された変位、応力などの値を成分とする 5×1 次のベクトルである。

c) 分割点における接続条件式 $(10(N-1))$ 個の条件)

この条件は、分割点 $i(i=2 \sim N)$ で成立する変形量 X (式 (10)) と力学量 T (式 (12)) の接続条件で与えられる。すなわち、次式より求められる。

$$X^{(i-1)} = X^{(i)}, \quad T^{(i-1)} = T^{(i)} \dots \dots \dots (19)$$

ここに、 $i=2 \sim N$ であり、添字 $(i-1)$ 、 (i) の諸量は、それぞれ $\xi = \xi_{M+1}$ 、 $\xi = \xi_0$ の値をとる。上式の一般形を式 (18) に習い行列表示すると次式となる。

$$\gamma_{c,i}^{(i-1)} \delta_{c,i}^{(i-1)} + \gamma_{e,i}^{(i-1)} \delta_{e,i}^{(i-1)} + \gamma_{c,i}^{(i)} \delta_{c,i}^{(i)} + \gamma_{e,i}^{(i)} \delta_{e,i}^{(i)} = 0 \quad (i=2 \sim N) \dots \dots \dots (20)$$

ここに、 $\gamma_{c,i}^{(i)}$ および $\gamma_{e,i}^{(i)}$ は、それぞれ $10 \times 5 M$ 、 10×10 次の行列で、式 (13) の行列 A の成分で構成される。下付き添字 i は分割点を表わす。

(2) 時間領域の離散化

前節で、選点法を適用して空間を離散化し、その結果、式 (16)、(18) および式 (20) の時間に関する $5(M+2)N$ 本の方程式が得られた。本節では、これらに直接積分法を適用し時間方向の近似を行う。一般に積分法には、構造振動問題には無条件安定な陰公式が用いられ、波動伝播問題には陽公式が用いられるが、ここでは双方による解析の手順を具体的に示すために、陰公式には代表的に Houbolt 法⁴⁾を、陽公式には代表的に中心差分法を採用する。また、選点法本来の利点である未知数の個数の減少は、波動伝播の問題にも生かされるが、構造振動問題の場合に比べてある程度の自由度数の増加は避けられない。したがって、いかにして次元の高い行列の演算を回避するかがここでの課題の1つであり、この点も含めて以下に具体的な解析アルゴリズムを提示する。なお、展開を容易にするため初期条件は零とした。

a) 陰公式による場合

陰公式による場合には、FEM で知られている部分構造法に類似な手法を導入することにより、解くべき方程式は比較的小さな方程式へと変換できる。すなわち、ここでは1つの要素を部分構造とみなし、まず系全体の端点における未知量を求めた後、各部分構造を独立に既知の端点の変位のもとで解析する。

式 (16) に Houbolt 法を適用すれば、時刻 $\tau = \tau_0 + j \cdot \Delta\tau$ (τ_0 = スタート時刻, $\Delta\tau$ = 時間間隔, j = 時間ステップ) で成立する次式を得る。

$$K_c^{(k)} \delta_{c,j}^{(k)} + \alpha_e^{(k)} \delta_{e,j}^{(k)} = S_{c,j}^{(k)} \quad (k=1 \sim N) \dots \dots \dots (21)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} j=1; & K_c^{(k)} = \alpha_c^{(k)} - 6\beta_c^{(k)} / \Delta\tau^2 \\ & S_{c,1}^{(k)} = 2P_{c,1}^{(k)} + P_{c,0}^{(k)} \\ j=2; & K_c^{(k)} = \alpha_c^{(k)} - 2\beta_c^{(k)} / \Delta\tau^2 \\ & S_{c,2}^{(k)} = P_{c,2}^{(k)} + P_{c,0}^{(k)} - 4\beta_c^{(k)} \delta_{c,1}^{(k)} / \Delta\tau^2 \\ j \geq 3; & K_c^{(k)} = \alpha_c^{(k)} - 2\beta_c^{(k)} / \Delta\tau^2 \\ & S_{c,j}^{(k)} = P_{c,j}^{(k)} - \beta_c^{(k)} (5\delta_{c,j-1}^{(k)} - 4\delta_{c,j-2}^{(k)} + \delta_{c,j-3}^{(k)}) / \Delta\tau^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

であり、コンマ (,) の後の添字は時間ステップを表わす。

式 (21) を $\delta_{c,j}^{(k)}$ について解くと次式が得られる。

$$\delta_{c,j}^{(k)} = K_c^{(k)-1} (S_{c,j}^{(k)} - \alpha_e^{(k)} \delta_{e,j}^{(k)}) \dots \dots \dots (23)$$

上式を、添字 (k) に留意して、式 (18)、(20) に代入すれば、端点における変形を未知量とする次式を得る。

$$K_e \delta_{e,j} = \bar{S}_j \dots \dots \dots (24)$$

ここに、 $\delta_{e,j}$ は式 (17) の第2式の $\delta_e^{(k)}$ を成分とする $10N \times 1$ 次のベクトルである。

$$\delta_{e,j}^T = (\delta_{e,j}^{(1)T}, \delta_{e,j}^{(2)T}, \dots, \delta_{e,j}^{(N)T}) \dots \dots \dots (25)$$

さらに、大きさが内部選点数に依存しない $10N \times 10N$ 次の行列 K_e と大きさ $10N \times 1$ 次のベクトル \bar{S}_j は、

$$K_e = \begin{bmatrix} K_1^{(1)} & & & & \\ K_2^{(1)} & K_2^{(2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & K_N^{(N-1)} & K_N^{(N)} \\ & & & & K_{N+1}^{(N)} \end{bmatrix}, \quad \bar{S}_j = \begin{bmatrix} \bar{S}_{1,j} \\ \bar{S}_{2,j} \\ \vdots \\ \bar{S}_{N,j} \\ \bar{S}_{N+1,j} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (26)$$

と表わされる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} K_i^{(i)} &= \gamma_{e,i}^{(i)} - \gamma_{c,i}^{(i)} K_c^{(i-1)} \alpha_e^{(i)} \quad (i=1 \sim N) \\ K_i^{(i-1)} &= \gamma_{e,i}^{(i-1)} - \gamma_{c,i}^{(i-1)} K_c^{(i-1)-1} \\ &\quad \cdot \alpha_e^{(i-1)} \quad (i=2 \sim N+1) \\ \bar{S}_{1,j} &= g^{(1)} - \gamma_{c,1}^{(1)} K_c^{(1)-1} S_{c,j}^{(1)} \\ \bar{S}_{i,j} &= -\gamma_{c,i}^{(i-1)} K_c^{(i-1)-1} S_{c,j}^{(i-1)} \\ &\quad - \gamma_{c,i}^{(i)} K_c^{(i-1)} S_{c,j}^{(i)} \quad (i=2 \sim N) \\ \bar{S}_{N+1,j} &= g^{(N)} - \gamma_{c,N+1}^{(N)} K_c^{(N-1)} S_{c,j}^{(N)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

ここでの計算過程を要約すると、まず式 (24) より端点における未知量を求め、次に式 (23) より各要素の内部選点における未知量を既知の端点の変位のもとで求めることになる。

b) 陽公式による場合

ここでは、中心差分法を用いるが、スタート時に特別な扱いが必要なので、厳密には時間ステップ $j \geq 2$ で中心差分法を用いたことになる。

(イ) $j=1$ ($\tau = \tau_0 + \Delta\tau$) のとき
 $\tau = \tau_0$ での速度を中心差分、 $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ での加速度を

後退差分で表わした後、初期条件（ここでは零とする）を考慮すれば、 $j=1$ での加速度は $\ddot{\delta}_{c1}^{(k)}=2\delta_{c1}^{(k)}/\Delta\tau^2$ となる。したがって、式(16)は次のようになる。

$$(\alpha_c^{(k)}-2\beta_c^{(k)}/\Delta\tau^2)\delta_{c1}^{(k)}+\alpha_e^{(k)}\delta_{e1}^{(k)}=P_{c1}^{(k)} \quad (k=1\sim N) \quad \dots\dots\dots(28)$$

上式は式(21)と同形なので、a)で述べた計算手順によりすべての未知量が求められる。

(ロ) $j \geq 2$ ($\tau = \tau_0 + j\Delta\tau$) のとき
 加速度を中心差分で表わすと、式(16)は、

$$\beta_c^{(k)}\delta_{c,j}^{(k)}/\Delta\tau^2 = (\alpha_c^{(k)} + 2\beta_c^{(k)}/\Delta\tau^2)\delta_{c,j-1}^{(k)} + \alpha_e^{(k)}\delta_{e,j-1}^{(k)} - P_{c,j-1}^{(k)} - \beta_c^{(k)}\delta_{c,j-2}^{(k)}/\Delta\tau^2 \quad (k=1\sim N) \quad \dots\dots\dots(29)$$

と整理される。上式の右辺は既知となるので、各要素の内部選点における変位 $\delta_{c,j}^{(k)}$ は独立に解かれる。

次に、式(29)より得られた $\delta_{c,j}^{(k)}$ を式(18)、(20)に代入すれば、端点における変位 $\delta_{e,j}^{(k)}$ を未知量とする式(24)の形で整理できる。ただし、式(27)の行列とベクトルは次のように修正される。

$$\left. \begin{aligned} K_i^{(k)} &= \gamma_{e,i}^{(k)} \quad (i=1\sim N) \\ K_i^{(k-1)} &= \gamma_{e,i}^{(k-1)} \quad (i=2\sim N+1) \\ \bar{S}_{i,j} &= g^{(i)} - \gamma_{c,i}^{(i)} \delta_{c,i}^{(i)} \\ \bar{S}_{i,j} &= -\gamma_{c,i}^{(i-1)} \delta_{c,i}^{(i-1)} - \gamma_{c,i}^{(i)} \delta_{c,i}^{(i)} \quad (i=2\sim N) \\ \bar{S}_{N+1,j} &= g^{(M)} - \gamma_{c,N+1}^{(M)} \delta_{c,j}^{(M)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(30)$$

$j \geq 2$ での計算手順は、まず各要素の内部選点における未知量を独立に求め、次にこれをもとに系全体の端点における未知量を求めることになる。これは、陰公式での手順と逆であり興味深い。なお、ここでの計算手順は、選点法と陰公式の組合せの場合に用いたような技巧を必要とせず、選点法と陽公式の組合せに対して必然的に得られるものである。

(3) 時間間隔 $\Delta\tau$ の設定

時間間隔は、陽および陰公式とも、最小の経線の長さ(S_{min})の要素内に選ばれた一連の点 ξ_i ($i=0, 1, \dots, M+1$)の最小間隔(ξ_{min})を縦波が伝播するのに要する時間を基準に設定する。

$$\Delta\tau \leq S_{min} \cdot \xi_{min} \quad \dots\dots\dots(31)$$

ここで、 S_{min} および ξ_{min} はそれぞれ、要素の経線の長さ l_i ($= S_i/a$, a = 代表長さ) および区間 $[0, 1]$ 内にとられる内部選点の分布状況 (区間の端で密, 中央で粗, $\xi=0.5$ に関して対称) より次のように与えられる。

$$S_{min} = \min(S_i) \quad (i=1\sim N) \quad \dots\dots\dots(32)$$

$$\xi_{min} = \xi_1 - \xi_0 \quad (= \xi_{M+1} - \xi_M) \quad \dots\dots\dots(33)$$

参考のため、Table 1 に数種の内部選点数 M に対する ξ_{min} の値を示す。

さて中心差分法による場合は、安定条件として次の条件を要する^{5),6)}。

$$\Delta\tau \leq \min(2/\lambda_{max}^{(k)}) \quad (k=1\sim N) \quad \dots\dots\dots(34)$$

Table 1 Values of ξ_{min} .

M	ξ_{min}	M	ξ_{min}
5	0.0469	9	0.0159
6	0.0338	10	0.0130
7	0.0254	11	0.0109
8	0.0199	12	0.0092

ただし空間領域を選点法により離散化する本手法の場合、 $\lambda_{max}^{(k)}$ は (k) 要素の両端が完全固定 ($X=0$, 式(10)) されたときの無次元化固有振動数 ($\lambda = \omega a/c$, $\omega =$ 固有円振動数) の最大値である。完全固定の条件が関与するのは空間に対して用いた選点法の特性に由来するものであり、以下これについて説明を加える。

選点法を要素の両端が任意支持の場合の固有振動問題に適用する⁷⁾。式(16)で、 $\delta_c^{(k)}$, $\delta_e^{(k)} \propto e^{i\omega a r/c}$ および $P_c^{(k)} = 0$ とおけば次式を得る。

$$\alpha_c^{(k)}\delta_c^{(k)} + \alpha_e^{(k)}\delta_e^{(k)} + \lambda^2\beta_c^{(k)}\delta_c^{(k)} = 0 \quad \dots\dots\dots(35)$$

要素の両端で規定される条件は次式で表わされる。

$$\bar{\gamma}_c^{(k)}\delta_c^{(k)} + \bar{\gamma}_e^{(k)}\delta_e^{(k)} = 0 \quad \dots\dots\dots(36)$$

ここに、 $\bar{\gamma}_c^{(k)}$ と $\bar{\gamma}_e^{(k)}$ はそれぞれ、 $10 \times 5M$, 10×10 次の行列である。式(35)、(36)より $\delta_c^{(k)}$ を消去すれば、任意支持された(k)要素の固有振動数方程式は、次のように導かれる。

$$(\beta_c^{(k-1)}\alpha_c^{(k)} - \alpha_e^{(k)}\bar{\gamma}_e^{(k-1)}\bar{\gamma}_c^{(k)} + \lambda^2 I)\delta_e^{(k)} = 0 \quad \dots\dots\dots(37)$$

ここで、 I は単位行列である。

ところで、差分式(29)に $\delta_{c,j}^{(k)} = \mu\delta_{c,j-1}^{(k)}$ ($\mu =$ パラメータ)を代入し、外乱項に相当する右辺の第2, 3項を無視すれば次式が得られる。

$$(\beta_c^{(k-1)}\alpha_c^{(k)} - (\mu - 2 + 1/\mu)I/\Delta\tau^2)\delta_{c,j-1}^{(k)} = 0 \quad \dots\dots\dots(38)$$

式(37)と式(38)を比較すれば、次式が成立するとき同じ形の固有値問題となる。

$$\alpha_e^{(k)}\bar{\gamma}_e^{(k-1)}\bar{\gamma}_c^{(k)} = 0 \quad \dots\dots\dots(39)$$

$$\lambda^2 = -(\mu - 2 + 1/\mu)/\Delta\tau^2 \quad \dots\dots\dots(40)$$

式(39)が成立するのは、 $\alpha_e^{(k)}\bar{\gamma}_e^{(k-1)} \neq 0$ に留意すれば、 $\bar{\gamma}_c^{(k)}$ が零行列の場合である。すなわち、要素の両端で規定される条件式(36)において、 $\bar{\gamma}_c^{(k)}$ が零行列で与えられる完全固定のときである。このとき式(37)は次式となる。

$$(\beta_c^{(k-1)}\alpha_c^{(k)} + \lambda^2 I)\delta_c^{(k)} = 0 \quad \dots\dots\dots(41)$$

したがって、上式より定まる固有値 λ の最大値が式(34)の $\lambda_{max}^{(k)}$ を与えることになる。式(41)の妥当性については、次章で数値例をもって例証する。

4. 数値計算例

本章では、3.で提示した手法の適用性、有効性を確認するため2つの数値解析を行った。(1)では円筒殻を取り上げ、本計算値と理論解との比較をすることに

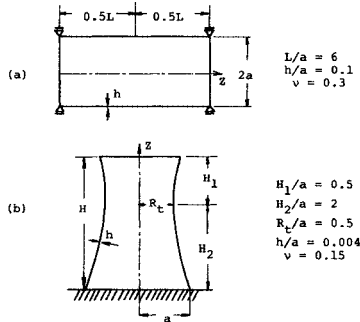


Fig. 3 Shells used for numerical studies : (a) Cylindrical shell ; (b) Hyperboloidal shell.

よって手法の妥当性を検討し、(2)では任意形状の回転殻への一適用例として双曲殻の解析例を示す。なお、計算に用いたせん断補正係数は $\pi^2/12$ である。

(1) 円筒殻

Fig. 3 (a) に示すような寸法・形状をもち、両端で単純支持され、スパン中央に $p_z = \sigma \cos n\theta$ で表わされる周方向に n 波の正弦分布する法線方向線荷重がステップ関数的に作用する円筒殻を解析する。問題の対称性から全体の $1/2$ 部分を解析し、空間と時間の離散量 (空間に対しては内部選点数 M と分割数 N 、時間に対しては時間間隔 $\Delta\tau$) の解に与える影響を検討するため、Table 2 に示すような 5 種の離散化モデルを選んだ。以後 Case 1, 2, ..., 5 とよぶことにする。各 Case において、要素分割は等分割である。なお、空間に対する離散量 M と N は、選点法による前論文^{2), 7)}の結果を参考にし、要素内の内部選点数 M は 11 を基準に選び、要求される精度に応じて分割数 N を増加させるという立場から設定したものである。

波数 $n=1$ の外力が作用するときの、支持端からの位

Table 2 Discretization patterns for cylindrical shell.

Case	M	N	$\Delta\tau$
1	5	10	0.01
2	5	10	0.005
3	11	5	0.005
4	11	5	0.0025
5	11	10	0.0025

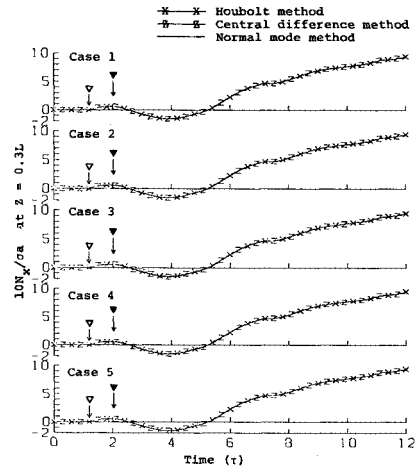
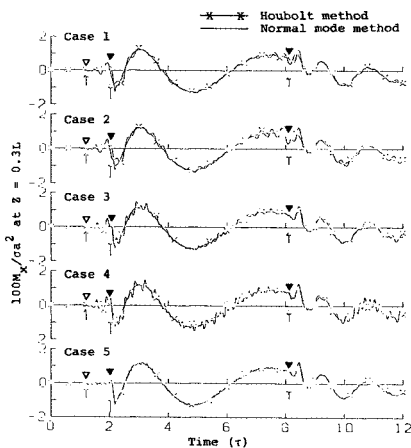
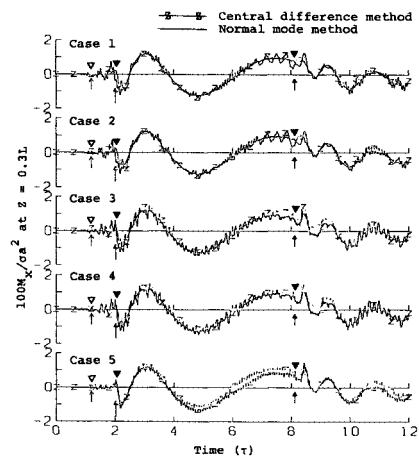


Fig. 4 Effect of discretization patterns on transient response of meridional stress resultant (cylindrical shell).

置 $z=0.3L$ における合応力 N_x および曲げモーメント M_x の時間応答を Fig. 4, 5 に示す。図で X および Z 印を付した実線は、それぞれ Houbolt 法および中心差分法による値であり、実線のみのは比較のために用いたモード解析法⁸⁾の結果 (奇数項のみ 128 個の総和) である。また図には荷重点より発した縦波 (伝播速度 $= \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$) とせん断波 (伝播速度 $= \sqrt{G/\rho}$) の着目



(a) Houbolt method



(b) Central difference method

Fig. 5 Effect of discretization patterns on transient response of meridional bending moment (cylindrical shell).

点での到達時刻の位置がそれぞれ、▽印と▼印で示されている（ただし、Fig. 5 の 2 番目の▼印は、荷重点より発したせん断波が支持端で反射され荷重点に最初に到達する時間を表わす）。

合応力 N_x (Fig. 4) は、離散化量 ($M, N, \Delta\tau$) および採用した積分公式によらず、モード解析法の結果とよい一致を示している。

Fig. 5 (a) は Houbolt 法および Fig. 5 (b) は中心差分法による曲げモーメント M_x の結果を、それぞれ実線のみで示したモーダル解と比較したものである。本法による応答波形は各 Case とも、モード解析法による波形に高次の振動が重畳した波形となっているが、高次振動を平均化するとモーダル解の波形にはほぼ一致している。内部選点数 M が小さい場合 (Case 1 と 2) は、せん断波の到達前後において波形の乱れが認められるが、 M を増せばこの乱れは減少する傾向にあり、また高次振動の周期と振幅も M を増せば小さくなる傾向にある。さて、空間に対する離散化度が同一の場合 (Case 1 と 2, Case 3 と 4), 小さな積分間隔による解と大きなそれによる解には、あまり差異がない。このことは、前述の高次振動や乱れが空間領域の離散化に伴う誤差であることを示唆している。

Fig. 6 は、任意の波数 n を有する荷重条件への本法の適用性を調べるために、積分法に Houbolt 法を、離散化モデルに Case 5 を用いたときの、波数の変化 ($n=2, 5, 10$) に対する N_x と M_x の時間応答を示したものである。 N_x の時間応答は、モード解析法のそれとほとんど一致し、 M_x の時間応答には、波数 $n=1$ のときと同様に高次の振動が認められるが、高次振動を平均化するとモード解析法の時間応答によく一致している。

次に、式 (41) より得られる中心差分法の時間間隔に

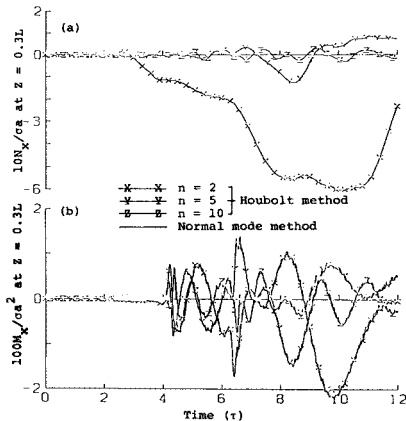


Fig. 6 Transient responses of cylindrical shell for $n=2, 5$, and 10 : (a) Meridional stress resultant; (b) Meridional bending moment.

検討を加える。Fig. 7 は $M=11, \nu=0.3$ の場合について、時間間隔 $\Delta\tau$ ($=2/\lambda_{\max}$, λ_{\max} は式 (41) より求められる λ の最大値) と h/a (厚さ/半径) の関係を S (要素の長さ/半径) に対してプロットしたものである。なお、図は波数 $n=1$ について調べたものであるが、 $n \leq 20$ の範囲については、 $n=1$ の結果と比較して数 % 程度の誤差しか生じないことを確認してある。図より $\Delta\tau$ は S および h/a が小さくなるにつれて減少しており、中心差分法は S および h/a が小さい場合には、少なくとも計算効率の面では好ましくないことが理解される。

Fig. 8 は Fig. 7 および式 (41) の妥当性を数値的に検証したものである。図は、波数 $n=1$ の場合について、次に示す 2 種の諸元 (Model A, B と記す) および式 (41) を用いて定めた時間間隔を含む 3 種のそれに対するスパン中央の変位 W の時間応答を示している。

Model A ; $L/a=6, h/a=0.1$

$\Delta\tau_1=0.014, \Delta\tau_2=0.013, \Delta\tau_3=0.010$

Model B ; $L/a=6, h/a=0.05$

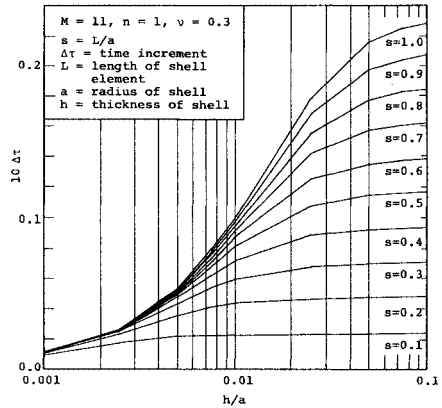


Fig. 7 Relationship between $\Delta\tau, h/a$ and s as predicted by Eq. (41).

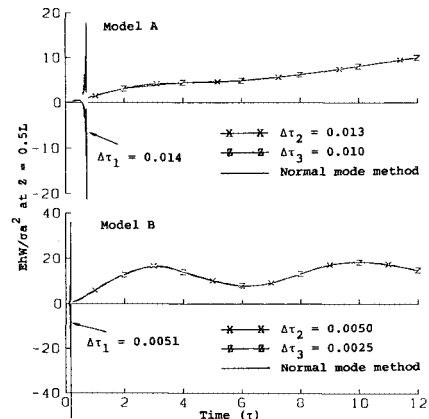


Fig. 8 Effect of time increment on transient response of normal displacement (cylindrical shell).

$$\Delta\tau_1=0.0051, \Delta\tau_2=0.0050, \Delta\tau_3=0.0025$$

時間間隔 $\Delta\tau_1$ は式 (41) または Fig. 7 の λ を用いて決定し、他のそれは $\Delta\tau_1$ より小さくなるように任意に定めた。なお、内部選点数には $M=11$ 、分割数には $N=5$ を用いた。図で、 $\Delta\tau_1$ に対する結果は応答初期で不安定（発散）となり、他の $\Delta\tau$ に対する応答は安定した解を示している。このように、要素の両端を完全固定として導かれた式 (41) の最大固有振動数は、中心差分法による時間間隔を定めるのに有効である。

(2) 片持ち形式の双曲殻

本法の任意回転殻への適用例として、Fig. 3 (b) に示す形状・寸法をもち、自由端に沿って面外方向線荷重 $\sigma \cos \theta$ と面内方向線荷重 $\sigma \sin \theta$ がステップ関数的に作用する双曲殻を解析する。要素分割は、スロート部より上部を回転軸に沿って 3 等分割、下部を同様に 12 等分割した計 15 要素であり、内部選点数は $M=11$ とした。積分法には、Houbolt 法を用い、時間間隔は $\Delta\tau =$

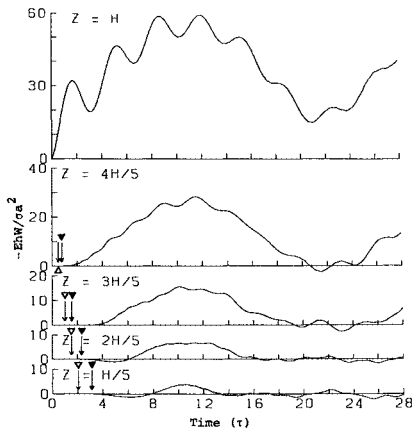


Fig. 9 Transient responses of normal displacement for hyperboloidal shell.

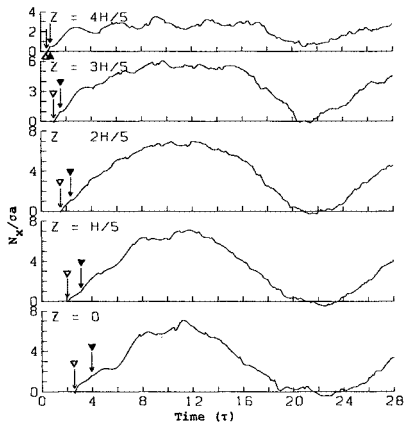


Fig. 10 Transient responses of meridional stress resultant for hyperboloidal shell.

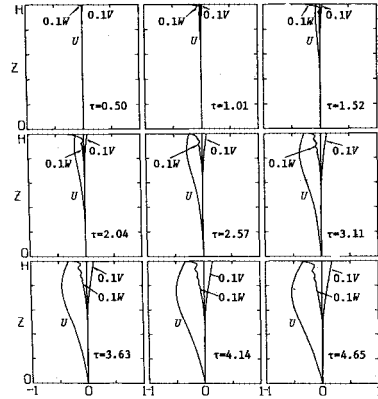


Fig. 11 Deformation profiles (EhU/aa^2 , EhV/aa^2 , EhW/aa^2) at various time points for hyperboloidal shell.

0.0014 とした ($S_{min}=0.1668$).

Fig. 9 と 10 に、固定端から回転軸に沿って測った着目点 Z における変位 W と合応力 N_x の時間応答を示す。図には、荷重点から発した縦波とせん断波が最初に着目点に到達する時刻をそれぞれ、 ∇ 、 \blacktriangledown 印で示した。得られた結果は、理論解が求められていないので正確な精度の評価はできないが、応答の立ち上がりなどは応力波の伝播現象をほぼ表わしている。

Fig. 11 は、自由端から伝播した縦波が固定端に到着・反射 ($\tau=2.57$) し、スロート部に至る ($\tau=4.65$) 時間帯での回転軸に沿う変形分布の推移を示したものである。図は、伝播速度の最も早い応力波である縦波の速度で変形 U が先行し、その後をせん断波の速度で変位 V と W が推移していく様子をほぼとらえている。

ここでは、基本的な形状の回転殻についてのみ数値例を示したが、本論文の目的の 1 つである選点法の応力波伝播の問題に対する適用可能性と妥当性に関しては、(1) と (2) の数値例を通して確認できたものと思われる。

5. おわりに

本論文は、回転殻の応力波伝播の問題について、空間領域に対する選点法の適用性、有効性の検討を行ったものである。その際、選点法の適用により得られた時間に関する 2 階連立微分方程式に対し、陽および陰な直接時間積分公式を用いて構成した、2 種の計算アルゴリズムを提示した。ここで得られた成果を要約すれば次のようになる。

(1) 選点法と陽解法の組合せの場合には、両手法の特性が活かされて、比較的度数の低い行列演算よりなる計算アルゴリズムが必然的に得られた。また、中心差分法を用いるときの時間間隔に関する安定限界と選点法に

基づいて定式化された固有値問題の関連を明確にした。

(2) 選点法と陰解法の組合せの場合には、FEMで知られている部分構造法に類似な手法を導入することにより、大次元な行列演算を回避できる計算アルゴリズムとなった。

(3) 回転殻修正理論式の選点法による空間領域の近似の仕方は、一要素内の選点数 M には 11 程度を選び、要求される精度に呼応して要素分割数 N を増やすことが適切である。

(4) 数値例として、円筒殻と双曲殻の波動伝播問題の解析例を示した。いずれもほぼ十分な精度の解が得られており、選点法の有効性が確認できた。

本研究は選点法の空間領域に対する適用性、有効性に限定して検討したが、今後は、ここで用いた時間積分スキームや他の積分スキームの組合せによる多数の解析を実施し、精度と効率の検討を行うとともに、せん断変形と回転慣性の応力波伝播問題に及ぼす影響を定量的に明らかにする予定である。

なお、数値計算には、北海道大学大型計算機センターの HITAC M-280 H を用いたことを付記する。

付録 I

行列 C, D, E, G および H の非零成分は次のようになる。

$$C_{11} = \rho_1 / s^2, \quad C_{22} = \nu_1 C_{11}, \quad C_{33} = \nu_1 x C_{11}$$

$$C_{44} = \delta / s^2, \quad C_{55} = \nu_1 C_{44}$$

$$C_{14} = C_{41} = -\delta (r_1 - r_2) / s^2$$

$$C_{25} = C_{52} = \nu_1 C_{14}$$

$$d_{11} = \rho_4 / s^2, \quad d_{12} = -d_{21} = n \nu_2 / s r$$

$$d_{13} = -d_{31} = (\nu r_2 + \rho_1 \rho_3 r_1) / s$$

$$d_{14} = -d_{41} = -\delta r_1' / s^2, \quad d_{22} = \nu_1 d_{11}$$

$$d_{33} = \nu_1 x d_{11}, \quad d_{44} = \gamma \delta / s^2, \quad d_{55} = \nu_1 d_{44}$$

$$d_{34} = -d_{43} = \delta (r_1 - r_2) r_1 + \nu_1 x \rho_1 / s$$

$$d_{25} = d_{52} = -\nu_1 \delta r_1' / s^2, \quad d_{45} = -d_{54} = n \delta \nu_2 / s r$$

$$e_{11} = -\nu r_1 r_2 - \rho_2 \rho_6$$

$$e_{22} = \nu_1 r_1 r_2 - \rho_2 (\rho_5 + \nu_1 x r_2)$$

$$e_{33} = -\nu_1 n^2 x \rho_2 / r^2 - |r_1^2 + r_2^2 + 2\nu r_1 r_2 + \delta (r_1 - r_2)(r_1^3 - r_2^3)|$$

$$e_{44} = -\delta (\nu r_1 r_2 + \rho_6) - \nu_1 x \rho_1$$

$$e_{55} = \delta (\nu r_1 r_2 - \rho_6) - \nu_1 x \rho_2$$

$$e_{12} = e_{21} = -n \gamma \nu_2 \rho_2 / s r$$

$$e_{13} = |r_1' \rho_1 + \gamma (r_1 - r_2)(1 + \delta r_2^2)| / s$$

$$e_{31} = |\nu_1 x r_1' \rho_1 - \gamma (\nu_1 x r_1 + \nu r_1 + r_2 \rho_2)| / s$$

$$e_{14} = e_{41} = -\delta (r_1 - r_2) \rho_6 + \nu_1 x \rho_1 r_1$$

$$e_{15} = e_{51} = -n \gamma \delta (r_1 - r_2) \nu_2 / s r$$

$$e_{23} = e_{32} = -n (\nu r_1 + r_2 \rho_2 \rho_3) / r$$

$$e_{24} = e_{42} = e_{15}$$

$$e_{25} = e_{52} = -\delta (r_1 - r_2) \rho_6 + \nu_1 x \rho_2 \nu_2$$

$$e_{34} = e_{43} = \nu_1 x \rho_1 / s - \delta \gamma r_2 (r_1 - r_2) / s$$

$$e_{35} = e_{53} = n |x \nu_1 - \delta (r_1 - r_2) r_2 \rho_3| / r$$

$$e_{45} = e_{54} = -n \delta \gamma \nu_2 / s r$$

$$g_{11} = b \rho_1 / s, \quad g_{14} = -b \delta (r_1 - r_2) / s, \quad g_{22} = \nu_1 g_{11}$$

$$g_{25} = \nu_1 g_{14}, \quad g_{31} = g_{14}, \quad g_{34} = b \delta / s$$

$$g_{42} = \nu_1 g_{14}, \quad g_{45} = \nu_1 g_{34}, \quad g_{53} = b \nu_1 x \rho_1 / s$$

$$h_{11} = b \nu \gamma / s, \quad h_{12} = b \nu n / r, \quad h_{21} = -b \nu_1 n / r$$

$$h_{13} = b (r_1 \rho_1 + \nu r_2), \quad h_{22} = -b \nu_1 \gamma / s$$

$$h_{33} = -b \delta (r_1 - r_2) r_1, \quad h_{34} = b \delta \nu \gamma / s$$

$$h_{35} = b \delta \nu n / r, \quad h_{44} = -b \nu_1 \delta n / r$$

$$h_{45} = -b \nu_1 \delta \gamma / s, \quad h_{51} = -b \nu_1 x \rho_1 r_1$$

$$h_{54} = b \nu_1 x \rho_1$$

ここに、

$$\rho_1 = 1 + \delta (r_1 - r_2) r_1, \quad \rho_2 = 1 - \delta (r_1 - r_2) r_2$$

$$\rho_3 = 1 + \nu_1 x, \quad \rho_4 = \gamma + \delta r_1' (2r_1 - r_2)$$

$$\rho_5 = \nu_1 \gamma^2 / s^2 + n^2 / r^2, \quad \rho_6 = \gamma^2 / s^2 + \nu_1 n^2 / r^2$$

$$\rho_7 = 1 + \delta (3r_1 - 2r_2) r_1, \quad \nu_1 = (1 - \nu) / 2$$

$$\nu_2 = (1 + \nu) / 2, \quad \nu_3 = (3 - \nu) / 2$$

$$b = 1 / (1 - \nu^2)$$

付録 II

$\alpha_e^{(k)}$ および $\alpha_e^{(0)}$ の具体的内容は以下ようになる。たとえば、式 (9) の u に関する式から得られる成分は次のようである。ただし、記述を簡単にするため式 (9) の係数は定数とする。

$\alpha_e^{(k)}$ について;

$$\alpha_e^{(k)}(i, j) = c_{11} B(i+1, j+1) + d_{11} A(i+1, j+1) + e_{11} \delta_{ij}$$

$$\alpha_e^{(k)}(i, M+j) = d_{12} A(i+1, j+1) + e_{12} \delta_{ij}$$

$$\alpha_e^{(k)}(i, 2M+j) = d_{13} A(i+1, j+1) + e_{13} \delta_{ij}$$

$$\alpha_e^{(k)}(i, 3M+j) = c_{14} B(i+1, j+1) + d_{14} A(i+1, j+1) + e_{14} \delta_{ij}$$

$$\alpha_e^{(k)}(i, 4M+j) = e_{15} \delta_{ij}$$

ただし、 $i, j = 1 \sim M$, δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号であり、 $A(i+1, j+1)$ および $B(i+1, j+1)$ は式 (13) の行列 A および B の成分を表わす。

$\alpha_e^{(0)}$ について;

$$\alpha_e^{(0)}(i, j) = c_{11} B(i+1, l) + d_{11} A(i+1, l)$$

$$\alpha_e^{(0)}(i, 2+j) = d_{12} A(i+1, l)$$

$$\alpha_e^{(0)}(i, 4+j) = d_{13} A(i+1, l)$$

$$\alpha_e^{(0)}(i, 6+j) = c_{14} B(i+1, l) + d_{14} A(i+1, l)$$

$$\alpha_e^{(0)}(i, 8+j) = 0$$

ただし、 $i = 1 \sim M$, $j = 1, 2$ であり、 l は次の約束に従うものとする。

$$l \begin{cases} = 1 & ; j = 1 \\ = M + 2 & ; j = 2 \end{cases}$$

参 考 文 献

- 1) たとえば、日本機械学会・衝撃と破壊調査研究分科会：文献目録集，1981（1965～1978の間の国内外の衝撃関係文献約4200の分類収録）。
- 2) 三上 隆：空間領域に選点法を用いた回転殻の静的および動的問題の解析，土木学会論文報告集，第341号，pp.69～78，1984。
- 3) Magrab, E. B. : Vibrations of Elastic Structural Members, Sijthoff & Noordhoff, 1979.
- 4) Houbolt, J. C. : A recurrence matrix solution for the dynamic response of Elastic aircraft, J. Aeronaut. Sci., Vol.17, pp.540～550, 1950.
- 5) Hildebrand, F. : Finite Difference Equations and Simulations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1968.
- 6) Leech, J. W. et al. : Stability of finite difference method for solving matrix equation, AIAA. J., Vol.3, No.11, pp.2172～2173, 1965.
- 7) 三上 隆・芳村 仁：選点法による回転殻の固有振動数の解析，土木学会論文報告集，第335号，pp.69～78，1983。
- 8) Reismann, H. and Modige, J. : Forced motion of cylindrical shell, Proc. of ASCE, Vol.94, No.EM 5, pp.1167～1182, 1968.
- 9) Reismann, H. and Weingarten, L. I. : Forced motion of cylindrical shells—A comparison of shell with elasticity theory, Z. A. M. M., Vol.54, pp.181～191, 1974.
- 10) Odaka, T. and Nakahara, I. : Stress in an infinite beam impacted by an elastic bar, Vol.10, No.42, pp.863～872, 1967.

(1985.4.1・受付)