

# 研究展望

## 有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題

### FINITE ELEMENT METHODS IN GEOMETRICALLY NONLINEAR STRUCTURAL ANALYSIS

吉田 裕\*

By Yutaka YOSHIDA

#### 1. はじめに

有限要素法の源流として位置づけられる研究の1つとして、1956年にアメリカ合衆国航空学会誌に発表された論文Turner, Clough, Martin and Topp<sup>1)</sup>がよく挙げられる。以来、電子計算機の進歩・普及、宇宙開発関連技術としての国策的支援、良き時代のアメリカ人の開拓者精神、などが相まって、特にアメリカ合州国において、多くの優秀な頭脳と膨大なエネルギーがこの分野の研究に注がれ、瞬間に有限要素法の理論的基礎が確立された。構造非線形問題の解析に関しても、'60年代の後半から'70年代の前半にかけて質の高い、密度の濃い研究が精力的になされ、現在の解析技術の主要な部分のほとんどすべてはこの時代に固められたものである、といっても過言ではない。

1969年8月に、日本学術振興会とアメリカNSFによる日米科学協力事業の1つとして、マトリックス構造解析および設計法に関する日米セミナーが東京で開かれたが、これが刺激となってわが国においてもこの分野の研究が活発になされるようになった。有限要素法は、土木、建築、機械、造船、航空、など工学全般に共通する解析技術であるから、それぞれの分野に数多くの立派な研究成果が積み上げられてきている。土木学会の論文集に限定しても、文献2)~8)など数多くの先駆的研究成果がみられる。また、有限要素法に関する教科書、参考書も数多く出版されており、非線形有限要素方程式の解法に関しても、文献9)、10)などによくまとめられ、紹介されている。

有限要素法によれば、構造物の形状、荷重条件、境界条件、などの違いに対して解析過程を汎用化することができ、これまでに数多くの汎用コードが開発され、利用されている。非線形解析を対象とするコードであれば、たとえば幾何学的非線形問題、材料非線形問題、接触問題、などの解析が可能である、という説明があり、マニュアルで入力の方法が指示されているだけで、ほとんどの場合、解析法の内容はブラックボックス化されている。このような場合、たとえば幾何学的非線形問題の解析が可能である、といわれれば、どんなに大変形の領域の問題でも解析できると考えても不思議ではない。対象としている汎用コードが世界的に権威のあるものであればなおさらである。

「非線形解析」という用語が「線形解析」と対比して用いられるために、これらが包含している対象領域の広さ、問題の質、解析上の困難さ、などに関しても、両者が同格であるかのように錯覚され、線形解析が安定して解析できるのと同じように、非線形解析も可能であると考えるのも、ある場合には自然なことである。しかし、改めていうまでもなく、非線形は線形でないものすべてを意味するから、非線形解析が対象とすることを期待されている範囲は限りなく広く、線形解析とは比べものにならない困難な問題を非常に多く抱えており、未解決の問題も多く存在するから、人知を尽くして開発された汎用コードといえども適用範囲はごく限られたものになっている、ということは当然のことである。思い込みに基づく期待と現実との間の大きな隔たりが混乱を生じさせている事態が多く見受けられる。

本論文の目的は、対象を幾何学的非線形問題に限定し、海外の研究に限定して、有限要素法による構造非線形問

\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科  
(〒152 目黒区大岡山2-12-1)

題の解析技術の基礎が確立された経緯を再確認し、その後の研究の動向を概観することを通じて、どのような点に解析上の困難があり、それらがどのように対処されているか、などについて、できる限りわかりやすく紹介することにある。このことによって、汎用コードの使用などに際してのより正しい判断のための一助となり、今後の研究に際しての参考になれば、との願いを込めたものであるが、著者の浅学の故に多くの不備が残る結果ともなっている、お許しを請う次第である。

2. 定式化の基礎となる非線形理論

構造物の幾何学的非線形解析過程を有限要素法によって展開しようとするとき、その定式化の基礎となる非線形理論を明確に固めておく必要がある。いうまでもなく、有効な数値解析過程を構成するための理論であるから、その理論体系に基づいて有限要素方程式をどのように定式化するか、得られた有限要素方程式をどのように解き進めるか、という解法の全体的構成と密接に関係してくる。また、変形前の形状を参照して表現するのか、変形後の形状を参照するのか、大きなひずみの領域まで対象とするのか、ひずみは微小とするのか、といった基本的な立場の違いを考えれば、数多くの異なった理論が提案されて当然である。定式化の基礎となる理論に関する研究は'60年代の後半から'70年代の前半に精力的になされ非常に多くの質の高い研究成果が発表され、現在の解析法の基礎はこの時代に固まったものである、ということが出来る。この辺りの事情については Martin<sup>11)</sup>, Hartz et al.<sup>12)</sup>, Stricklin et al.<sup>13)</sup>, Gallagher<sup>14)</sup>, などに詳しい。

現在広く用いられている汎用構造解析コードなどに採用されている幾何学的非線形解析過程のほとんどは、更新ラグランジ定式化 (updated Lagrangian formulation) または全ラグランジ定式化 (total Lagrangian formulation) によって構成されたものである。幾何学的非線形解析の目的は変形の大きな領域の解を求めることであり、実際には材料非線形性も加わる複合非線形問題の解析を意図しているのが普通である。したがって、具体的な解析過程においては全変形を小さな変形の積み重ねとして扱い、全過程を増分に分割して逐次解析をすすめていく増分法をとるのが自然であり、全ラグランジ定式化の立場をとる場合でも増分法によって解析するのが普通である。

有限要素法では要素内の変位分布を補間関数で内挿して離散化するが、簡単な骨組部材などの場合を除き、要素内のひずみエネルギーの積分、特に非線形項に対応する積分を陽な型で実行することが難しく、通常はこの積分を数値積分で処理することになる。しかも、アイソパ

ラメトリック要素では線形項の積分でさえ、いわゆる「Shear locking」の問題を回避するために次数低減積分 (reduced integration) が行われたりする。したがって、基礎としているはずの理論が実際の解析過程とどれだけ整合することになるかについては、個々のケースについて検討の余地が残るが、有限要素法による幾何学的非線形解析の基礎としての非線形理論に関しては、多くの研究者が解法の展開にあたってその基礎として採用してきている、いわば正統的ないくつかの立場がある (Stricklin et al.<sup>13)</sup>, Bathe et al.<sup>15)</sup>, など)。

もちろん、このような理論の適用限界を越えるために独自の理論を展開している研究も数多いが、上述の共通の理論的基礎に至る経緯に対する理解そのものは踏まえられていなければならない。ここでは、上述の1つの代表的な立場を紹介する意味で、Bathe et al.<sup>15)</sup> による、増分形式の全ラグランジおよび更新ラグランジ定式化の基礎理論の概略をまとめておくことにしたい。

(1) 増分形式の Total Lagrangian Formulation

全ラグランジ定式化においては、すべての変数が変形前の初期形状を参照して定義される。Fig. 1 に示すように、空間に固定したデカルト座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  において、初期形状 (0) から  $n$  回の増分後の形状 ( $n$ ) までは既知であるとして、 $n+1$  回目の増分後の形状 ( $n+1$ ) を求めることが要求されているものとする。

仮想仕事の原理より、形状 ( $n+1$ ) におけるつり合い条件式は次のように与えることができる。

$$\int_{V_{(0)}} \tau_{ijm+1} \delta \epsilon_{ijm+1} dV_{(0)} = \int_{S_{\sigma(0)}} \bar{p}_{\kappa n+1} \delta u_{\kappa} dS_{(0)} + \int_{V_{(0)}} \rho_{0i} \bar{X}_{\kappa i n+1} \delta u_{\kappa} dV_{(0)} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $\tau$  は第2種 Piola-Kirchhoff 応力、 $\epsilon$  は Green-Lagrange ひずみ、 $\bar{p}$  は表面力、 $u$  は変位、 $\rho \bar{X}$  は物体力、であり、( $n+1$ ) は初期形状 (0) を参照した ( $n+1$ ) つり合い状態における値を意味する。また、微小ひずみを対象とするものとして、ひずみ-変位関係式は次のように与えられる。

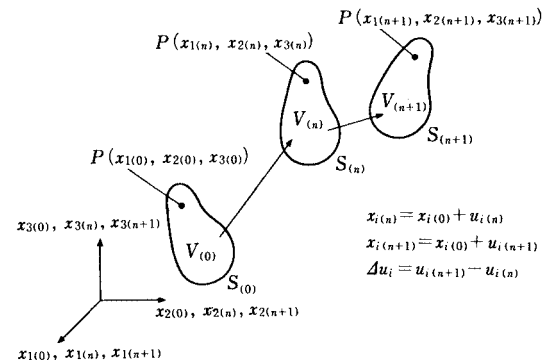


Fig. 1 Motion of body in Cartesian co-ordinate system<sup>15)</sup>.

$$\begin{aligned} x_i(n) &= x_i(0) + u_i(n) \\ x_i(n+1) &= x_i(0) + u_i(n+1) \\ \Delta u_i &= u_i(n+1) - u_i(n) \end{aligned}$$

$$\epsilon_{i,j(n+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{i(n+1)}}{\partial x_{j(0)}} + \frac{\partial u_{j(n+1)}}{\partial x_{i(0)}} + \frac{\partial u_{k(n+1)}}{\partial x_{i(0)}} \frac{\partial u_{k(n+1)}}{\partial x_{j(0)}} \right) \dots\dots\dots (2)$$

ここで、未知の応力成分  $\tau_{i,j(n+1)}$  およびひずみ成分  $\epsilon_{i,j(n+1)}$  を  $(n)$  における既知量と  $(n)$  から  $(n+1)$  への増分に分解して次のように表わす。

$$\tau_{i,j(n+1)} = \tau_{i,j(n)} + \Delta \tau_{i,j} \dots\dots\dots (3)$$

$$\epsilon_{i,j(n+1)} = \epsilon_{i,j(n)} + \Delta \epsilon_{i,j} \dots\dots\dots (4)$$

$\epsilon_{i,j(n)}$  は既知量であるから、式 (4) より

$$\delta \epsilon_{i,j(n+1)} = \delta \Delta \epsilon_{i,j} \dots\dots\dots (5)$$

さらに、ひずみの増分  $\Delta \epsilon_{i,j}$  を次のように線形の部分  $\Delta \epsilon_{i,j}^L$  と非線形の部分  $\Delta \epsilon_{i,j}^N$  に分けて表わす。

$$\Delta \epsilon_{i,j} = \Delta \epsilon_{i,j}^L + \Delta \epsilon_{i,j}^N \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$\Delta \epsilon_{i,j}^L = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_{j(0)}} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_{i(0)}} \right) + \left( \frac{\partial u_{k(n)}}{\partial x_{i(0)}} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_{j(0)}} + \frac{\partial u_{k(n)}}{\partial x_{j(0)}} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_{i(0)}} \right) \right] \dots\dots\dots (7)$$

$$\Delta \epsilon_{i,j}^N = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_{i(0)}} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_{j(0)}} \right) \dots\dots\dots (8)$$

$$\Delta u_i = u_{i(n+1)} - u_{i(n)} \dots\dots\dots (9)$$

応力の増分  $\Delta \tau_{i,j}$  とひずみの増分  $\Delta \epsilon_{i,j}$  の関係は応力-ひずみ関係のテンソル成分  $D_{i,jr,s(0)}$  を用いて次のように表わすことができる。

$$\Delta \tau_{i,j} = D_{i,jr,s(0)} \Delta \epsilon_{r,s} \dots\dots\dots (10)$$

式 (3)~式 (10) を用いて式 (1) を書き改めると次の式が得られる。

$$\int_{V_{(0)}} D_{i,jr,s(0)} \Delta \epsilon_{r,s} \delta \Delta \epsilon_{i,j} dV_{(0)} + \int_{V_{(0)}} \tau_{i,j(n)} \delta \Delta \epsilon_{i,j}^N dV_{(0)} = \int_{S_{\sigma(n)}} \bar{p}_{k(n+1)} \delta \Delta u_k dS_{(0)} + \int_{V_{(0)}} \rho_{(0)} \bar{X}_{k(n+1)} \delta \Delta u_k dV_{(0)} - \int_{V_{(0)}} \tau_{i,j(n)} \delta \Delta \epsilon_{i,j}^L dV_{(0)} \dots\dots\dots (11)$$

式 (11) が定式化の基礎となるものであるが、式 (11) の左辺第 1 項が変位増分  $\Delta u_i$  に関して非線形であることから、さらに次のような近似

$$\Delta \tau_{i,j} \approx D_{i,jr,s(0)} \Delta \epsilon_{r,s}^L \dots\dots\dots (12)$$

$$\delta \Delta \epsilon_{i,j} \approx \delta \Delta \epsilon_{i,j}^L \dots\dots\dots (13)$$

を導入して得られる次式、

$$\int_{V_{(0)}} D_{i,jr,s(0)} \Delta \epsilon_{r,s} \delta \Delta \epsilon_{i,j} dV_{(0)} \approx \int_{V_{(0)}} D_{i,jr,s(0)} \Delta \epsilon_{r,s}^L \delta \Delta \epsilon_{i,j}^L dV_{(0)} \dots\dots\dots (14)$$

によって式 (11) を書き換えて有限要素法による幾何学的非線形解析の基礎としている。なお、ここでは材料は弾性であるものとして式 (10) を与えているが、材料非線形問題が加わる場合には式 (10) は対象とする材料およびその構成関係によって書き改める必要がある。

(2) Updated Lagrangian Formulation

更新ラグランジ定式化においては、すべての変数が第

$n$  つり合い形状を参照して定義される。したがって、式 (11) に対応する式として次式が得られる。

$$\int_{V_{(n)}} D_{i,jr,s(n)} \Delta \epsilon_{r,s}^L \delta \Delta \epsilon_{i,j}^L dV_{(n)} + \int_{V_{(n)}} \sigma_{i,j(n)} \delta \Delta \epsilon_{i,j}^N dV_{(n)} = \int_{S_{\sigma(n)}} \bar{p}_{k(n+1)} \delta \Delta u_k dS_{(n)} + \int_{V_{(n)}} \rho_{(n)} \bar{X}_{k(n+1)} \delta \Delta u_k dV_{(n)} - \int_{V_{(n)}} \sigma_{i,j(n)} \delta \Delta \epsilon_{i,j}^L dV_{(n)} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $\sigma$  は Cauchy 応力であり、 $D_{i,jr,s(n)}$  は小さなひずみ増分をこれに対応する応力増分と関係づける接線構成関係のテンソル成分である。

なお、第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力  $\tau$  と Cauchy 応力  $\sigma$  とは次のような関係にある。

$$\tau_{i,j(n)} = \frac{\rho_{(0)}}{\rho_{(n)}} \frac{\partial x_{i(0)}}{\partial x_{k(n)}} \sigma_{k,l(n)} \frac{\partial x_{j(0)}}{\partial x_{l(n)}} \dots\dots\dots (16)$$

以上に、幾何学的非線形問題の有限要素法による解析においてとられている基礎理論の典型的な例を示したが、この理論の適用限界などについては Oden<sup>16)</sup> に詳しく論じられている。また、このような基礎理論が固まっていく過程で、Novozhilov<sup>17)</sup>、Biot<sup>18)</sup>、Fung<sup>19)</sup>、Washizu<sup>20)</sup>、などがよく勉強された。

3. 有限要素方程式の構成

有限要素法によって幾何学的非線形問題を解析した最初の研究は、1960年に Turner, Dill, Martin, Melosh<sup>21)</sup> によって発表されたものであるといわれている。1965年に AFFDL (Air Force Flight Dynamic Laboratory) の主催で第 1 回 Matrix Methods in Structural Mechanics に関する国際会議がアメリカ Ohio 州 Dayton で開催されたが、この会議に発表された構造非線形解析に関する論文、たとえば Martin<sup>22)</sup>、Argyris<sup>23)</sup>、また上述の会議論文ではないが、Mallett and Berke<sup>24)</sup>、Gallagher and Padlog<sup>25)</sup>、Hartz<sup>26)</sup>、Kapur and Hartz<sup>27)</sup>、などでは幾何学的非線形性の影響を各増分段階ごとに修正して構成した接線剛性マトリックスを用いて、増分形で解き進める方法をとっている。この時代はまだ基礎理論や解法に関する研究の積み重ねも十分でなく、剛体運動の評価もあいまいであったから、非常に小さな増分で解くことによって解法の不備を補う結果となっているものも多い。しかし、1965年当時のわが国の電子計算機の事情を考えれば、構造非線形問題を電子計算機で解くことそれ自体が驚異的なことであった。

その後非線形理論との整合性が意識されるようになり、10年ほどの間に、Oden<sup>28)</sup>、Connor et al.<sup>29)</sup>、Brebba and Connor<sup>30)</sup>、Bogner, Fox and Schmit<sup>31)</sup>、Mallett and Marcal<sup>32)</sup>、Murray and Wilson<sup>33)</sup>、Wempner<sup>34)</sup>、Stricklin et al.<sup>35)</sup>、Haisler, Stricklin and Stebbins<sup>36)</sup>、Belytschko and Hsieh<sup>37)</sup>、その他数多くの優れた研究が

精力的に行われて解法の基礎が固まった。

ここに有限要素方程式の誘導過程の概略を示し、問題点などについて言及する。

(1) 有限要素剛性方程式の誘導過程の概略

第2種 Piola-Kirchhoff 応力テンソル成分のベクトル  $\{\tau\}$  および対応する Green-Lagrange ひずみテンソル成分のベクトル  $\{\epsilon\}$  を定義すれば、仮想仕事式 (1) の左辺の内部仮想仕事の項を次のように書くことができる。

$$\int_{V_0} \tau_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV_0 = \int_{V_0} \langle \tau \rangle | \delta \epsilon | dV_0 \dots \dots \dots (17)$$

ここに、 $\langle \rangle$  は行ベクトルを、 $| \cdot |$  は列ベクトルを意味する。応力-ひずみ関係は対称マトリックス  $[D]$  によって次のように与えられる。

$$\{\tau\} = [D] \{\epsilon\} \dots \dots \dots (18)$$

ひずみ-変位関係は式 (2) のように与えられるから、ひずみ成分を変位に関して線形の部分  $\{\epsilon^L\}$  と非線形の部分  $\{\epsilon^N\}$  とに分けることができる。

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^L\} + \{\epsilon^N\} \dots \dots \dots (19)$$

したがって、式 (17) の右辺の積分は次のような3つの部分に分れることになる。

$$\delta U_L = \int_{V_0} \langle \delta \epsilon^L \rangle [D] \{\epsilon^L\} dV_0 \dots \dots \dots (20)$$

$$\delta U_M = \int_{V_0} \langle \delta \epsilon^L \rangle [D] \{\epsilon^N\} dV_0 + \int_{V_0} \langle \delta \epsilon^N \rangle [D] \{\epsilon^L\} dV_0 \dots \dots \dots (21)$$

$$\delta U_N = \int_{V_0} \langle \delta \epsilon^N \rangle [D] \{\epsilon^N\} dV_0 \dots \dots \dots (22)$$

式 (20) に対応して得られるのが通常の線形剛性マトリックスであり、式 (21) および (22) に対応して得られるのが非線形剛性マトリックスである。ここでは形式的な表記法をとっているために簡単にみえるが、トラス部材や平面骨組部材などの簡単な問題を除いて、式(21)、(22)の評価は非常に複雑で、その内容を陽な形で示すことは不可能な場合が普通である。

すなわち、有限要素法では解析対象領域を数多くの小さな要素に分割し、隣接する要素が共有するように設定された節点に節点変位を導入する。解析の過程で基本変数となるのは節点に導入されたすべての節点変位  $\{u\}$  である。要素内の変位分布は節点変位  $\{u\}$  の関数として一義的に決まるように補間される。したがって、ひずみ-変位関係によって、要素内のひずみ分布も節点変位の関数として次のように表わされることになる。

$$\{\epsilon^L\} = [B^L] \{u\} \dots \dots \dots (23)$$

$$\{\epsilon^N\} = [B^N] \{u\} \dots \dots \dots (24)$$

しかし、 $\{\epsilon^N\}$  は変位の2次の関数であり、式 (24) の形に表わすためには変位の一方の項を固定して  $[B^N]$  の中に入れておかなければならない。すなわち、 $[B^N]$  は変位の関数である。具体的な内容は、対象とする問題、補間の仕方、基礎とする理論の立場、などの違いによっ

て全く異なったものとなるが、式 (23)、(24) を式 (20) および式 (21)、(22) に代入して次のようなマトリックス方程式の係数マトリックスが得られる。

$$[[K^L] + [K^M] + [K^N]] \{u\} = \{f\} \dots \dots \dots (25)$$

ここに、 $[K^L]$  は線形の剛性マトリックス、 $[K^M]$  は変位の1次関数、 $[K^N]$  は変位の2次関数である。また、 $\{f\}$  は節点外力のベクトルである。式 (25) が幾何学的非線形解析の有限要素方程式の1つの代表的な形である。

(2) 増分形の有限要素方程式について

先に示した増分形の基礎理論 (式 (11) または式 (15)) に基づいて構成される有限要素方程式は次のような形に帰着する。すなわち、式 (11) の左辺第1項を式 (14) で置き換えた場合、式 (14) の右辺に対応して得られるのは次のようなものである。

$$\int_{V_0} D_{ijrs} \Delta \epsilon_{rs}^L \delta \Delta \epsilon_{ij}^L dV_0 \Rightarrow [K] \{\Delta u\} \dots \dots \dots (26)$$

ここに、 $[K]$  は形状  $(n)$  における変位場を既知として固定して得られるひずみ増分の線形項 (式 (7)) に対応する、増分形の線形剛性マトリックスであり、形状  $(n)$  の変位場には依存するものである。したがって、 $[K]$  を  $u_m$  に依存しない部分  $[K_L]$  と  $u_m$  に依存する部分  $[K_M]$  とに分けて、それぞれ微小変位の剛性マトリックスおよび初期変位の剛性マトリックスとよぶ場合もある。

また、式 (11) の左辺第2項に対応して得られるのは次のようなものである。

$$\int_{V_0} \tau_{ijm} \delta \Delta \epsilon_{ij}^N dV_0 \Rightarrow [K_C] \{\Delta u\} \dots \dots \dots (27)$$

$[K_C]$  はひずみ増分の非線形項 (式 (8)) に対応する、いわゆる増分形の幾何剛性マトリックスであり、形状  $(n)$  での応力  $\tau_m$  によって評価されるから初期応力の剛性マトリックスともよぶものである。式 (11) の右辺第1および第2項に対応するのは  $(n+1)$  の形状において作用する等価節点外力項  $\{f_{(n+1)}\}$  であるが、これは  $(n)$  の形状において作用していた部分  $\{f_{(n)}\}$  と  $(n)$  から  $(n+1)$  への増分  $\{\Delta f\}$  との和として次のように表わすことができる。

$$\{f_{(n+1)}\} = \{f_{(n)}\} + \{\Delta f\} \dots \dots \dots (28)$$

式 (11) の右辺第3項に対応するのは、 $(n)$  の形状における応力によって評価される内部節点力  $\{f_{int(n)}\}$  である。したがって、 $(n)$  の形状でつり合い条件が完全に満たされている場合には、式 (28) の  $\{f_{(n)}\}$  と相殺されるべきものであるが、計算の過程で残差  $\{R_{(n)}\}$  が生じているのが普通であるから、ここでは次のように記述する。

$$\{f_{(n)}\} - \{f_{int(n)}\} = \{R_{(n)}\} \dots \dots \dots (29)$$

したがって、式 (11) または式 (15) に対応して得られる有限要素方程式は次のようなものとなる。

$$[[K] + [K_C]] \{\Delta u\} = \{\Delta f\} + \{R_{(n)}\} \dots \dots \dots (30)$$

または、

$$[[K_L]+[K_u]+[K_c]]\{\Delta u\}=\{\Delta f\}+\{R\}_{lm} \dots\dots\dots(31)$$

ここに、 $[K_L]$ は通常の微小変位解析の線形剛性マトリックスである。

式(30)または式(31)の係数マトリックスがいわゆる接線剛性マトリックス $[K_T]$ である。すなわち、式(30)または式(31)は次のように書かれる。

$$[K_T]\{\Delta u\}=\{\Delta f\}+\{R\}_{lm} \dots\dots\dots(32)$$

式(28)、(29)で示したように、式(32)の右辺は基礎理論(式(11)または式(15))に忠実に表現すれば次のようなものである。

$$\{\Delta f\}+\{R\}_{lm}=\{f\}_{l_{m+1}}-\{f_{int}\}_{lm} \dots\dots\dots(33)$$

したがって、式(32)を次のように書くこともできる。

$$[K_T]\{\Delta u\}=\{f\}_{l_{m+1}}-\{f_{int}\}_{lm} \dots\dots\dots(34)$$

式(32)または式(34)が通常用いられている幾何学的構造非線形解析の有限要素方程式である。

接線剛性マトリックスの誘導は、要素内の変位や応力の分布を多項式で補間し、要素領域の積分は通常数値積分によって実行される。誘導に際して、ひずみの非線形項の評価に線形項の評価と同じ変位補間関数を用いると非線形項に対応する剛性マトリックスの誘導が非常に複雑になったり、力学的に矛盾が生じたりするために、実際にはそれぞれの項に異なった補間関数を用いたり、次数低減積分を行ったりするのが普通である。接線剛性マトリックスの具体的な内容を陽に与えている文献は、面外の変位を1次式で補間して誘導した三角形板要素に関するもの<sup>35)</sup>、立体骨組構造に関する Bathe and Bolourch<sup>38)</sup>、平面骨組部材に関して解析的な展開を試みた Kondoh and Atluri<sup>39)</sup>、などがあり、トラス構造や平面骨組構造など簡単な対象に関するものは数多くの教科書、参考書に与えられているが、アインパラメトリック要素などに関するものは少ない。

#### 4. 有限要素方程式の解法

構成された有限要素方程式をどのようにして解くか、その解法のアルゴリズムについて述べる前に、簡単な問題ではあるが、解析結果の例を示しておくことにしたい。

対象は、Williams' toggle と名付けられて、よく解析対象として取り上げられる問題のライズをやや大きくして分岐座屈が共存するようにつくり変えた Fig. 2(a) に示すような問題である。図は高さ方向のスケールを拡大して描いている。荷重の大きさと荷重作用点の鉛直変位との関係を Fig. 2(b) に示す。図中、点Aは分岐点であり、点Bは極大点である。また、図中に小文字で示した点(a)~(f)および(g)~(l)に対応する変形型を Fig. 2(d) に示す。点Aが対称モードから非対称モードへの分岐が生ずる点であることがわかる。基本的な経路O—A—Bは幾何学的非線形性を反映して徐々にその

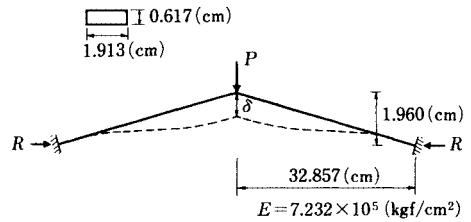


Fig. 2(a) Schematic of shallow two-bar frame.

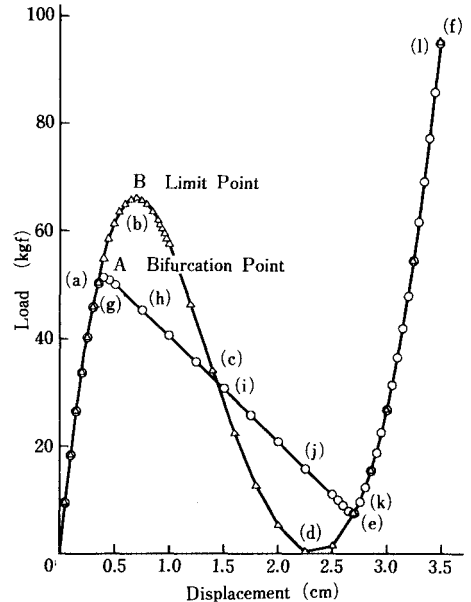


Fig. 2(b) Variations of load-point displacement with load

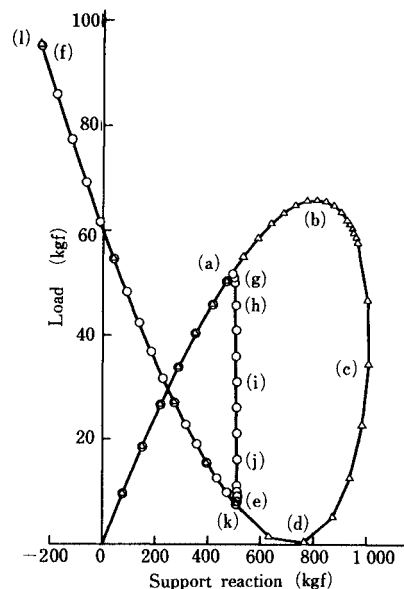


Fig. 2(c) Variations of support reaction with load.

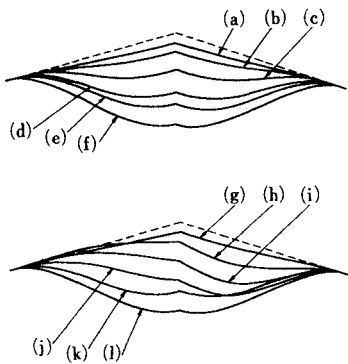


Fig. 2(d) Pre- and post-buckling configurations.

勾配が変わる曲線となっている。なお、Fig. 2 (c) は、荷重の大きさと支点の水平反力との関係を示したものである。

非線形有限要素方程式の解法のアルゴリズムを考えるにあたっての問題点は次の4点に分けられる。すなわち、(1) 基本経路をどのようにして求めるか、(2) 極大点をどのようにして求めるか、(3) 分岐点をどのようにして求めるか、(4) 座屈後の経路をどのようにして求めるか、である。

いうまでもなく、特定された構造系を対象として丹念にその特性を評価しながら解きすすめる場合には、これらの諸点がそう大きな問題とはならない場合は多い。しかし、有限要素法を対象としている研究者が目標としてきているものは、境界条件や荷重条件の異なる広範囲の問題に汎用的に適用することのできる、効率のよい系統的な解法を構成することである。対象とすることになる構造系は一般に相当な大次元問題であり、計算時間の制約は非常に厳しく、大きな問題となる。有限要素方程式の解法は解析の要となる部分であり、多くの研究が積み上げられてきてはいるが、構造系の非線形特性や解析法の内容に関する予備知識をほとんどたない技術者でも間違いなく安定に解が得られるような効率のよい解法を構成する、という目標に対してはまだまだ完成の域にはほど遠い、というのが現実である。

ここでは、現在共通の理解を得ていると考えられる、いくつかのアルゴリズムについて概略を示す。

(1) 解法のアルゴリズムの基本形

式 (25) は幾何学的非線形有限要素方程式の1つの基本的な形であり、'70年代前半までのこの方程式の解法の実状については Gallagher<sup>11)</sup>, Mallett and Haftka<sup>10)</sup> に詳しい。

構造物に作用する荷重  $\{f\}$  はその基本分布形状  $\{f_{ref}\}$  は変わらずにその大きさが増大していくという形で次のように与えることができる。

$$\{f\} = \lambda \{f_{ref}\} \dots \dots \dots (35)$$

したがって、式 (25) を次のように書くものとする。

$$[[K^L] + [K^M] + [K^{N2}]] \{u\} = \lambda \{f_{ref}\} \dots \dots \dots (36)$$

もし、解  $\{u\}$  の推定値  $\{u^0\}$  を

$$[K^L] \{u^0\} = \lambda \{f_{ref}\} \dots \dots \dots (37)$$

の解などとして、妥当に評価することができるならば、変位の関数である  $[K^M]$ ,  $[K^{N2}]$  を  $\{u^0\}$  によって近似的に評価することによって、次式により、変位の第1近似解  $\{u^1\}$  を求めることができる。

$$[K^L] \{u^1\} = \lambda \{f_{ref}\} - [[K^M(u^0)] + [K^{N2}(u^0)]] \{u^0\} \dots \dots \dots (38)$$

さらに、変位の第  $j$  近似解  $\{u^j\}$  を次式によって繰返し求めることができる。

$$[K^L] \{u^j\} = \lambda \{f_{ref}\} - [[K^M(u^{j-1})] + [K^{N2}(u^{j-1})]] \{u^{j-1}\} \dots \dots \dots (39)$$

もし、このようにして求めた  $\{u^j\}$  が  $\{u^{j-1}\}$  と同じであるとみなせるように収束するならば、 $\{u^j\}$  は式 (36) の解である。

以上のアルゴリズムを次のように書き換えることができる。すなわち、 $\{u^j\}$  と  $\{u^{j-1}\}$  の差を  $\{\Delta u^j\}$  と書き、

$$\{u^j\} = \{u^{j-1}\} + \{\Delta u^j\} \dots \dots \dots (40)$$

これを式 (39) に代入して整理すれば、次式が得られる。

$$[K^L] \{\Delta u^j\} = \lambda \{f_{ref}\} - [[K^L] + [K^M(u^{j-1})] + [K^{N2}(u^{j-1})]] \{u^{j-1}\} = \{R^{j-1}\} \dots \dots \dots (41)$$

すなわち、式 (41) を解き、式 (40) によって補正した変位によって式 (41) の右辺を再評価してこれを解き、 $\{\Delta u^j\}$  が零とみなせるようになるまで繰返し計算をする。

式 (41) の係数マトリックス  $[K^L]$  は収束計算の過程で変わることがなく、効率的ではあるが、式 (41) のアルゴリズムでは初期推定値  $\{u^0\}$  として相当よい近似値を与える場合でないとい収束しない。すなわち、非線形性の強い問題では収束解を求めるのが困難である。

方程式(36)を近似値  $\{u^{j-1}\}$  のまわりで Taylor 展開し、最初の2項だけを残して  $\{u^j\}$  を望む形に書くと次式が得られる。

$$[K_T(u^{j-1})] \{\Delta u^j\} = \lambda \{f_{ref}\} - [[K^L] + [K^M(u^{j-1})] + [K^{N2}(u^{j-1})]] \{u^{j-1}\} = \{R^{j-1}\} \dots \dots \dots (42)$$

ここに、 $[K_T]$  は  $[[K^L] + [K^M(u)] + [K^{N2}(u)]] \{u\}$  を  $\{u\}$  で微分して得られる接線剛性マトリックスである。式 (42) に基づいて収束計算を行う解法が、いわゆる Newton-Raphson 法である。 $[K_T]$  は  $\{u\}$  の関数であるから、収束計算の過程で  $\{u^j\}$  が補正されるたびに  $[K_T]$  をつくり換えなければならない。

式 (42) と式 (40) による収束計算でも、初期近似値  $\{u^0\}$  が目標とする解に相当近いものでないと収束解が得

られず、実際には全荷重に対する解を一度に求めることはできないのが普通である。したがって、通常は荷重を徐々に増加させて収束解を求めながら解きすすめていく増分法がとられる。

(2) 増分法による解法について

形状 (n) における外力  $\{f\}_m$  に対してつり合い条件を満たす解  $\{u\}_m$  が求められている場合に、 $\{f\}_{m+1}$  ( $=\{f\}_m + \{\Delta f\}$ ) に対する解を求めるための増分式が式 (32) である。すなわち、

$$[K_T(u_m)] \{\Delta u\} = \{\Delta f\} + (\{f\}_m - \{f_{int}(u_m)\}) = \{\Delta f\} + \{R\}_m \dots \dots \dots (43)$$

式 (43) の右辺の  $\{R\}_m$  は形状 (n) における節点外力  $\{f\}_m$  と  $\{u\}_m$  で評価される要素応力に対応する内部節点力  $\{f_{int}(u_m)\}$  の差であるから、形状 (n) において正しくつり合い条件が満たされている場合には零となるべきものであるが、数値計算のすすめ方によっては必ずしも零となるとは限らないので、この項を残している。

初期の頃は、この不つり合い力の項を考慮せずに、増分ごとに  $[K_T]$  を修正するだけで逐次計算を進めていく方法も広く行われていたが、誤差が累積するために、増分を非常に小さくとらない限り、本来の解とはかけ離れた解を与えることになることから、その改善策として不つり合い力が考慮されるようになった経緯がある。式 (43) は式 (34) と内容は同じであり、式 (34) と式 (42) とを比較すれば明らかなように、式 (43) によって順次解析をすすめることは各増分ごとに Newton-Raphson 法の収束計算の第 1 ステップだけを行っていることに相当する。

収束計算をせずに式 (43) によって解析をすることも広く行われた (Hofmeister et al.<sup>41)</sup> など) が、この場合でも、各荷重増分段階で相当よい精度でつり合い条件が満たされていないと誤差が累積する。したがって、よい精度の解を得ようとすれば荷重増分を非常に小さくとらなければならないと、大次元の問題の解析は計算費用の面から事実上不可能になる。解析精度の向上を目指して、接線剛性マトリックスの評価を 1 つ前の計算で得られた増分を考慮して、 $[K_T(u_m + \frac{1}{2} \Delta u)]$  として構成して解析をすすめる方法 (Roberts and Ashwell<sup>42)</sup>) など試みられたが、大勢は各増分ごとに Newton-Raphson 法またはその変形に属する方法によって収束解を求めながら解析するようになっている。

(3) 修正 Newton-Raphson 法

増分形の基礎方程式 (式 (34)) を式 (42) と比較すれば容易に類推することができるように、式 (34) に対応する Newton-Raphson 法の解式の標準的な形は次式のようになる。

$$[K_T(u^{j-1})] \{\Delta u^j\} = \{f\}_{m+1} - \{f_{int}(u^{j-1})\} = \{R^{j-1}\} \dots \dots (44)$$

$$\{u^j\} = \{u^{j-1}\} + \{\Delta u^j\} \dots \dots \dots (45)$$

形状 (n) に対して得られた、つり合い条件

$$\{R\}_m = \{f\}_m - \{f_{int}(u_m)\} = \{0\} \dots \dots \dots (46)$$

を正しく満たす解  $\{u\}_m$  を初期値

$$\{u^0\} = \{u\}_m \dots \dots \dots (47)$$

として、 $\{\Delta u^j\}$  が零とみなせる程度に小さくなるまで式

(44) および式 (45) による繰返し計算を行い、得られる収束解  $\{u^j\}$  は形状 (n+1) におけるつり合い条件

$$\{R\}_{m+1} = \{f\}_{m+1} - \{f_{int}(u_{m+1})\} = \{0\} \dots \dots \dots (48)$$

を満たす解である。

上述のアルゴリズムが Newton-Raphson 法の基本形であり、この場合には 2 次の収束性が保証されることになるが、収束計算の過程で得られる修正値  $\{u^j\}$  およびこれによって評価される応力  $\tau_{ij}^j$  によって、その都度式 (44) の左辺の接線剛性マトリックスをつくり換えなければならない。連立 1 次方程式の解はたとえば係数行列の前進消去過程と後退代入過程によって求めることになるが、もし係数行列が同じであれば右辺が代わっても前進消去過程は改めて計算する必要がなくなる。有限要素法に関連する解法の展開においては、大次元問題の実用的解法を目指しての計算効率に関する判断基準が厳しく問われてきており、実際には次のような修正 Newton-Raphson 法も広く採用されている。

すなわち、式 (44) の左辺の接線剛性マトリックスに関しては、形状 (n) からの出発段階で構成した初期接線剛性マトリックスを、形状 (n+1) の解を求める収束計算の過程ではつくり換えることなく用いようとするものである。

$$[K_T(u_m)] \{\Delta u^j\} = \{f\}_{m+1} - \{f_{int}(u^{j-1})\} = \{R^{j-1}\} \dots \dots (49)$$

式 (49) と式 (45) によって繰返し収束計算を行う解法が修正 Newton-Raphson 法のアルゴリズムであるが、 $[K_T]$  を出発時の  $\{u\}_m$  および  $\tau_{ij/m}$  によって評価し、右辺の内部節点力  $\{f_{int}(u^{j-1})\}$  を評価するための応力  $\tau_{ij}^{j-1}$  も出発時の初期応力  $\tau_{ij/m}$  を基準として次のように求めるために、初期応力法ともよばれている。

$$\tau_{ij}^{j-1} = \tau_{ij/m} + \int_{\epsilon_{in}}^{\epsilon_{in} + \Delta \epsilon_{ij}} D_{ijrs} d\epsilon_{rs} \dots \dots \dots (50)$$

この修正 Newton-Raphson 法は、よく用いられている解法ではあるが、1 次の収束性しか保証されず、収束が非常に遅いこと、特に収束の最終段階で遅くなること、また、解が発散してしまうようなことがよくあること、特に材料が塑性域から除荷されて弾性域に戻るような、計算の途中で剛性が大きくなるような場合に安定に収束解が求まらなくなること、など実用的には問題点も多い。

その結果、修正 Newton-Raphson 法の収束を加速させるためのアルゴリズムの開発に関する研究が精力的になされた (Irons and Tuck<sup>43)</sup>, Nayak and Zienki-

ewicz<sup>44)</sup>, Boyle and Jennings<sup>45)</sup>, Crisfield<sup>46)</sup>, など).

(4) 繰返し収束計算の加速法

修正 Newton-Raphson 法の加速法のうちで最も簡単なものは、式 (45) を次式で置き換えて、これと式 (49) によって収束計算を行うものである。

$$\{u^{(j)}\} = \{u^{(j-1)}\} + [\alpha^{(j-1)}] \{\Delta u^{(j)}\} \dots \dots \dots (51)$$

ここに、 $[\alpha^{(j-1)}]$  は  $n \times n$  ( $n$  は自由度数) の対角マトリックスで、それぞれの自由度  $i$  に対応する加速係数  $\alpha_i^{(j-1)}$  は次のように与えられる。

$$\alpha_i^{(j-1)} = \frac{\Delta u_i^{(j-1)}}{\Delta u_i^{(j-1)} - \Delta u_i^{(j)}} \dots \dots \dots (52)$$

また、Crisfield<sup>46)</sup> は次のような加速法を示している。すなわち、式 (49) を次のように与える。

$$[K_r(u_m)] \{\Delta \hat{u}^{(j)}\} = [R^{(j-1)}] \dots \dots \dots (53)$$

式 (53) によって得られる  $\{\Delta \hat{u}^{(j)}\}$  と  $\{\Delta u^{(j-1)}\}$  によって  $\{\Delta u^{(j)}\}$  を次式のように与える。

$$\{\Delta u^{(j)}\} = e_j \{\Delta u^{(j-1)}\} + f_j \{\Delta \hat{u}^{(j)}\} \dots \dots \dots (54)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} f_j &= -a_j / b_j \\ e_j &= f_j (1 - c_j / b_j) - 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (55)$$

であり、 $a_j, b_j, c_j$  は次のように与えられるものである。

$$\left. \begin{aligned} a_j &= \langle \Delta u^{(j-1)} \rangle [R^{(j-2)}] \\ b_j &= \langle \Delta u^{(j-1)} \rangle [r^{(j-1)}] \\ c_j &= \langle \Delta \hat{u}^{(j)} \rangle [r^{(j-1)}] \\ [r^{(j-1)}] &= [R^{(j-1)}] - [R^{(j-2)}] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (56)$$

式 (54) によって得られた  $\{\Delta u^{(j)}\}$  によって  $\{u^{(j)}\}$  を次のように評価する。

$$\{u^{(j)}\} = \{u^{(j-1)}\} + \{\Delta u^{(j)}\} \dots \dots \dots (57)$$

得られた  $\{u^{(j)}\}$  によって、式 (53) の右辺を評価しなおし、式 (53)~式 (57) の計算を繰返す。なお、形状 ( $n$ ) からの出発時の  $\{R^{(0)}\}$  は

$$[R^{(0)}] = [\Delta f] \dots \dots \dots (58)$$

であり、 $\{\Delta u^{(1)}\}$  を求める際の  $f_1$  および  $e_1$  は

$$f_1 = 1, e_1 = 0 \dots \dots \dots (59)$$

である。

Newton-Raphson 法とは異なった範ちゅうに属する解法に、quasi-Newton 法がある。これは繰返し計算の過程で係数マトリックスを更新するもので、マトリックス更新法ともよばれる。

quasi-Newton 方程式は次のように与えられる。

$$[K^{(j)}] \{\Delta u^{(j)}\} = (f_{ex}^{(j-1)} - f_{in}^{(j-1)}) - (f_{ex}^{(j)} - f_{in}^{(j)}) \dots \dots (60)$$

式 (60) の解法に BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) 法とよばれる解法がある。Matthies and Strang<sup>47)</sup> は、BFGS 法を有限要素方程式の解法として適用し、繰返し計算の過程で係数マトリックスそのものを更新することなく、出発時の係数行列の LDL<sup>T</sup> 分解の結果を使って後退代入計算だけで収束計算をすすめること

ができるアルゴリズムを与えている。

この方法を含めて非線形有限要素方程式の解法に関しては Bathe and Cimento<sup>48)</sup> に詳しい。

(5) 変位増分法

Newton-Raphson 法または修正 Newton-Raphson 法の解式 (式 (44) または式 (49) と式 (45)) は増分後の荷重を固定して繰返し収束させる形で表現している。このような形で収束計算を行う場合には、増分計算がつり合い経路の極大点の近傍に至ると当然荷重増分を非常に小さくとらなければならない。また、極大点や分岐点では剛性マトリックスが特異になり、これらの点の近くでは係数行列の性質が非常に悪くなり、収束に要する反復回数は急激に増大し、ついには解が発散してしまう。Newton-Raphson 法の標準形の場合には繰返し計算の途中で係数行列の行列式の値の符号の変化を検査し、負の荷重増分を与えて極大点を越えたつり合い経路上の点に収束させることができる場合もあるが、このような方法は解析過程の汎用性の面で適当ではない。

極大点を越えて安定に解析をすすめるために広く用いられている方法は、系の特定の点の変位を制御する変位増分法、と変位と荷重の両方を変数とする代わりに変位と荷重の関係に拘束条件を導入して解法を成立させる弧長増分法の 2 つである。

ここでは、変位増分法について概略を示す。荷重が比例して増加または減少するものとすれば作用荷重を式 (35) のように与えることができ、Newton-Raphson 法の解式 (式 (44)) は次のように書くことができる。

$$[K_r(u^{(j-1)})] \{\Delta u^{(j)}\} = \Delta \lambda^{(j)} [f_{re}] + \lambda^{(j-1)} [f_{re}] - [f_{in}^{(j)}] \\ = \Delta \lambda^{(j)} [f_{re}] + [R^{(j-1)}] \dots \dots \dots (61)$$

ここに、 $\Delta u^{(j)}, \Delta \lambda^{(j)}$  などの記号の定義は弧長増分法の説明図 Fig. 3 に示したものと共通である。また、式 (61) のつり合い力  $R^{(j-1)}$  の定義は式 (44) の  $R^{(j-1)}$  の定義とは異なったものであるが混同は避けられると判断して同じ記号を使っている。

$\{\Delta u^{(j)}\}$  の成分のうちの 1 つを制御するものとして式 (61) を次のように書くものとする。

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(j-1)} & K_{12}^{(j-1)} \\ K_{21}^{(j-1)} & K_{22}^{(j-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1^{(j)} \\ \Delta u_2^{(j)} \end{Bmatrix} = \Delta \lambda^{(j)} \begin{Bmatrix} f_{r1} \\ f_{r2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1^{(j-1)} \\ R_2^{(j-1)} \end{Bmatrix} \\ \dots \dots \dots (62)$$

すなわち、 $\Delta u_2^{(j)}$  が制御変数で既知である。したがって、既知項と未知項を入れ換えて式 (62) を次のように書くことができる。

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(j-1)} & -f_{r1} \\ K_{21}^{(j-1)} & -f_{r2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1^{(j)} \\ \Delta \lambda^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1^{(j-1)} \\ R_2^{(j-1)} \end{Bmatrix} - \Delta u_2^{(j)} \begin{Bmatrix} K_{12}^{(j-1)} \\ K_{22}^{(j-1)} \end{Bmatrix} \\ \dots \dots \dots (63)$$

式 (63) を繰返し解き、 $\Delta u_1^{(j)}$  および  $\Delta \lambda^{(j)}$  が零とみなすことができるようになるまで収束計算を行うことにな



るが、式 (63) の係数行列は非対称であり、また  $\mathbf{K}$  の帯行列の特性が損なわれて、数値計算上非常に不利である。そこで式 (63) を次のように2つの部分に分けて計算を実行する。

すなわち、式 (63) の第1式は次のようなものである。

$$\mathbf{K}_{11}^{(j-1)} \Delta \mathbf{u}_1^{(j)} = \Delta \lambda^{(j)} \mathbf{f}_{r1} + \mathbf{R}_1^{(j-1)} - \Delta \mathbf{u}_2^{(j)} \mathbf{K}_{12}^{(j-1)} \dots \dots \dots (64)$$

右辺の  $\Delta \lambda^{(j)}$  は未知であるが、式 (64) は  $\Delta \lambda^{(j)}$  に関して線形である。したがって、式 (64) の解  $\Delta \mathbf{u}_1^{(j)}$  を次の2つの方程式の解の線形結合として次のように表わすことができる。

$$\mathbf{K}_{11}^{(j-1)} \Delta \mathbf{u}_1^{(j)} = \mathbf{f}_{r1} \dots \dots \dots (65)$$

$$\mathbf{K}_{11}^{(j-1)} \Delta \mathbf{u}_1^{(j)} = \mathbf{R}_1^{(j-1)} - \Delta \mathbf{u}_2^{(j)} \mathbf{K}_{12}^{(j-1)} \dots \dots \dots (66)$$

$$\Delta \mathbf{u}_1^{(j)} = \Delta \lambda^{(j)} \Delta \mathbf{u}_1^{(j)} + \Delta \mathbf{u}_1^{(j)} \dots \dots \dots (67)$$

式 (67) を式 (63) の第2式に代入して  $\Delta \mathbf{u}_1^{(j)}$  を消去すると次のように解  $\Delta \lambda^{(j)}$  が得られる。

$$\Delta \lambda^{(j)} = \frac{-\mathbf{R}_2^{(j-1)} + \mathbf{K}_{21}^{(j-1)} \Delta \mathbf{u}_1^{(j)} + \Delta \mathbf{u}_2^{(j)} \mathbf{K}_{22}^{(j-1)}}{\mathbf{f}_{r2} - \mathbf{K}_{21}^{(j-1)} \Delta \mathbf{u}_1^{(j)}} \dots \dots \dots (68)$$

式 (65) と (66) の係数行列は同じものであり、対称である。したがって、この  $LDL^T$  分解は共通である。また、 $\Delta \mathbf{u}_2$  は収束計算の過程で一定値に固定されるから、式 (66) および (68) における  $\Delta \mathbf{u}_2^{(j)}$  は繰返し計算の1回目だけに意味をもち、2回目以降は零となるので対応する項を省略することができる。

変位増分法は極大点を越えて安定に解析をすすめる方法としてごく自然な方法であるから、最も初期の研究 Argyris<sup>23)</sup> ですでに用いられており、Zienkiewicz<sup>49)</sup>、Lock and Sabir<sup>50)</sup>、Haisler, Stricklin and Key<sup>51)</sup>、など多くの研究者が各方面から検討を積み上げて現在に至っている。なお、Batoz and Dhatt<sup>52)</sup> は式 (64)~式 (68) の解法における式 (62) の係数行列の部分行列  $\mathbf{K}_{11}$  の解を求める過程に対して、元の係数行列の行列式の値などが解析に際して重要な意味をもつことを理由に、式 (62) の係数行列を元の形のまま残して解く方法を示している。このような極大点を安定に越えるためのアルゴリズムに関しては、弧長増分法に関する記述を含めて Ramm<sup>53)</sup> に詳しい。

(6) 弧長増分法 (Riks-Wempner 法)

変位増分法は系の特定された変位成分を制御する方法であるが、この制御する変位の選択に際して、たとえば分岐点を越した後荷重が減少すると同時に変位も減少するような問題に対しては、解析に先立って対象の崩壊モードなどに対する予備知識が必要になる。

解析過程をより汎用的なものとするためには、解析に先立っての予備的な情報をできるだけ必要としないようにする方が望ましい。そのような意味で、式 (61) の解式

$$[\mathbf{K}_r(\mathbf{u}^{(j-1)})] \Delta \mathbf{u}^{(j)} = \Delta \lambda^{(j)} [\mathbf{f}_{r,e}] + [\mathbf{R}^{(j-1)}] \dots \dots \dots (69)$$

の  $[\Delta \mathbf{u}^{(j)}]$  のすべてと  $\Delta \lambda^{(j)}$  を未知変数として残し、あら

ゆる場合に対応できるようにすることが考えられる。式 (69) は  $n$  元 ( $n$  は系の自由度) の方程式であり、 $\Delta \lambda^{(j)}$  を含めて  $n+1$  個の変数が残されるわけであるから、これを解くためには変数間にもう1つの拘束条件が必要である。

Riks<sup>54)</sup> および Wempner<sup>55)</sup> はそれぞれ独立に、式 (69) の繰返し収束計算の第1ステップの変数間に、次のような拘束条件を課すことを示している。

$$\langle \Delta \mathbf{u}^{(1)} | \Delta \mathbf{u}^{(1)} + \Delta \lambda^{(1)} \Delta \lambda^{(1)} = S^2 \dots \dots \dots (70)$$

ここに、 $S$  は指定される定数である。すなわち、 $n+1$  次元空間の球面の半径を拘束し、収束解のつり合い経路の弧長を  $S$  によって拘束することになるので、弧長増分法または Riks-Wempner 法とよばれている。

第2ステップ以降の変数に対しては、Riks<sup>56)</sup> および Keller<sup>57)</sup> では次のように拘束することを示している。

$$\langle \Delta \mathbf{u}^{(1)} | \Delta \mathbf{u}_{(j)} + \Delta \lambda^{(1)} \Delta \lambda_{(j)} = S^2 \dots \dots \dots (71)$$

ここに、 $\Delta \mathbf{u}_{(j)}$  および  $\Delta \lambda_{(j)}$  は Fig. 3 にその定義を示した

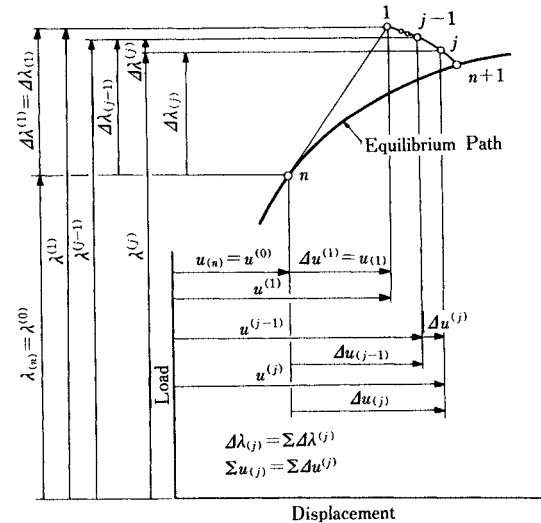


Fig. 3 Basic notation used in the discussion of solution procedures.

ように、形状 ( $n$ ) からの増分である。

$$\Delta \mathbf{u}_{(j)} = \Sigma \Delta \mathbf{u}^{(j)} \dots \dots \dots (72)$$

$$\Delta \lambda_{(j)} = \Sigma \Delta \lambda^{(j)} \dots \dots \dots (73)$$

また、Ramm<sup>53)</sup> は、計算上の利点を考慮して次のように与えることを示している。

$$\langle \Delta \mathbf{u}^{(1)} | \Delta \mathbf{u}^{(1)} + \Delta \lambda^{(1)} \Delta \lambda^{(1)} = 0 \dots \dots \dots (74)$$

式 (70) および (74) による場合の計算のアルゴリズムは次のようになる。

まず、 $[\Delta \mathbf{u}^{(1)}]$  は、 $[\mathbf{R}]_m$  が零とみなすことができるので、次式

$$[\mathbf{K}_r(\mathbf{u}_m)] [\Delta \hat{\mathbf{u}}] = [\mathbf{f}_{r,e}] \dots \dots \dots (75)$$

を解き、得られた  $|\Delta \hat{u}|$  に対して、

$$|\Delta u^{(j)}| = \Delta \lambda^{(j)} |\Delta \hat{u}| \dots \dots \dots (76)$$

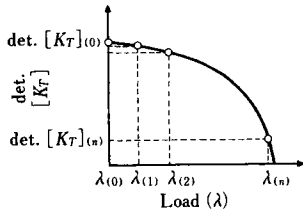
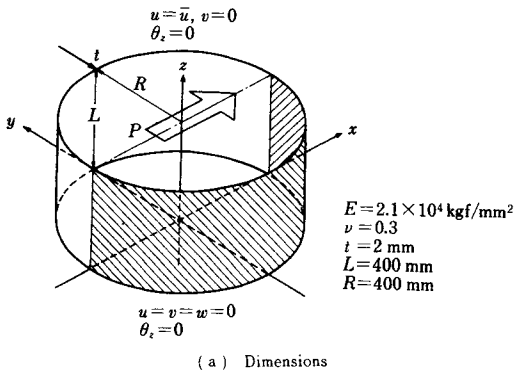


Fig. 4 Extrapolation of determinant as function of load<sup>(4)</sup>.

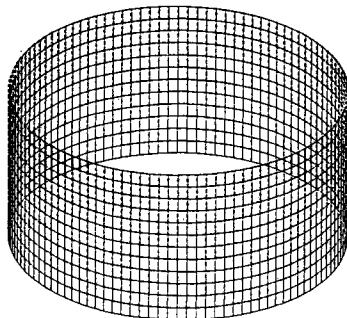
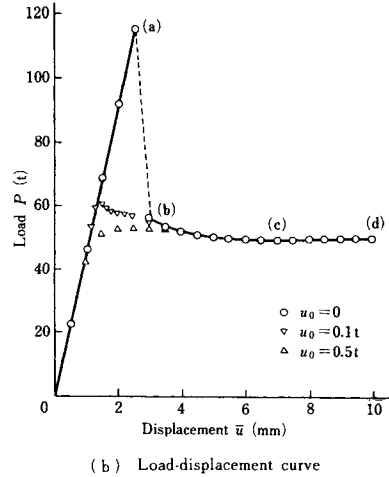


とおくことができる。したがって、式 (70) を考慮すれば  $\Delta \lambda^{(j)}$  は次式によって決まる。

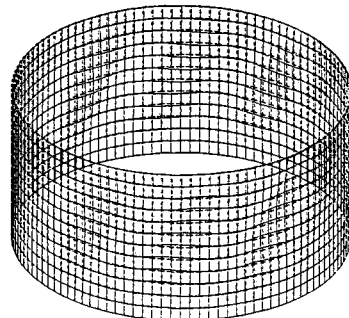
$$\Delta \lambda^{(j)} = \left( \frac{S^2}{\langle \Delta \hat{u} | \Delta \hat{u} \rangle + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (77)$$

第 2 ステップ以降は次のように計算する。すなわち、式 (69) の解  $|\Delta u^{(j)}|$  は、次の 2 つの方程式

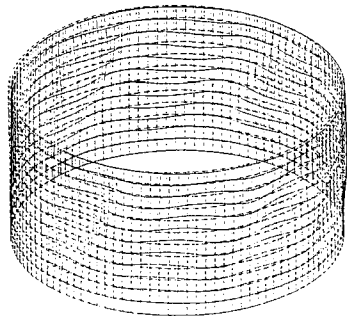
$$[K_T(u^{(j-1)})] |\Delta u^{(j)}| = \{f_{res}\} \dots \dots \dots (78)$$



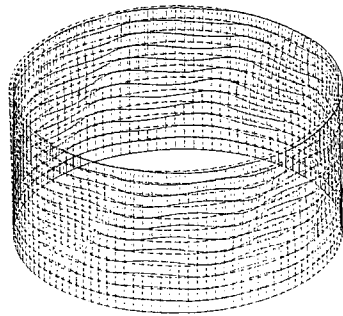
( a )



( b )



( c )



( d )

( c ) Pre- and post-buckling configurations (true scale)

Fig. 5 An example of finite element analysis.

$$[K_r(u^{j-1})]|\Delta u^{(j)} = |R^{j-1}| \dots \dots \dots (79)$$

を解いて得られる解の線形和として次のように与えることができる。

$$|\Delta u^{(j)} = \Delta \lambda^{(j)} |\Delta u^{(j)}| + |\Delta u^{(j)}| \dots \dots \dots (80)$$

式(80)を式(74)に代入すれば、 $\Delta \lambda^{(j)}$ は次のように求めることができる。

$$\Delta \lambda^{(j)} = \frac{\langle \Delta u^{(j)} | \Delta u^{(j)} \rangle}{\langle \Delta u^{(j)} | \Delta u^{(j)} \rangle + \Delta \lambda^{(j)}} \dots \dots \dots (81)$$

得られた  $\Delta \lambda^{(j)}$  を式(80)に考慮して  $|\Delta u^{(j)}|$  を求め、次式

$$|u^{(j)}| = |u^{(j-1)}| + |\Delta u^{(j)}| \dots \dots \dots (82)$$

によって補正された変位によって  $[K_r]$  および  $|R|$  を評価し直し、 $|\Delta u^{(j)}|$  および  $\Delta \lambda^{(j)}$  が零とみなすことができるようになるまで式(78)～式(82)の計算を繰返すことになる。

弧長増分法のアルゴリズムにはいろいろと変化が考えられる。これらの点やこの解法を適用して極大点や分岐点を求め、構造物の崩壊挙動を追跡する技法に関しては、Crisfield<sup>58)</sup>、Powell and Simons<sup>59)</sup>、Endo et al.<sup>60)</sup>、Simo et al.<sup>61)</sup> など、数多くの活発な議論がなされている。

極大点や分岐点では接線剛性マトリックス  $[K_r]$  の行列式  $\det[K_r]$  の値が零になる。特異点を捜すためには増分計算の過程で地道に  $\det[K_r]$  の値またはその符号を検討し、Fig. 4 に示すように、 $\det$ -load 曲線上で外挿または符号が異なった場合には内挿して、 $\det[K_r]=0$  となる荷重レベルを求めることになる。なお、行列式の値は  $[K_r]$  の LDL<sup>T</sup> 分解過程で求められるピボットの値を用いて計算することができる。また、特異点直前の形状における幾何剛性マトリックスがその形状における荷重に比例するものとして、固有値問題を構成して特異点を外挿することも行われている (Liu et al.<sup>62)</sup> など)。

これらの手法に関する研究は、文献 63)、64)、65) などに数多く収められている。

## 5. 解析例

著者らの行った解析例を示す。解法は正統的な解法の限界を克服することを目的として独自に開発したもの<sup>66)</sup>で、その意味で特異なものであり、これまでの記述の内容と直接的には整合しないが、解析は変位増分法に基づいている。対象は Fig. 5(a) に示すような、せん断曲げを受ける薄肉円筒殻の問題である。対称条件を導入して構造全体の 1/2 を解析対象としている。とりあげた 1/2 の部分に対して、周方向を 56 要素、軸方向を 12 要素、計 672 要素で分割して解析している。節点数は 741 であり、総自由度は 4 446 自由度である。まったく初期たわみを導入していないもの、およびこれによって得られた

変形モードを面外最大変位を板厚の 1/10 および 1/2 に正規化して導入したもの、の 3 つの場合について計算している。

得られた荷重と載荷面の水平変位の関係を 3 つの場合を比較してプロットしたものが Fig. 5(b) である。Fig. 5(c) に変形形状の推移を実寸 (構造のスケールと変位のスケールを同一にして描いたという意味) で描いている。このような構造物が初期不整に非常に敏感であることがわかる。

## 6. おわりに

有限要素法による幾何学的構造非線形問題を対象として、解析の現状を概観し、内在する問題点などについてわかりやすく整理することを試みた。よくわかっている読者にとっては冗長にすぎる面もあったと思う。

しかし、解析法の内容に関してはほとんど知識をもたずに、汎用コードなどを通じて有限要素法によって非線形解析を手掛けている技術者が多く存在する現状を考えると、また非線形解析を紹介している文献の多くは理論に偏り、非常に難しく記述されている場合が多いことを考えるとき、また有限要素法は比較的新しい技術ではあるが、すでに相当な年月を経て、この技術に関する基礎的な研究の経緯が忘れ去られようとしている現状を考えると、本文がいささかでも役立てばと思い、非力を省みず、努力してみたものである。

引用した文献などに偏りがあり、お気付きの点も多いとは思いますが、上述の意をくみ、お許しいただきたい。

## 参考文献

- 1) Turner, J. L., Clough, R. W., Martin, H. C. and Topp, L. J. : Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, Journal of Aeronautical Science, Vol. 23, No. 9, pp. 805~825, Sept. 1956.
- 2) 前田幸雄・林 正・中村 守: 増分法による平面骨組構造物の大変位解析の加速計算法, 土木学会論文報告集, 第 223 号, pp. 1~9, 1974 年 3 月.
- 3) 後藤茂夫・羽根悟郎・田中達朗: 接線剛性法による骨組構造物の大変形解析, 土木学会論文報告集, 第 238 号, pp. 31~42, 1975 年 6 月.
- 4) 小松定夫・北田俊行・宮崎清司: 残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析, 土木学会論文報告集, 第 244 号, pp. 1~14, 1975 年 12 月.
- 5) 前田幸雄・林 正: 立体骨組構造物の有限変位解析, 土木学会論文報告集, 第 253 号, pp. 13~27, 1976 年 9 月.
- 6) 吉田 裕・増田陳紀・松田 隆: 薄板で構成される立体構造の弾塑性一大変位離散化要素解析法, 土木学会論文報告集, 第 288 号, pp. 41~55, 1979 年 8 月.
- 7) 吉田 裕・増田陳紀・森本 剛・広沢規行: 立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法, 土木学会論文報告集, 第 300 号, pp. 21~31, 1980 年 8 月.

- 8) Nishino, F., Ikeda, K., Sakurai, T. and Hasegawa, A. : A Total Lagrangian Nonlinear Analysis of Elastic Trusses, Proc. of Japan Society of Civil Engineers, No.344/I-1, (Structural Eng./Earthquake Eng.) pp.39~53, April 1984.
- 9) 武田 洋：非線形問題における解法の基礎，日本鋼構造協会誌 (JSSC), Vol.21, No.228, pp.39~48, 1985年10月.
- 10) 林 正：多元連立非線形方程式の数値計算法，長岡技術科学大学計算機センターニュース，Vol.3, No.2, pp.3~18, 1985年12月.
- 11) Martin, H.C. : Finite Elements and the Analysis of Geometrically Nonlinear Problems, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design (Gallagher, R.H., Yamada, Y. and Oden, J.T. eds.), The Univ. of Alabama Press, pp.343~382, 1971.
- 12) Hartz, B.J. and Nathan, N.D. : Finite Element Formulation of Geometrically Nonlinear Problems of Elasticity, *ibid.*, pp.415~437.
- 13) Stricklin, J.A., Von Rieseemann, W.A., Tellerson, J.R. and Haisler, W.E. : Static Geometric and Material Nonlinear Analysis, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design (Oden, J.T., Clough, R.W. and Yamamoto, Y. eds.), UAH Press, pp.301~324, 1972.
- 14) Gallagher, R.H. : Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Problems, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis (Yamada, Y. and Gallagher, R.H. eds.), Univ. of Tokyo Press, 1973.
- 15) Bathe, K.J., Ramm, E. and Wilson, E.L. : Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis, Int. J. Numer. Meths. Eng., Vol.9, pp.353~386, 1975.
- 16) Oden, J.T. : Finite Element Analysis of Nonlinear Continua, McGraw-Hill Book Co., 1972.
- 17) Novozhilov, V.V. : Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity, Graylock Press, Rochester, N.Y., 1956.
- 18) Biot, M.H. : Mechanics of Incremental Deformation, John Wiley and Sons, New York, 1965.
- 19) Fung, Y.C. : Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- 20) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968.
- 21) Turner, J.J., Dill, E.J., Martin, H.C. and Melosh, R.J. : Large Deflections of Structures Subjected to Heating and External Loads, J. of the Aerospace Sciences, Vol.27, No.2, pp.97~106, Feb. 1960.
- 22) Martin, H.C. : On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems, Proc. of the Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Oct., 1965 (AFFDL-TR-66-80, pp.697~716, Nov. 1966).
- 23) Argyris, J.H. : Continua and Discontinua, *ibid.*, pp.126~169.
- 24) Mallett, R.H. and Berke, L. : Automated Method for the Large Deflection and Instability Analysis of Three-Dimensional Truss and Frame Assemblies, AFFDL-TR-66-102, Dec. 1966.
- 25) Gallagher, R.H. and Padlog, J. : Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis, AIAA Journal, Vol.1, No.6, June, 1963.
- 26) Hartz, B.J. : Matrix Formulation of Structural Stability Problems, J. of the Structural Div., ASCE, Vol.91, No.ST6, Proc. Paper 4572, Dec. 1965.
- 27) Kapur, K.K. and Hartz, B.J. : Stability of Plates Using the Finite Element Method, J. of the Engineering Mechanics Div., ASCE, Vol.92, No.EM2, Proc. Paper 4790, April 1966.
- 28) Oden, J.T. : Calculation of Geometric Stiffness Matrices for Complex Structures, AIAA Journal, Vol.4, No.8, pp.1480~1482, 1966.
- 29) Connor, J.J., Logcher, R.D. and Chan, S.C. : Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures, J. of the Structural Div., ASCE, Vol.94, No.ST6, Proc. Paper 6011, June 1968.
- 30) Brebbia, C. and Connor, J.J. : Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis, J. of the Engineering Mechanics Div., ASCE, Vol.95, No.EM2, Proc. Paper 6516, April 1969.
- 31) Bogner, F., Fox, R. and Schmit, L. : Finite Deflection Analysis Using Plate and Cylindrical Shell Discrete Elements, AIAA Journal, Vol.6, No.5, May, 1968.
- 32) Mallett, R.H. and Marcal, P.V. : Finite Element Analysis of Nonlinear Structures, J. of Structural Div., ASCE, Vol.94, No.ST9, pp.2081~2105, Sept. 1968.
- 33) Murray, D.W. and Wilson, E.L. : Finite Element Large Deflection Analysis of Plates, J. of the Engineering Mechanics Div., ASCE, Vol.95, No.EM1, Proc. Paper 6398, Feb. 1969.
- 34) Wempner, G.A. : Finite Elements, Finite Rotations and Small Strains of Flexible Shells, Int. J. Solids & Structures, Vol.5, pp.117~153, 1969.
- 35) Stricklin, J.A., Haisler, W.E. and Von Rieseemann, W.A. : Geometrically Nonlinear Structural Analysis by the Direct Stiffness Method, J. of the Structural Div., ASCE, Vol.97, No.ST9, pp.2299~2314, Sept. 1971.
- 36) Haisler, W.E., Stricklin, J.A. and Stebbins, F.J. : Development and Evaluation of Solution Procedures for Geometrically Nonlinear Structural Analysis, AIAA Journal, Vol.10, No.3, pp.264~272, March 1972.
- 37) Belytschko, T. and Hsieh, B.J. : Nonlinear Transient Finite Element Analysis with Convected Coordinates, Int. J. Numer. Meths. Eng., Vol.7, pp.255~271, 1973.
- 38) Bathe, K.J. and Bolourch, S. : Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures, Int. J. Numer. Meths. Eng., Vol.14, pp.961~986, 1979.
- 39) Kondoh, K. and Atluri, S.N. : A Simplified Finite

- Element Method for Large Deformation, Post-Buckling Analysis of Large Frame Structures, Using Explicitly Derived Tangent Stiffness Matrices, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 23, pp. 69~90, 1986.
- 40) Mallett, R.H. and Haftka, R.T. : Progress in Non-linear Finite Element Analysis Using Asymptotic Solution Techniques, *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design* (Oden, J.T., Clough, R.W. and Yamamoto, Y. eds.), UAH Press, pp. 357~373, 1972.
- 41) Hofmeister, L.D., Greenbaum, G. and Evenson, D. : Large Strain, Elastic-Plastic Finite Element Analysis, *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 7, pp. 1248 ~ 1254, July 1971.
- 42) Roberts, T.M. and Ashwell, D.G. : The Use of Finite Element Mid-Increment Stiffness Matrices in the Post-Buckling Analysis of Imperfect Structures, *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 7, pp. 805~823, 1971.
- 43) Irons, B. and Tuck, R. : A Version of the Aitken Accelerator for Computer Iteration, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 1, pp. 275~277, 1969.
- 44) Nayak, G.C. and Zienkiewicz, O.C. : Note on the "Alpha"-Constant Stiffness Method for the Analysis of Non-linear Problems, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 4, pp. 579~582, 1972.
- 45) Boyle, E. and Jennings, A. : Accelerating the Convergence of Elastic-Plastic Stress Analysis, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 7, pp. 232~235, 1973.
- 46) Crisfield, M.A. : A Faster Modified Newton-Raphson Iteration, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 20, pp. 267~278, 1979.
- 47) Matthies, H. and Strang, G. : The Solution of Non-linear Finite Element Equations, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 14, pp. 1613~1626, 1979.
- 48) Bathe, K.J. and Cimento, A.P. : Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 22, pp. 59~85, 1980.
- 49) Zienkiewicz, O.C. : Incremental Displacement in Non-Linear Analysis, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 3, pp. 587~588, 1971.
- 50) Lock, A.C. and Sabir, A.B. : Algorithm for Large Deflection Geometrically Nonlinear Plane and Curved Structures, in *Mathematics of Finite Elements and Applications* (Whiteman, J.R., ed.), Academic Press, N. Y., pp. 483~494, 1973.
- 51) Haisler, W., Stricklin, J. and Key, J. : Displacement Incrementation in Nonlinear Structural Analysis by the Self-Correcting Methods, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 11, pp. 3~10, 1977.
- 52) Batoz, J.L. and Dhait, G. : Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 14, pp. 1262~1267, 1979.
- 53) Ramm, E. : Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points, in *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics* (Wunderlich, W., Stein, E. and Bathe, K.J. eds.) Springer-Verlag, pp. 63~89, 1981.
- 54) Riks, E. : The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability, *J. Appl. Mech.*, Vol. 39, pp. 1060~1066, 1972.
- 55) Wempner, G.A. : Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solid, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 7, pp. 1581~1599, 1971.
- 56) Riks, E. : An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 15, pp. 529~551, 1979.
- 57) Keller, H.B. : Practical Procedures in Path Following Near Limit Point, in *Computing Methods in Applied Science and Engineering* (Glowinski, R. and Lions eds.) North-Holland, Amsterdam, 1982.
- 58) Crisfield, M.A. : A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap Through, *Computers & Structures*, Vol. 13, pp. 55~62, 1981.
- 59) Powell, G. and Simons, J. : Improved Iteration Strategies for Non-linear Structures, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 17, pp. 1455~1467, 1981.
- 60) Endo, T., Oden, J.T., Becker, E.B. and Miller, T. : A Numerical Analysis of Contact and Limit-Point Behaviour in a Class of Problems of Finite Deformations, *Computers & Structures*, Vol. 18, pp. 899~910, 1984.
- 61) Simo, J.C., Wriggers, P., Schweizerhof, K.H. and Taylor, R.L. : Finite Deformation Post-Buckling Analysis Involving Inelasticity and Contact Constraints, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 23, pp. 779~800, 1986.
- 62) Liu, W.K., Law, E.S., Lam, D. and Belytschko, T. : Resultant-Stress Degenerated-Shell Element, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 55, pp. 259~300, 1986.
- 63) *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, edited by Wunderlich, W., Stein, E. and Bathe, K.J., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981.
- 64) *Recent Advances in Non-Linear Computational Mechanics*, edited by Hinton, E., Owen, D.R.J. and Taylor, C., Pineridge Press Limited Swansea, U.K., 1982.
- 65) *Innovative Methods for Nonlinear Problems*, edited by Liu, W.K., Belytschko, T. and Park, K.C., Pineridge Press International Limited Swansea, U.K., 1984.
- 66) Yoshida, Y., Masuda, N. and Nomura, T. : A Formulation and Solution Procedure for Post-Buckling of Thin-Walled Structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 32, pp. 285 ~ 309, 1982.