

コンクリート部材のひびわれ界面における 力学的挙動に関する解析的研究

AN ANALYTICAL STUDY ON THE MECHANICAL BEHAVIOR OF A SINGLE CRACK IN CONCRETE

吉川 弘道*・田辺 忠顕**

By Hiromichi YOSHIKAWA and Tada-aki TANABE

It has been recognized that cracks in concrete have a major effect on the mechanical response of reinforced concrete. This requires the construction of an analytical model representing a single crack in concrete for the nonlinear analysis of reinforced concrete members.

The authors develop a constitutive equation that relates relative displacements and applied stresses on cracked surfaces of concrete in the plane stress state.

In the paper, formulation of the constitutive equation and the characteristics of four basic coefficients contained in the constitutive matrix are described. The proposed model can reflect such typical properties of cracked concrete as aggregate interlocking, crack dilatancy and frictional contact in analyses.

1. ま え が き

鉄筋コンクリート部材の非線形力学挙動を追跡する場合、その多くの研究は、材料の応力～ひずみ関係、すなわち構成方程式 (constitutive equation) の議論にいられているといえる。コンクリート (引張ひびわれのない場合) および鉄筋の応力～ひずみ関係を、第1および第2の構成方程式とよぶならば、その両者の interaction (付着特性) とひびわれ界面における変形挙動 (その場合、応力～不連続変位量の関係となる) は第3の構成方程式として位置付けられよう。このひびわれ界面の不連続性は、鉄筋コンクリート構造物全体の変形挙動に大きく寄与し、初期ひびわれ発生から鉄筋降伏までは最も支配的な要因の1つとなっている。したがって、ひびわれ界面の力学的機構を明確化し、これを合理的な数学モデルで表現することができれば、コンクリート部材 (さらには節理系岩盤) の非線形変形解析において、多大の進歩を与えることが期待される。

しかし、このようなひびわれ挙動の重要さにもかかわ

らず、その理論的考察や実験的検証は、他の2つの構成モデルに比べると、最も遅れており、不説明の部分が多いといえる。本文は、ひびわれ界面の力学的機構に関する著者らの考え方を述べるとともに、その構成モデルの構築について報告するものである。

なお、本研究は、田辺の提唱するクラックひずみ法 (crack strain method) によるコンクリート部材の非線形解析、および有限要素法への適用についての一連の研究^{1)~3)}のうち、Fモードひびわれ (摩擦接触状態) に関する解析的研究をなすものである。

2. ひびわれ界面における力学的機構

無筋コンクリートは、引張ひびわれ発生とともにその耐荷力を失うが、鉄筋コンクリートの場合、ひびわれ発生後もなお構造部材として十分機能し得る。これは、鉄筋そのものの応力負担のほか、鉄筋の存在 (変形拘束) により、コンクリートのひびわれ界面で応力が伝播することによるものである。

ひびわれ発生後の鉄筋コンクリート部材 (平面応力) を取り扱う場合、そのひびわれ近傍では、応力は連続量、変位は不連続量と考えるのが通例で、その主要な力学量は σ_n^c , τ_{nt}^c , δ_n , δ_t の4量である (図一1参照)。ここで、 σ_n^c , τ_{nt}^c はコンクリートのひびわれ界面に生じるひびわ

* 正会員 (株) 間組技術研究所
(〒338 与野市本町西4-17-23)

** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科
(〒464 名古屋千種区不老町)

れ垂直方向と接線方向の応力、 δ_n (ひびわれ幅) と δ_t (すべり) はひびわれ界面での相対的不連続量を表わし、これら4量はひびわれに伴う非線形挙動を記述する重要な状態量となる(下添字 n, t は、ひびわれ界面の法線方向(normal)と接線方向(tangential)を示し、これら4量は $n-t$ 座標で定義される。また、上添字 c はコンクリート, s (後出) は鉄筋を意味する)。したがって、ひびわれ解析においては、これらの界面応力 σ_n^c, τ_{nt}^c と不連続変位量 δ_n, δ_t (著者らは、これを“界面の力学4量”と総称する)との構成関係を構築することが、非線形ひびわれ挙動のモデル化における最終的な目的となる。

ひびわれ界面での力学的機構を議論する場合、2つの典型的なひびわれモードに分類することが大切である^{1),3)}。1つは、コンクリートのひびわれ法線方向には引張応力が残留し($\sigma_n^c \geq 0$)、ひびわれは開口するのみで、せん断力 τ_{nt}^c が生じない場合である。これに対して、もう1つのモードは、ひびわれ面に沿ってせん断力によるすべりが生ずるとともに、ひびわれ直交方向のコンクリートには圧縮力の増大($d\sigma_n^c < 0$)、またはひびわれ開口($d\delta_n > 0$)が励起され、界面4量がお互いに影響し合う、複雑な力学状態を呈する場合である。

前者のような剥離状態をSモード(separation mode)、後者の場合の摩擦接触状態をFモード(frictional contact mode)とよび(図-2参照)、これらのひびわれモードは、

- Sモード (separation mode)
 $\sigma_n^c \geq 0, \tau_{nt}^c = 0 \dots \dots \dots (1.a)$
- Fモード (frictional contact mode)
 $\sigma_n^c < 0, \tau_{nt}^c \neq 0, \delta_t \neq 0 \dots \dots \dots (1.b)$

のような界面状態で区別される。これら両モードの挙動は全く異なるものであり、両者を識別することは解析上重要な意味をもつが、現在の研究は両モードのひびわれが混同して議論されているように見受けられる。

Sモードは、主として比例負荷(proportional loading)を受けるRC部材で、ひびわれが主引張応力によって生じ、その後も主引張応力方向がひびわれ方向に対してほぼ直角に維持される場合である。一方、Fモードはあらかじめひびわれが生じた界面に沿ってせん断力が作

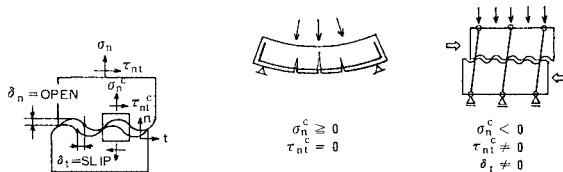


図-1 ひびわれ界面における応力と不連続変位の定義 (a) Separation Mode (b) Frictional Contact Mode

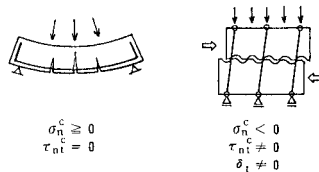


図-2 鉄筋コンクリート部材における2つのひびわれモードの例

用した場合(たとえば、内圧によってひびわれが発生した格納容器に地震荷重が作用したとき)、あるいは非比例負荷荷重を受けた場合(たとえば、一定軸力+漸増水平力を受ける耐震壁など)に観察することができる。

著者らの既報²⁾において、付着機構に基づいたSモードの力学モデルを発表したが、本報では、後者のFモードについて詳述するものである。

Fモードひびわれでは、すべりが生じた場合、ひびわれの開口を促し、あるいはこれがひびわれ直交方向の鉄筋によって拘束された場合は、コンクリートのひびわれ界面に圧縮力、鉄筋には引張力となって現われる。これはひびわれ界面でのダイレイタンスー効果(crack dilatancy)によるもので、Coulomb摩擦とともに骨材のかみ合い効果を論ずる際の重要なメカニズムとなり、解析的にはせん断成分と垂直成分との交叉効果(coupling effect)として表現される。

Fモードのケースは、初期ひびわれをもつ直接せん断実験やpush-off型実験(Paulay⁴⁾, Mattock⁵⁾によって容易に再現することができ、その特徴的な挙動は、図-3によって明瞭に説明される。(a)はひびわれ面の垂直方向変位(ひびわれ開口量) δ_n を一定とした場合、(b)は垂直応力 σ_n^c を一定とした場合で、それぞれFモードの両極端を表わすものである。

垂直方向の変位を拘束($\delta_n = \text{一定}$)、すなわちひびわれ幅を一定とした場合((a)), せん断応力 τ_{nt}^c の作用により垂直応力 $\sigma_n^c (\leq 0)$ が生じる(frictional slip)一方、ひびわれ垂直方向を応力境界($\sigma_n^c = \text{一定}$)とした場合((b)), せん断すべり δ_t によって垂直変位 δ_n (dilation)が生じる。このような、交叉効果により、せん断伝達機構も異なり、いわゆるIST剛性(interface shear stiffness)に重大な影響を与える(図-3の(a-1)と(b-1)比較参照)。また、実際のコンクリート構造物では、ひ

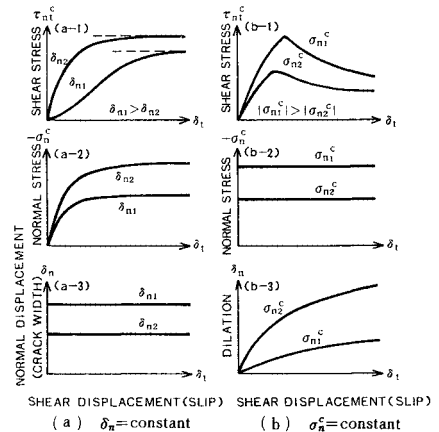


図-3 Fモードのひびわれに関する非線形挙動と界面の力学4量の関係 (a) $\delta_n = \text{constant}$ (b) $\sigma_n^c = \text{constant}$

ひびわれ面直交方向（または直角に近い角度）に鉄筋が設置されているか、あるいは外的に弾性拘束体がある場合が多く、せん断変形によって $d\sigma_n^c < 0$ （圧縮応力）、 $d\delta_n > 0$ （ひびわれ幅開口）ともに増加し、上記Fモード2ケースの中間的性状を示す。

また、交叉効果によって、ひびわれ直交方向の鉄筋が降伏に至る場合が少なくなく、せん断伝達強度についても本質的なメカニズムとなっている。Bazant, Tsubaki⁶⁾の指摘によれば、このような効果を考慮しない場合は必要鉄筋量の算定において危険側となる。このことはまた、吉川、梅原、田辺⁷⁾によって半解析的に算出した面内せん断耐力（鉄筋降伏型）が、極限解析やいわゆる全補強式などのようにつり合い条件のみから算出した値より下回る事実にも合致すると考えられる。

このようにFモードひびわれは、きわめて複雑な非線形現象を呈し、適切なモデル化が必要とされる。

3. ひびわれ界面の構成方程式

(1) 構成方程式の導出

二次元問題でのひびわれ挙動を取り扱う場合、その主要な力学的状態量は前述のとおり不連続変位 δ_n, δ_t とコンクリートの界面応力 σ_n^c, τ_{nt}^c となるが、そのモデル化に際しては、一般に次式のような増分型構成方程式で関係づけられる（たとえば、文献8）の5章、文献9））。

$$\begin{Bmatrix} d\delta_t \\ d\delta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{tt} & F_{tn} \\ F_{nt} & F_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tau_{nt}^c \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2 \cdot a)$$

または、

$$|d\delta| = [F] |d\sigma_c| \dots\dots\dots (2 \cdot b)$$

ここで、 F_{tt} はせん断剛性、 F_{nn} は垂直剛性を表わし、非対角項 F_{nt}, F_{tn} は交叉項として機能し、[力/長さ²]の次元（たとえば、kgf/cm³またはMPa/mm）をもつ。これらの4係数は、主として界面の力学4量（ $\tau_{nt}^c, \sigma_n^c, \delta_t, \delta_n$ ）およびコンクリート母材の特性値によって変化するものであり、複雑な非線形構成則を形成する。ひびわれ挙動のモデル化は、結局、上式の構成マトリックス $[F]$ のすべての項を構築することに帰着し、本研究の主眼点である（なお、本文は、一方向単調荷荷のみを対象とする）。

界面4量を式(2)のような形で表現することは、すでに岩盤力学やコンクリート工学の両分野で試みられているが、いずれも十分に完成されたものとはいえない。その理由としては、式(2)に含まれる構成マトリックス $[F]$ の各項（特に非対角項）に対する考察が不足しており、また、実験的に得られる物理定数との対応づけが困難であったことが挙げられる。そこで、著者らは以下に示すような方法により、Fモードひびわれに関する構成方程式の導出を行った。

まず、次のような実験的事実に鑑み、界面4量の相関関係を考察する。ひびわれ界面におけるせん断変位 δ_t （すべり）は、同方向の応力成分であるせん断応力 τ_{nt}^c に依存することはもちろんであるが、そのときの垂直変位 δ_n （ひびわれ幅）にも影響されることがよく知られており、実験的にも確認されている（Paulay, Loeber¹⁾、青柳・山田¹⁰⁾、Reinhardt, Walraven¹¹⁾）。一方、垂直応力 $\sigma_n^c (< 0)$ は、同方向の垂直変位 δ_n の関数になるとともに、 δ_n が拘束された場合、せん断応力 τ_{nt}^c の増加によっても励起される（Reinhardt, Walraven¹¹⁾、Millard, Johnson¹²⁾）。したがって、このようなひびわれ界面の力学挙動は一般式として次のように表現される。

$$\begin{aligned} \delta_t &= \delta_t(\tau_{nt}^c, \delta_n) \dots\dots\dots (3 \cdot a) \\ \sigma_n^c &= \sigma_n^c(\delta_n, \tau_{nt}^c) \end{aligned}$$

ここで、式(3)の第1式は、1つの変位成分（ t 方向）を同方向の応力成分ともう一方の変位成分の関数として、第2式は、1つの応力成分（ n 方向）を同方向の変位成分ともう一方の応力成分で表わしていることに注意されたい。また、式(3・a)の逆関数

$$\begin{aligned} \tau_{nt}^c &= \tau_{nt}^c(\delta_t, \sigma_n^c) \dots\dots\dots (3 \cdot b) \\ \delta_n &= \delta_n(\sigma_n^c, \delta_t) \end{aligned}$$

が成立し、両式は一対一対応するものと仮定する。

次に、これらを増分形式にするため、連鎖則(chain rule)により、全微分(total differential)をとる。

$$\begin{aligned} d\delta_t &= \frac{\partial \delta_t}{\partial \tau_{nt}^c} d\tau_{nt}^c + \frac{\partial \delta_t}{\partial \delta_n} d\delta_n \dots\dots\dots (4) \\ d\sigma_n^c &= \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \delta_n} d\delta_n + \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \tau_{nt}^c} d\tau_{nt}^c \end{aligned}$$

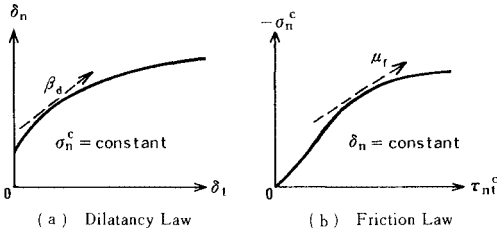
ここで、上式に含まれる偏導関数に対して、次式のような4個の諸係数を定義する。

$$k_t \equiv \left(\frac{\partial \delta_t}{\partial \tau_{nt}^c} \right)^{-1}, \quad k_n \equiv \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \delta_n} \dots\dots\dots (5)$$

$$\mu_f \equiv \left(\frac{-\partial \sigma_n^c}{\partial \tau_{nt}^c} \right)^{-1}, \quad \beta_a \equiv \left(\frac{\partial \delta_t}{\partial \delta_n} \right)^{-1}, \quad \beta_d \equiv \frac{\partial \delta_n}{\partial \delta_t} \dots\dots\dots (6)$$

k_t はひびわれ界面でのせん断剛性、 k_n は垂直剛性、また、 β_a （または β'_a ）はダイレイタンス比、 μ_f は摩擦係数を表わす。これら4係数は、不連続面における力学的特性を記述するうえでの最も基本的なものとなり、ここではこれらを“基本4係数”と総称する。

ダイレイタンス比 β_a (dilatancy ratio) と摩擦係数 μ_f (frictional coefficient) の両係数を、ここでは交叉係数とよぶが、 β_a は垂直応力 σ_n^c を一定としたときの $\delta_t \sim \delta_n$ 関係の接線係数（図-4(a)）、 μ_f はひびわれ幅 δ_n を一定としたときの $\tau_{nt}^c \sim \sigma_n^c$ 関係の接線係数（図-4(b)）として定義する（ダイレイタンス比については、式の運用上当面 β'_a を用いるが、後に本来の β_a に置き換える）。



図—4 交叉係数 β_a, μ_f の定義

このような基本4係数は、過去の研究では、概念的、定義があいまいであることが多かった。しかし、著者らの提案する式(5)、(6)に従えば、解析モデルの中に明確に取り入れることが可能となろう。

基本4係数を式(4)に代入するとともに、せん断成分、垂直成分の順序でマトリックス表示すると、次式に至る。

$$\begin{Bmatrix} d\delta_t \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_t} & \frac{1}{\beta'_a} \\ -\frac{1}{\mu_f} & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tau_{ni}^c \\ d\delta_n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(7)$$

上式が、著者らの提案する界面の力学4量についての増分型構成方程式の原型である。ここで、先に述べたが、式(7)の左辺と右辺の両ベクトルに変位成分と応力成分が混在していることがわかり、これは通常の応力~ひずみ関係式ではみられない。しかし、このような形式で表示することにより、界面4量の相関性と基本4係数の物理的意味合いが明瞭となり、これを表—1に要約した。また、このような形で表示し得ることは、通常の連続体力学における構成方程式とは異なるもので、いわば、ひびわれ界面(不連続部)の特殊性によるものと推察される。

しかしながら、解析上は式(2)の形式に表示する必要があり、式(7)を次のように書き直す。

$$\begin{Bmatrix} d\tau_{ni}^c \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_t & -\frac{1}{\beta'_a} k_t \\ -\frac{k_t}{\mu_f} & \left(1 + \frac{1}{\mu_f \beta'_a} \cdot \frac{k_t}{k_n}\right) k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\delta_t \\ d\delta_n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(8)$$

また、この逆関係を求めると次式となる。

表—1 界面の力学4量と基本4係数の相関関係

界面4量	せん断応力 τ_{ni}^c	垂直変位 $\delta_n > 0$ (ひびわれ幅)
せん断変位 δ_t (すべり量)	せん断剛性 k_t	ダイラタンシー比 β_a
垂直応力 $\sigma_n^c < 0$	摩擦係数 μ_f	垂直剛性 k_n

$$\begin{Bmatrix} d\delta_t \\ d\delta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{1}{\mu_f \beta'_a} \cdot \frac{k_t}{k_n}\right) \frac{1}{k_t} & \frac{1}{\beta'_a k_n} \\ \frac{1}{\mu_f k_n} & \frac{1}{k_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tau_{ni}^c \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(9)$$

次に、上式の β'_a を β_a に置き換えるが、一般に $\partial\delta_t/\partial\delta_n \neq (\partial\delta_n/\partial\delta_t)^{-1}$ であるため、偏導関数相互の関係を用いて、

$$\beta'_a = \frac{1}{1 - \mu_f \beta_a \frac{k_n}{k_t}} \beta_a = \frac{\beta_a}{1 - \xi} \dots\dots\dots(10)$$

を得ることができる(Appendix参照)。式(10)を式(8)に代入して、整理すると最終的に次式に至る。

$$\begin{Bmatrix} d\tau_{ni}^c \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} = k_t \begin{bmatrix} 1 & -(1-\xi) \frac{1}{\beta_a} \\ -\frac{1}{\mu_f} & \frac{1}{\mu_f \beta_a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\delta_t \\ d\delta_n \end{Bmatrix} \dots\dots(11)$$

または、その逆関係として、次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} d\delta_t \\ d\delta_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{\xi k_t} \begin{bmatrix} 1 & (1-\xi)\mu_f \\ \beta_a & \mu_f \beta_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tau_{ni}^c \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} \\ = \frac{1}{k_n} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_f \beta_a} & (1-\xi) \frac{1}{\beta_a} \\ \frac{1}{\mu_f} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tau_{ni}^c \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} \dots\dots(12)$$

ただし、

$$\xi = \mu_f \beta_a \frac{k_n}{k_t} \dots\dots\dots(13)$$

式(11)または式(12)が、著者らの導出した平面応力場におけるひびわれ界面の構成方程式である。また、同式は、非対称であるとともに、無次元パラメーター $\xi = 0$ のとき特異 ($\det[F]=0$) となり、 $\xi > 0$ の条件下で正定値 (positive definite) となることがわかる。また、上式は、接合要素または interface element などの有限要素にもそのまま用いることができる。

(2) 鉄筋コンクリート部材のひびわれ挙動

次に、ひびわれ界面が鉄筋によって補強された場合の変形特性を考える。一般に、鉄筋の配筋方向とひびわれ方向は異なり、任意の交角について論ずる必要があるが、ここでは、簡単のため鉄筋がひびわれ直交方向に配筋され、その垂直剛性 r_n とせん断剛性 r_t (これは dowel 効果に相当する) の2剛性が与えられる場合を想定する。すなわち、次の単純な構成方程式を用いる。

$$\begin{Bmatrix} d\tau_{ni}^s \\ d\sigma_n^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_t & 0 \\ 0 & r_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\delta_t \\ d\delta_n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(14)$$

ここで、 $d\tau_{ni}^s$ 、 $d\sigma_n^s$ は鉄筋の dowel 応力 (せん断成分) と軸応力 (垂直成分) の増分値を表す。 r_t 、 r_n は k_t 、 k_n と同じ次元をもつ既知量とし、また、コンクリート本体の弾性変形は無視することにする。

① ひびわれ直角方向 (normal 方向) 鉄筋拘束

まず、鉄筋がひびわれ直交方向にのみ剛性 (r_n) を有する場合、外的な作用せん断応力 $d\tau_{nt}$, またはせん断変形 $d\delta_i$ に対する応答を考える。このときの、つり合い条件は次式で与えられる (表-2 (a) 付図参照)。

$$\begin{Bmatrix} d\tau_{nt} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\tau_{nt}^c \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ d\sigma_n^s \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(15)$$

右辺第1項は、コンクリートの界面応力で式(11)によって与えられ、第2項は鉄筋の負担応力で式(14)の n 成分のみを用いればよく、最終的に次式で表示できる。

$$\begin{Bmatrix} d\tau_{nt} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_t & -(1-\xi)\frac{k_t}{\beta_d} \\ -\frac{k_t}{\mu_r} & \frac{k_n}{\xi} + r_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\delta_i \\ d\delta_n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(16)$$

上式の応力~変形関係から、せん断変形増分 $d\delta_i$ に対する非線形応答、 $d\tau_{nt}^c/d\delta_i$ および $d\delta_n/d\delta_i$ を求めることができ、さらに、 $-d\sigma_n^c = d\sigma_n^s = r_n d\delta_n$ を利用して、 $-d\sigma_n^c/d\delta_i$, $-d\sigma_n^c/d\tau_{nt}^c$ が得られ、これらを一括して表-2 (a) の式①~④にまとめた。

② せん断方向 (tangential 方向) 鉄筋拘束

ひびわれ方向にのみ鉄筋剛性 r_t (すなわち dowel 作用) をもつ場合についても、上記と同様の展開となる。垂直方向に外力 $d\sigma_n$ を受けたときのつり合い式は、

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\tau_{nt}^c \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d\tau_{nt}^s \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(17)$$

で与えられる。このときの鉄筋の dowel 応力 (せん断成分) $d\tau_{nt}^s$ は、式(14)のうちせん断成分を用い、式(11)を再び代入すると次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_t + r_t & -(1-\xi)\frac{k_t}{\beta_d} \\ -\frac{k_t}{\mu_r} & \frac{k_n}{\xi} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\delta_i \\ d\delta_n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(18)$$

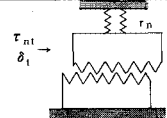
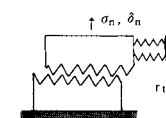
上式より $d\sigma_n^c/d\delta_n$, $d\delta_i/d\delta_n$, $-d\tau_{nt}^c/d\delta_n$ および $d\tau_{nt}^s/d\sigma_n^c$ を算定し、表-2 (b) 式⑤~⑧に要約した。

同表には、おのおのの鉄筋剛性がゼロの場合 ($r_n=0$, $r_t=0$) および無限大の場合 ($r_n=\infty$, $r_t=\infty$) についての値も併記した。これらは、前者が応力境界、後者が変位境界となり、図-3 (a) と図-3 (b) に相当するとともに、著者らの導出した界面構成方程式 (11) の特性をみる事ができる。たとえば、ひびわれ直交方向の境界条件によってせん断挙動が異なることは、図-3 (a-1) と (b-1) によって模式的に示したが、これは、表-2 (a) の式①のごとく無次元パラメータ ξ や垂直拘束の剛性 r_n の大小によって反映されていることがわかる。

(3) 既往研究との比較

ここで、岩盤力学も含めて、ひびわれ界面に関する既往の研究例との比較を試みる。ひびわれ界面の構成モデルを、 $n-t$ 座標系の2成分で、式(2) (またはその逆関係) のようなマトリックス表示によって記述し得ることは、多くの研究者によって予言されているが、構成マトリックス $[F]$ の全項を具体的に提案した研究例は、散見されるに過ぎない (Heuze, Barbour (1982)⁹⁾ の review によれば、対角項 F_{tt} , F_{nn} についてのモデル化は多く提案されているが、非対角項 F_{tn} , F_{nt} を定量化した例はないと報告している)。

表-2 鉄筋で補強された場合のひびわれ挙動に関する解析解

(a) 垂直方向鉄筋拘束 r_n				(b) せん断方向鉄筋拘束 r_t			
式 No	界面4量の応答増分	応力境界 $r_n = 0$ ($\sigma_n^c = \text{一定}$)	変位境界 $r_n = \infty$ ($\delta_n = \text{一定}$)	式 No	界面4量の応答増分	応力境界 $r_t = 0$ ($\tau_{nt}^c = \text{一定}$)	変位境界 $r_t = \infty$ ($\delta_t = \text{一定}$)
①	$\frac{d\tau_{nt}^c}{d\delta_i} = \frac{\xi + \frac{r_n}{k_n}}{1 + \xi \frac{r_n}{k_n}} k_t$	ξk_t	k_t	⑤	$\frac{d\sigma_n^c}{d\delta_n} = \frac{\xi + \frac{r_t}{k_t}}{\xi + \xi \frac{r_t}{k_t}} k_n$	k_n	$\frac{k_n}{\xi}$
②	$\frac{d\delta_n}{d\delta_i} = \frac{\beta_d}{1 + \xi \frac{r_n}{k_n}}$	β_d	0	⑥	$\frac{d\delta_i}{d\delta_n} = \frac{1 - \xi}{1 + \frac{r_t}{k_t} \beta_d}$	$\frac{1 - \xi}{\beta_d}$	0
③	$\frac{-d\sigma_n^c}{d\delta_i} = \frac{d\sigma_n^s}{d\delta_i} = \frac{\beta_d r_n}{1 + \xi \frac{r_n}{k_n}}$	0	$\frac{\beta_d k_n}{\xi} = \frac{k_t}{\mu_r}$	⑦	$\frac{-d\tau_{nt}^c}{d\delta_n} = \frac{d\tau_{nt}^s}{d\delta_n} = \frac{1 - \xi}{1 + \frac{r_t}{k_t} \beta_d} r_t$	0	$\frac{(1 - \xi) k_t}{\beta_d} = \frac{(1 - \xi) \mu_t k_n}{\xi}$
④	$\frac{-d\sigma_n^c}{d\tau_{nt}^c} = \frac{\frac{r_n}{k_n}}{1 + \frac{r_n}{k_n}} \frac{1}{\mu_r}$	0	$\frac{1}{\mu_r}$	⑧	$\frac{d\tau_{nt}^s}{-d\sigma_n^c} = \frac{1 - \xi}{1 + \xi \frac{r_t}{k_t}} \mu_t$	0	$(1 - \xi) \mu_t$
$\begin{Bmatrix} d\tau_{nt} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\tau_{nt}^c \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ d\sigma_n^s \end{Bmatrix}$ 				$\begin{Bmatrix} 0 \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\tau_{nt}^c \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d\tau_{nt}^s \\ 0 \end{Bmatrix}$ 			
$\xi = \mu_t \beta_d k_n / k_t$							

たとえば、Xiurun (1981)¹⁵⁾は、ポテンシャル理論（非関連流れ則）によって、非対角項を含めた[F]の全項を記述した数少ない例であるが、実際の計算にあたっては、簡略化（対称化）している。

また、Heuze et al.⁹⁾は、非対角項を省略するかわりに、せん断変形と垂直応力の関係式、

$$-d\sigma_n = \frac{\beta_a r_n}{1 + \frac{r_n}{k_n}} d\delta_i \dots\dots\dots(19)$$

を導いている（uncoupled approach）（上式では、原式を本文の表記法に従って書き換えたが、対象がコンクリートではないので、上添字 c は省略した）。これは、著者らの導出したモデルにおいて、ξ=1とした場合に合致している（表—2 (a) 式③参照）。ASCE の RC-FEM 委員会による state-of-the-art (1982)⁸⁾では、[F]のうち F_{ni}については必要性を認めているが、F_{in}の存在には否定的であり、これは式 (11) において ξ=1 とおくことにはかならない。

このように、ξ=1 とすることは取扱いが簡便になる一方、表—2 (b) の式⑥～⑧をゼロとすること（これは垂直変位に対する交叉効果がないことを意味する）、あるいは鉄筋拘束の大小に関係なくせん断剛性を dτ_{ni}/dδ_i = k_i（表—2 (a) 式①参照）と一定にする（すなわち、物理的に n 方向の拘束効果を表現し得ない）ことに帰着し、実際の力学現象とは明らかに異なる。

Reinhardt, Walraven (1981)¹¹⁾、Millard, Johnson (1985)¹²⁾の研究では、RC 部材の直接せん断実験により、交叉効果を実験的に認めているが、式 (2) のような形式で構成則を得るには至っていない。

Bazant, Tsubaki (1980)⁶⁾による理論的考察では、グレイタンシー比と摩擦係数を導入した構成方程式 (slip-dilatancy model) を導いている。これは、コンクリート本体の弾性領域 (intact part) を含む応力—全ひずみの関係式という点で、本文のモデルとはやや異なるが、形式上は酷似している（著者らの調査では、Bazant モデルにおいて intact 部分を剛体 (E_c=∞, ν_c=0) とすると、著者らのモデルで ξ=0 とした場合に形式上対応している）。しかし、得られた構成マトリックスが、特異 (singular) であるかどうかで、異なっている。Bazant らの slip-dilatancy モデルでは、その構成マトリックスが常に特異 (det [F]=0) である⁶⁾のに対して、本モデルでは、式 (11) または式 (12) から明らかのように、

$$\xi = \mu_f \beta_a \frac{k_n}{k_i} = 0$$

のときに限って特異となる。これは、i) μ_fβ_a=0 のごとく、交叉係数のいずれかがゼロの場合、あるいは ii)

k_n=0 のようにひびわれ界面で、両側のコンクリートが完全に遊離している状態のときのみ、特異となることを意味するものである。言い換えれば、著者らのモデルの場合、ひびわれ界面の状態は必ずしも常に特異であることはなく、そのときの力学状態に依存するということである。たとえば、十分な軸圧縮力 (σ_n<0) によって交叉効果 (μ_f, β_a>0) と垂直剛性 (k_n>0) が健在することによって、ひびわれ界面は力学的に機能するものであり、鉄筋の存在や周辺拘束によって singular を回避する Bazant らの解析モデルとは異なる。

4. 基本 4 係数のモデル化

前章の式 (5) および (6) で定義した基本 4 係数を具体的にモデル化することにより、本研究は完成する。各係数は、そのときの状態量（界面の力学 4 量）の関数であることはもちろん、母材コンクリートの物性（圧縮強度、弾性係数など）に依存し、ひびわれ面の粗度、骨材の最大寸法にも影響することが認められ、さまざまな実験活動が行われている（文献 8) の 5 章に詳しい）。

これまでの国内外の実験^{1), 5), 10)~13)}はせん断剛性のみに着目したものが多く、一般的なモデル化に至っているとはいいがたく、さらに、垂直剛性 k_n、交叉係数 μ_f、β_a に言及したものはほとんどないのが現状であろう。したがって、上記の要件すべてを満たす材料モデルを構築するには、さらに広範囲で系統的な実験研究が必要となる。このような作業は、たとえば、二次元直交異方性をもつコンクリート材料の E₁, E₂, υ₁, υ₂ の 4 係数を配合種別ごと（または強度ごと）にモデル化することに相当し、多くの困難を余義なくされる。そしてひびわれのない母材コンクリートにおいても、工学的に完成しているとはいいがたい。したがって、本報では、4 係数の基本的モデル化および若干の実験結果との照合 (4.) を示すのにとどめ、これを用いたときの定性的観測 (5.) により、界面 4 量の非線形挙動を考察することにする。

① せん断剛性 k_i のモデル化

ひびわれ界面のせん断剛性 k_i は、式 (5) より、

$$k_i \equiv \left(\frac{\partial \delta_i}{\partial \tau_{ni}^c} \right)^{-1} = \frac{d\tau_{ni}^c}{d\delta_i} \Big|_{\sigma_n = \text{const.}} \dots\dots\dots(20)$$

で与えられることから、初期ひびわれ幅が一定に保たれたときのせん断挙動について考える。

この場合、いくつかのせん断実験結果によれば、初期にやや急激なすべり (free slip) があり、その後骨材のかみ合いにより剛性が回復、摩擦すべり (frictional slip) を生じ、やがて最大耐力に達するのが一般的である。これは、図—5 のような模式図によって容易に理解される。すなわち、規則的な凹凸をもつひびわれを想定すると、これが完全弾塑性体であれば、そのせん断挙動は完全な

tri-linear となり (図-5 (a)), しかもそのときのひびわれ幅 δ_n に大きく依存する。一方, ひびわれが不規則に凹凸している場合 (図-5 (b)), 前例の重合せとなり, 滑らかな曲線を呈し, 通常の実験的に観測されるせん断曲線 (たとえば, 文献4) と定性的に一致する。

そこでこれらを一般化して, $0 \leq \delta_i \leq \delta_{i1}$ 間で接線剛性が増大 (interlocking) し, $\delta_i = \delta_{i1}$ で最大剛性 K_{IST} となり, その後剛性が低下し, 最大せん断力 τ_u に漸近する, 次式のような双曲線関数モデルを提案する (図-6 参照)。

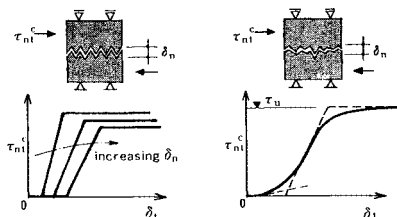
$$\tau_{ni}^c = \tau_u \cdot \frac{\tanh\left\{\frac{K_0}{\tau_u}(\delta_i - \delta_{i1})\right\} + q}{1 + q} \dots\dots\dots(21)$$

$$k_t = K_{IST} \cdot \operatorname{sech}^2\left\{\frac{K_0}{\tau_u}(\delta_i - \delta_{i1})\right\} \dots\dots\dots(22)$$

ただし,

$$K_0 = K_{IST}(1 + q)$$

$$q = \tanh\left(\frac{K_0}{\tau_u} \delta_{i1}\right) \dots\dots\dots(23)$$



(a) regularly sawed asperity (b) randomly sawed asperity

図-5 垂直変位が拘束されたときのせん断応力～せん断変位の関係

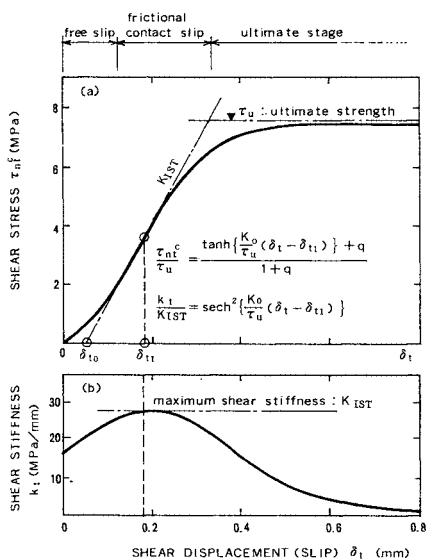


図-6 ひびわれ界面における (a) せん断応力～せん断変形の関係および (b) せん断剛性のモデル化 ($\delta_{i1} = 0.18 \text{ mm}$, $K_{IST} = 27 \text{ MPa/mm}$, $\tau_u = 7.5 \text{ MPa}$ の例)

ここで, K_{IST} は最大せん断剛性, δ_{i1} はそのときのせん断変位, τ_u は最大せん断耐力を表わす。 K_0 , q は, これら3係数から, 式 (23) により一義的に求まる。

この3パラメーター (K_{IST} , δ_{i1} , τ_u) 双曲線型モデルを用い, 実験結果にあてはめた例を図-8 (a) に示す。いずれの場合も, 実験結果から得られた非線形曲線をよく再現しているといえる。また, この3パラメーターがひびわれ幅 δ_n に依存することは明らかで, これらを δ_n によって定量化する必要がある。

② 垂直剛性 k_n のモデル化

ひびわれ界面の垂直剛性は, 式 (5) から,

$$k_n \equiv \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \delta_n} = \frac{d \sigma_n^c}{d \delta_n} \Big|_{\tau_{ni}^c = \text{const.}} \dots\dots\dots(24)$$

と考えることができる。垂直剛性に関する検討はこれまで数少ないが, 図-7 のようなモデルを考える。すなわち, ある与えられた初期ひびわれ幅は, 垂直応力 $-\sigma_n^c$ (圧

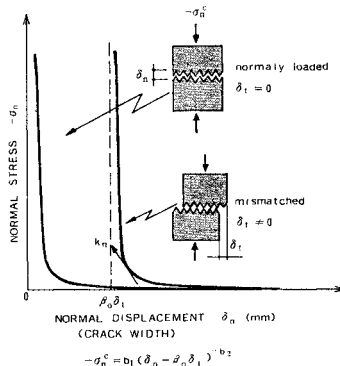


図-7 ひびわれ界面における垂直応力と垂直変形に関するモデル化

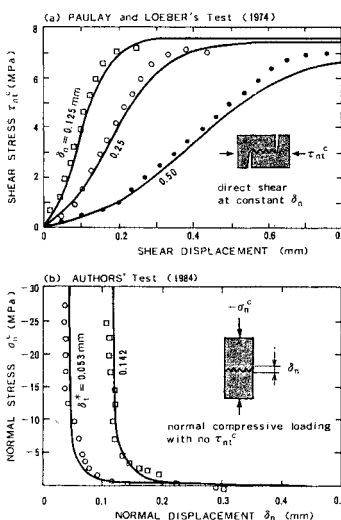


図-8 ひびわれ界面における (a) せん断変形および (b) 垂直変形モデル化と実験結果への適用例

縮応力)の増加により、 $\delta_n=0$ に向かって閉合していくが、せん断方向に不整合 δ_i があった場合、完全に閉合することはなく、 $\delta_n=0$ のかわりに、 $\delta_n=\beta_0 \delta_i$ を漸近線としたものである。そして、このときの $\sigma_n^c \sim \delta_n$ 関係および垂直剛性 k_n を次式で表現する。

$$-\sigma_n^c = b_1 (\delta_n - \beta_0 \delta_i)^{-b_2} \dots \dots \dots (25)$$

$$k_n = b_1 b_2 (\delta_n - \beta_0 \delta_i)^{-(b_2+1)} \dots \dots \dots (26)$$

ここで、 b_1, b_2, β_0 は材料定数を示す。

このような垂直モデルの適用例を図-8 (b) に示す。図中のデータは著者らの実験の一部で、実線は $\beta_0 \delta_i$ を実測結果から既知量とし、最小自乗法より求めた回帰曲線である。前出の図-8 (a)と同様良好な適合性を示していることがわかる。

本章にて提示した実験曲線は、見掛け上式 (3) の前提条件と異なっているが、式 (3・a) と (3・b) の一対一対応の仮定によって、同式を実質的に満足していると考える。また、式 (21), (25) のような提案曲線は実験結果をよりよく表現するための近似曲線であり、本文の主旨は式 (11), (12) の提案にある。

③ 交叉係数 μ_f, β_a のモデル化

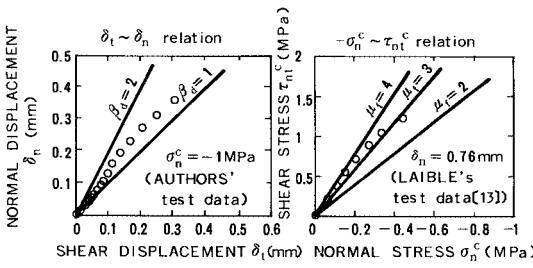
交叉効果に関する定量化やモデル化は、著者らの知る限りきわめて少ないが、これら2係数を実験的に抽出した例を図-9に示す。 β_a および μ_f は、式 (6) および図-4にも示したように、

$$\beta_a \equiv \frac{\partial \delta_n}{\partial \delta_i} = \frac{d\delta_n}{d\delta_i} \Big|_{\sigma_n^c = \text{const.}} \dots \dots \dots (27)$$

$$\mu_f \equiv \left(\frac{-\partial \sigma_n^c}{\partial \tau_{nt}^c} \right)^{-1} = \frac{d\tau_{nt}^c}{-d\sigma_n^c} \Big|_{\sigma_n^c = \text{const.}} \dots \dots \dots (28)$$

のように解釈することができ、図-9はこのような条件に合致した実験例について示したものである。 β_a, μ_f はほぼ直線的に変化し、同図よりその値を読み取ることができるが、種々の条件によって変動するため、確定値を明言することは避け、本文では、次式のような一般式を示すにとどめる。

$$\beta_a = \beta_a (\delta_i, \sigma_n^c) \dots \dots \dots (29)$$



(a) Dilatation at Constant Normal Stress (b) Frictional slip at Constant Normal Displacement

図-9 交叉効果 ((a) ダイレイタンスー, (b) 界面摩擦) に関する実験例

$$\mu_f = \mu_f (\delta_i, \delta_n) \dots \dots \dots (30)$$

以上までが、基本4係数に関するモデル化の提案と若干の実験例を示したものであるが、提案式に含まれる諸係数の完全な決定にはさらに多く実験的な検討が必要である。著者らは、このような要請から一面せん断および二面せん断実験を実施し、国内外の主要研究例とも併せ、各係数の同定を行っており、それらの結果については早い機会に発表する予定である。

5. 定性的考察

以上のような著者らの提案モデルに基づき、ひびわれ界面の非線形挙動における界面4量の相関性について、定性的な考察を行う。界面の力学4量の相関関係に対する考察は、式 (3・a) と (3・b) を前提としているが、これは“界面4量のうち、任意の2量が与えられれば、残りの2量が一義的に求まる”と解釈することができ、数学的にも自明である(ただし、互いに一価関数の場合に限る)。そこで、前章の材料モデル (式 (21), (25)) をもとにして、界面4量のうち、 $\delta_n \sim \delta_i \sim \tau_{nt}^c$ の関係を図-10 (a) に、 $\delta_n \sim \delta_i \sim -\sigma_n^c$ の関係を図-10 (b) に、それぞれ模式的に示した。

図-10 (a) はまた、 $\tau_{nt}^c = \tau_{nt}^c (\delta_i, \delta_n)$ ともみることができ、 τ_{nt}^c は δ_i についての単調増加関数、 δ_n についての単調減少関数となっていることがわかる。これは、せん断変形 δ_i の増加とともに、せん断応力 τ_{nt}^c が増加し(増分量は減少するが)、これがひびわれ方向の垂直変位(ひびわれ幅) δ_n が大きいほど τ_{nt}^c が小さいという、通常の実験の事実と合致する。おのおのの勾配は、表-2を参照して、 $d\tau_{nt}^c/d\delta_i = k_i$ 、 $d\tau_{nt}^c/d\delta_n = -(1-\xi)k_i/\beta_a$ で与えられる。

また、この相関曲面は、 $\tau_{nt}^c = \tau_u (\delta_n)$ なる漸近面を有し、 $\delta_n \rightarrow 0$ または $\delta_i \rightarrow \infty$ のとき τ_{nt}^c はこの漸近面に収束する。すなわち、 τ_u は、そのひびわれ幅に対するせん断強度 (図-10 (a) の▼) を表わし、 $\delta_n \rightarrow 0$ の収束値はひびわれのないときのせん断強度 τ_0 (図-10 (a) の▽) を意味する。この漸近面と $\tau_{nt}^c - \delta_n$ 面との交線は、せん断強度とひびわれ幅の関係を表わし、 τ_u が $\tau_0 (\delta_n=0)$ から出発し、 δ_n の増加とともに徐々に減少することがわかる。このようなひびわれを有するときのせん断強度の性質は、これまでの実験の事実(たとえば、文献4))とも合致し、これを実験公式として表わしたものに次式がある (Bazant, Gambarova^{[4])}。

$$\tau_u = \frac{D_a^2}{D_a^2 + 100 \delta_n^2} \tau_0, \tau_0 = 0.245 f_c$$

ここで、 D_a は骨材の最大寸法 (mm) を表わす。

同様に、図-10 (b) は、 $-\sigma_n^c = -\sigma_n^c (\delta_n, \delta_i)$ とみることができ、 $-\sigma_n^c$ は δ_n についての単調減少関数、 δ_i につ

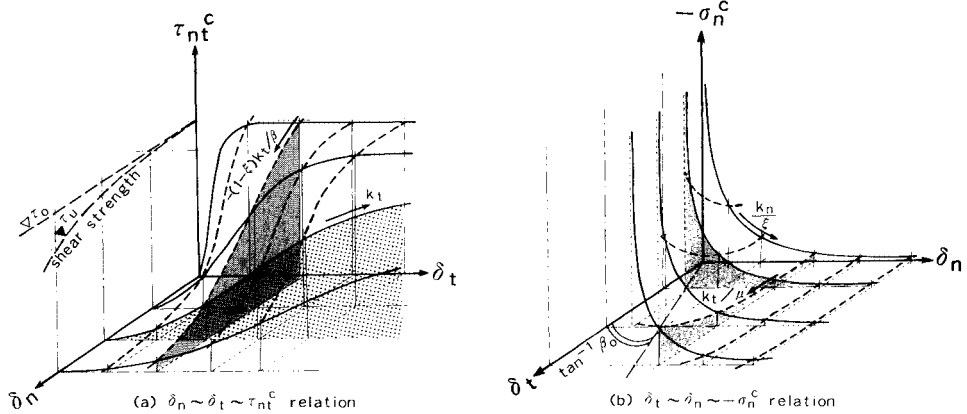


図-10 界面の力学4量に関する非線形挙動

いての単調増加関数となっていることがわかり、おのこの勾配は、表-2から、 $d\sigma_n^c/d\delta_n = k_n/\xi$ 、 $-\sigma_n^c/\delta_t = k_t/\mu_f$ で与えられる。ひびわれ界面の垂直応力 σ_n^c は圧縮($\sigma_n^c < 0$)の場合のみを取り扱い、これが引張応力($\sigma_n^c \geq 0$)のときは、Sモードとしてのモデル化となり、これは別報²⁾で詳述した。また、 $\delta_t > 0$ の状態では $\delta_n = 0$ を定義することはできない。これは、あるすべりを生じた状態($\delta_t > 0$)で、ひびわれ幅を完全に閉合($\delta_n = 0$)しようとするもので、物理的に不可能であり、 $-\sigma_n^c \rightarrow \infty$ となる。このことは、 (δ_n, δ_t) 平面上で非定義領域が存在することを意味し、これは図-7または式(25)から、

$$\delta_n < \beta_0 \delta_t \dots \dots \dots (31)$$

のように表わされることがわかる。ここで、 β_0 は、式(29)において圧縮垂直応力を $-\sigma_n^c \rightarrow \infty$ としたときのダイレイタンシー比を示すもので、これを限界ダイレイタンシー比とよぶ。これはまた、図-10(b)において、 $\delta_n = \beta_0 \delta_t$ なる漸断面(実際は曲面)として図示される。

以上までの定性的考察は、既往の実験結果とおおむね合致するものであり、本文で示した解析モデルとこれを模式的に図化した図-10は、それらに合理的・系統的な力学的解釈を付与するものと考えられる。

6. ま と め

著者らは、コンクリートのひびわれ界面における力学挙動を2つの典型的なひびわれモードに分類し、そのうち本文では、Fモードひびわれ(摩擦接触状態)についての理論的検討を行った。その結果、本文のまとめとして、次のように要約することができる。

(1) ひびわれ界面に作用する応力(τ_{nt}^c, σ_n^c)と、その不連続変位量(δ_t, δ_n)を界面の力学4量と称し、これらの構成方程式を導出した。これは、通常の実験的

観測に基づく界面4量の相関関係から出発し、数学的には連鎖則と全微分から算定したものである。これは、いわば第3の材料構成方程式として機能し、ひびわれを有する鉄筋コンクリート部材の非線形変形解析において本質的な役割をもつ。

(2) ひびわれ界面の構成方程式は、非対称性を有するとともに、無次元パラメーター $\xi = 0$ のときのみ特異となる(または、 $\xi > 0$ のとき、そのマトリックスは、正定値であることが保証される)。これは、ひびわれ界面の特殊な非線形現象が数学的に反映されたものといえる。

(3) さらに、マトリックス[F]を構成するため、基本4係数(剛性 k_n, k_t と交叉係数 μ_f, β_0)を導入するとともに、これらを界面4量の偏導関数で定義した。

(4) これらの基本4係数のうち、垂直およびせん断剛性については具体的な材料モデルを提案するとともに、既往の実験例にあてはめ、良好な適合性を確認することができた。最終的には、実験結果から基本4係数を同定する必要があるが、現段階の実験データでは十分とはいえず、さらに広範囲で系統的な実験が必要とされる。

(5) $\delta_n \sim \delta_t \sim \tau_{nt}^c$ および $\delta_n \sim \delta_t \sim -\sigma_n^c$ の相関曲面(図-10)を模式的に示し、界面4量の関係についての定性的考察を行った。この結果、単調比例载荷における、ひびわれ界面の複雑な力学挙動を明瞭に論出するとともに、これまで知られている実験的事実に対して、合理的・系統的な解釈を与えることができたといえる。

本文は、ただ1本のひびわれ挙動に関する解析モデルであるが、これは、接合要素を用いるか、または著者らの提案するクラックひずみ法^{11,3)}によって容易に有限要素解析に組み込むことが可能である。また、基本4係数を与えるための諸物性値(たとえば、式(21)、(22)の $K_{1st}, \delta_{21}, \tau_u$ 、式(25)、(26)の b_1, b_2 など)を決定す

必要がある。著者らは、上記2点を次の課題と考え、現在とりまとめ中であり、早い機会に発表する予定である。

Appendix

本文中の式(4)をマトリックス表示すると下式のよ
うに表わすことができる。

$$\begin{Bmatrix} d\delta_t \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{nt}^c}{\partial \tau_{nt}^c} & \frac{\partial \tau_{nt}^c}{\partial \delta_n} \\ \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \tau_{nt}^c} & \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \delta_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tau_{nt}^c \\ d\delta_n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(32\cdot a)$$

一方、式(3\cdot a)の逆関数(3\cdot b)についても、同様に
全微分をとり、マトリックス表示すると、

$$\begin{Bmatrix} d\tau_{nt}^c \\ d\delta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{nt}^c}{\partial \delta_t} & \frac{\partial \tau_{nt}^c}{\partial \sigma_n^c} \\ \frac{\partial \delta_n}{\partial \delta_t} & \frac{\partial \delta_n}{\partial \sigma_n^c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\delta_t \\ d\sigma_n^c \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(32\cdot b)$$

が得られる。式(32\cdot b)を式(32\cdot a)に代入し、整理
すると、次式のような偏導関数相互の関係式を導くこと
ができる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \delta_t}{\partial \tau_{nt}^c} & \frac{\partial \delta_t}{\partial \delta_n} \\ \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \tau_{nt}^c} & \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \delta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{nt}^c}{\partial \delta_t} & \frac{\partial \tau_{nt}^c}{\partial \sigma_n^c} \\ \frac{\partial \delta_n}{\partial \delta_t} & \frac{\partial \delta_n}{\partial \sigma_n^c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(33)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_t}{\partial \tau_{nt}^c} \frac{\partial \tau_{nt}^c}{\partial \delta_t} + \frac{\partial \delta_t}{\partial \delta_n} \frac{\partial \delta_n}{\partial \delta_t} &= 1 \\ \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \tau_{nt}^c} \frac{\partial \tau_{nt}^c}{\partial \delta_t} + \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \delta_n} \frac{\partial \delta_n}{\partial \delta_t} &= 0 \\ \frac{\partial \delta_t}{\partial \tau_{nt}^c} \frac{\partial \tau_{nt}^c}{\partial \sigma_n^c} + \frac{\partial \delta_t}{\partial \delta_n} \frac{\partial \delta_n}{\partial \sigma_n^c} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \tau_{nt}^c} \frac{\partial \tau_{nt}^c}{\partial \sigma_n^c} + \frac{\partial \sigma_n^c}{\partial \delta_n} \frac{\partial \delta_n}{\partial \sigma_n^c} &= 1 \end{aligned} \dots\dots\dots(34)$$

上式に式(5)、(6)で定義した諸係数を代入し、必要
な項のみ取り出すと、次式のようなダイレイタンス比
に関する関係式を求めることができる。

$$\frac{\beta_a}{\beta'_a} = 1 - \frac{\mu_f \beta_a k_n}{k_t} = 1 - \xi \dots\dots\dots(35)$$

参 考 文 献

1) 田辺忠顕・吉川弘道：クラックひずみを導入したコン
クリート構造物の有限要素モデル、RC構造の有限要素解
析に関するコロキウム、日本コンクリート工学協会、
pp. 65~72, 1984年12月。
2) 吉川弘道・田辺忠顕：鉄筋コンクリート部材の引張剛性
に関する解析的研究、土木学会論文集、No. 366/V-4、
pp. 93~102, 1986年2月。
3) Yoshikawa, H. and Tanabe, T. : A Finite Element

Model for Cracked Reinforced Concrete Members Intro-
ducing Crack Strain Concept, Seminar on Finite Ele-
ment Analysis of Reinforced Concrete Structures, JCI,
Vol. 2, pp. 237~246, May, 1985.
4) Paulay, T. and Loeber, P.J. : Shear Transfer by
Aggregate Interlock, SP 42, American Concrete Insti-
tute, pp. 1~15, 1974.
5) Mattock, A. H. and Hawkins, N. M. : Shear Transfer in
Reinforced Concrete-Recent Research, Journal of the
Prestressed Concrete Institute, Vol. 17, No. 2, pp. 55~
75, March-April, 1972.
6) Bazant, Z. P. and Tsubaki, T. : Slip-Dilatancy Model
for Cracked Reinforced Concrete, Journal of the Structu-
ral Division, ASCE, Vol. 106, No. ST 9, pp. 1947~
1966, Sept., 1980.
7) 吉川弘道・梅原秀哲・田辺忠顕：RC平板の面内せん断
強度諸理論の統一の評価ならびにそれに基づく新強度式
の提案、第2回RC構造のせん断問題に対する解析的研
究に関するコロキウム、日本コンクリート工学協会、
pp. 69~78, 1983年10月。
8) Task Committee on Finite Element Analysis of Rein-
forced Concrete Structures of the Structural Division
Committee on Concrete and Masonry Structures, State-
of-the-Art Report on Finite Element Analysis of Rein-
forced Concrete, ASCE, 1982.
9) Heuze, F. E. and Barbour, T. G. : New Models for
Rock Joints and Interfaces, Journal of the Geotechnical
Engineering Division, ASCE, Vol. 108, No. GT 5,
pp. 757~776, May, 1982.
10) 青柳征夫・山田一字：面内力を受ける鉄筋コンクリート
シェル要素の耐力変形特性、土木学会論文報告集、第
331号、pp. 167~180, 1983年3月。
11) Reinhardt, H. W. and Walraven, J. C. : Cracks in Con-
crete Subject to Shear, Journal of the Structural Di-
vision, ASCE, Vol. 108, No. ST 1, pp. 207~224,
Jan., 1982.
12) Millard, S. G. and Johnson, R. P. : Shear Transfer in
Cracked Reinforced Concrete, Magazine of Concrete
Research, Vol. 37, No. 130, pp. 3~15, March 1985.
13) Laible, J. P., White, R. N. and Gergely, P. : Ex-
perimental Investigation of Shear Transfer Across
Cracks in Concrete Nuclear Containment Vessels,
SP-53, American Concrete Institute, pp. 203~226,
1977.
14) Bazant, Z. P. and Gambarova, P. : Rough Cracks in
Reinforced Concrete, Journal of the Structural Division,
ASCE, Vol. 106, No. ST 4, pp. 819~842, April, 1980.
15) Xiurun, G. : Non-Linear Analysis of a Joint Element
and Its Application in Rock Engineering, International
Journal for Numerical and Analytical Methods in
Geomechanics, Vol. 5, No. 3, pp. 229~245, Sep., 1981.
(1985. 9. 24・受付)