

# 補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート はり部材の曲げ変形解析\*

## ANALYSIS OF DEFORMATIONS IN BENDING OF REINFORCED CONCRETE BEAMS INCLUDING BOND-SLIP OF REINFORCEMENT

上田正生\*\*・土橋由造\*\*\*

By Masaiki UEDA and Yoshizo DOBASHI

This paper deals with the analysis of reinforced concrete beam members in flexure on the assumption that after deformed they retain the original planarity of their concrete section while the bond-slip of the steel is allowed for. In an initial effort differential equations governing their bending in the statically linear region are derived based on the potential energy principles; then the finite element formulation of the problem is implemented by use of both high- and low-degree types of shape function elements; and associated numerical examples are subsequently solved whereby to examine the effects of the bond-slip on the bending of r. c. beams in the considered region.

The foregoing is followed by the nonlinear development of a finite element procedure which in a more analogous form to reality is intended as a means of pursuing with a low-degree function element in use deformational behaviors of the structure attended by its cracking in the material-nonlinear region.

As a worked example in point some current analytical result on a cantilever beam is shown in comparison with its experimental correspondent in the literature by way of serving thus to substantiate the use of the presented procedure.

### 1. はじめに

近年、終局限界のみならず使用限界をも重視する鉄筋コンクリート (RC) 構造の限界状態設計法の導入気運が、わが国や欧米を含む世界的な規模で醸成され、またその期も熟するに及んで、RC 部材の変形挙動の評価の重要性は、従来にも増して昂まりつつあるのが現状のように思われる。

一般に、鉄筋とコンクリートが共に弾性域にある場合、構造部材の変形と応力は、既往の弾性理論に従って容易に求めることができるので、通常は何らの困難も生じない。RC 部材の変形挙動を予測する際に問題となるのは、改めて指摘するまでもなく、コンクリートに亀裂が生じた後の非弾性領域においてである。いくつか指摘し得る問題点のうちで、最も重要なものとして次の二点を挙げるができる。一つは、「亀裂発生後の RC はり部材の曲げ剛性の評価」であり、他の一つは、「フーチングと柱、はりと柱、あるいは、はりとスラブ等の部材接合部の変形挙動の追跡」である。ここに挙げた両者と密接

なかかわりをもつのは、いうまでもなく“鉄筋とコンクリートの間の付着作用”であるが、前者では、鉄筋からコンクリートへの力の伝達の程度が重要であるのに対して、後者では、主として接合部からの補強筋の抜け出しが問題となるという違いがある。いずれによせ、付着作用の評価法の善し悪しが、個々の解析手法の信頼性と精度に大きく影響することは確かである。したがって、RC 部材内部の実際の付着機構を、でき得る限り精度よくモデル化して解析に取り入れることが重要となる。

コンクリートの亀裂の進展とともに、RC 部材の内部で実際に起こっている付着現象はきわめて複雑なので、これを理論的に取り扱う場合には、何らかの単純化を行うのが普通である。

周知のように、その最も単純なモデルは、「RC はり部材の曲げ剛性の評価」を目的とするもので、複雑な付着機構を直接取り扱わずに、付着作用の結果として鉄筋から伝達されるコンクリートの引張り側の応力分担を、経験に基づいて近似的に評価し、この部分の曲げ剛性への寄与を算定する間接的な方法である<sup>1)</sup>。この種の手法には数種あるが、いずれも「引張り側コンクリートの応力分担を、部材の平均ひずみと関係づけて取り扱う」、いわば“平均化手法”と呼称して分類し得るものである。またこれとは別に、RC はりやスラブの弾性から破壊に

\* 本報告の一部は、土木学会北海道支部論文報告集、第41号(昭和60年2月)に発表。

\*\* 正会員 北海道大学助教授 工学部一般教育等図学教室 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

\*\*\* 正会員 工博 北海道大学教授 工学部(同上)

いたる連続した荷重-変形挙動を追跡し得る有用な材料非線形解析手法として、部材を厚さ方向に仮想分割して取り扱う積層化有限要素法（はりの場合、Fiber要素とよばれている）がある<sup>2)</sup>。ここでは、“tension stiffening effect” と称し、亀裂の生じた要素の被亀裂部分のコンクリート応力を、ひずみに関連づけて漸減させていく手法が多用されているが、この種の解析法も、引張り側のコンクリートの剛性の評価という観点からすれば、先の“平均化手法”の範疇に含めて考えることができるものである。

曲げを受ける RC はりの付着作用を取り扱うための他のモデル化は、この作用を何らかの形で解析に取り入れる直接的な方法である。この種の手法の代表的なものとしては、はりを平面応力問題として扱う有限要素法による材料非線形解析法があり、鉄筋とコンクリートの付着作用を、1) すべり現象とみなして、ボンド・リンクで表示する方法や<sup>3)~7)</sup>、2) 鉄筋近傍のコンクリートのせん断作用に求める手法<sup>8)</sup>、等があることは周知のとおりである。はりを二次元応力問題として解析するこれらの手法は、単にはりの曲げやせん断の問題だけでなく、部材接合部の変形挙動の追跡にも使用することが可能であり、きわめて広い応用性と可能性をもっている。しかし、計算量が膨大となるため、電子計算機の容量と演算速度が大幅に向上した今日においてもなお、その実用性は、部材単位のマイクロな問題への適用に限られているのが現状である。

一方最近では、従来の平面保持の仮定に立脚したはり要素に、補強筋のすべりの効果を組み入れたいくつかの解析手法が報告されるようになった<sup>9)~11)</sup>。これらの先駆的な研究は、「これまで、直接的には二次元平面応力問題としてしか扱いきれなかったはり内部の鉄筋の付着作用を、より簡単なはりの曲げ問題の一部として取り扱いきる可能性を示唆した」という意味で、特筆すべきもののように思われる。この種の手法は、RC はりの亀裂現象を実際に近い形で追跡するという点では、前述の有限要素法による二次元解析手法には遠く及ばないが、実在規模の RC 構造物への適用性の点ではるかに優れており、近い将来、RC 部材の付着現象を取り扱うことができる有力な解析法の一つとして発展する可能性がある。しかしながら、これらの解析手法の多くは、いまだ試行・改良の余地と必要があり、また材料非線形領域を志向する余り、この種の問題の最も基本となる線形領域における支配微分方程式についてさえ未整備の状態にあるのが現状のように思われる。

以上のような研究の現状に鑑み、本報告では、鉄筋とコンクリートの付着作用をすべり現象とみなし、これを既往の微小変形はり理論に導入した場合の RC はりの

線形領域における支配微分方程式を導き、さらにこの理論に基づいて有限要素法による定式化を行い、線形ならびに非線形解析例を示して、若干の検討・考察を加えたものである。

## 2. 補強筋のすべりを考慮した RC はりの曲げ理論

既往の RC はりの弾性曲げ理論は、完全付着の仮定に基づいており、補強筋のすべりを考慮した場合についての研究は、著者の知る限りでは見当たらない。もちろん、それは、1) 鉄筋の付着すべりが重要な問題となるのは、亀裂発生後の非弾性領域においてであること、2) 弾性領域における RC はりの実測たわみは、通常の弾性理論によって十分予測することが可能なこと、などにも起因している。しかしながら、アンボンド PC という構造形式が現実存在する以上、線形領域における理論上の不備を補完しておくことは、必要なことのように思われる。

### (1) 基本仮定事項

- ① はりには軸力と曲げが作用するものとし、鉛直せん断変形無視の微小変形理論が適用できるものとする。
- ② コンクリートは弾性体であり、コンクリート横断面には、変形後も平面保持の仮定が成立する。
- ③ 鉄筋ははり丈方向には大きさをもたず、配筋位置に集中して存在する弾性体とする。
- ④ 鉄筋とコンクリートの間には、配筋（材軸）方向の付着すべりが生じ、ある位置における鉄筋のすべり変位は、平面が保持されるその位置のコンクリート部分からのずれ変位で表示でき、また付着応力とすべり変位の間には、線形関係が成立するものとする。

### (2) 変位場、およびひずみと応力

図-1 に示す断面記号を用い、鉄筋は断面内に  $m$  層配筋されているものとする。前節の仮定に基づき、この問題を定式化するため設定しなければならない変位場は、はり中央面の  $x$  軸上の材軸方向の変位  $u$  と、 $z$  軸方向の変位  $w$ 、および断面内に  $m$  層配筋されている各鉄筋層のすべり変位  $S_1, S_2, \dots, S_1, \dots, S_m$  の形  $(2+m)$  個の独立変数である。

[コンクリート部分のひずみと応力]： はり中央面から  $z$  だけ離れた任意点のコンクリート部分のひずみ  $\varepsilon_c$  は、下式で表わされる。

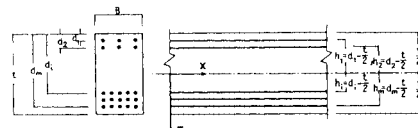


図-1 RC はりの断面記号

$$z\epsilon_c = \epsilon_0 + z \cdot \phi \dots \dots \dots (1)$$

上式中の  $\epsilon_0$ ,  $\phi$  は, 次式で与えられる.

$$\epsilon_0 = u' = du/dx \dots \dots \dots (2)$$

$$\phi = -w'' = -d^2w/dx^2 \dots \dots \dots (3)$$

したがって, 同じ位置のコンクリートの応力  $z\sigma_c$  は,

$$z\sigma_c = E_c \cdot \epsilon_c = E_c(\epsilon_0 + z \cdot \phi) \dots \dots \dots (4)$$

ただし,  $E_c$ : コンクリートのヤング係数

[鉄筋層のひずみと応力]: はり断面内に  $m$  個存在する鉄筋層のうち, 任意の  $i$  層を考える. この層の鉄筋のひずみ  $\epsilon_{si}$  は, 前節の仮定③と④より次のように表示することができる.

$$\epsilon_{si} = \epsilon_0 + h_i \phi + \epsilon_{bsi} \dots \dots \dots (5)$$

上式(5)中の  $\epsilon_{bsi}$  は  $i$  層の鉄筋のすべり率であり,

$$\epsilon_{bsi} = S'_i = dS_i/dx \dots \dots \dots (6)$$

したがってまた, この  $i$  層の鉄筋の応力  $\sigma_{si}$  は,

$$\sigma_{si} = E_{si} \epsilon_{si} \dots \dots \dots (7)$$

ただし,  $E_{si}$ :  $i$  層の鉄筋のヤング係数

### (3) 軸力, 曲げモーメント, およびせん断力

はりの任意断面における軸力  $N$  と曲げモーメント  $M$  は, 式(1)~(7)の関係を用いて容易に求められ, 次のようになる.

$$N = \left( AE_c + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} \right) u' - \left( \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} h_i \right) w'' + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} S'_i \dots \dots \dots (8)$$

$$M = \left( \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_i \right) u' - \left( E_c I_0 + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_i^2 \right) w'' + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} h_i S'_i \dots \dots \dots (9)$$

また, せん断力  $Q$  は, モーメント  $M$  を微分して得られ, 下式となる.

$$Q = \left( \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_i \right) u'' - \left( E_c I_0 + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_i^2 \right) w''' + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} h_i S''_i \dots \dots \dots (10)$$

ただし,  $A_{si}$ : 鉄筋層  $i$  の断面積,  $A_{si}^*$ : 鉄筋層  $i$  によるコンクリートの断面欠損を考慮するための等価断面積で  $A_{si}^* = A_{si}(1 - E_c/E_{si})$ ,  $A$ : 無筋の場合のはり断面積,  $I_0$ : 無筋の場合の断面二次モーメントで  $I_0 = B I^3 / 12$

### (4) 全ポテンシャル・エネルギー汎関数

周知のように全ポテンシャル・エネルギーは, 次式で表示される.

$$II = U - V \dots \dots \dots (11)$$

ここに,  $U$  は外力の作用によって構造系の内部に蓄えられる内部エネルギーであり, また  $V$  は外力がなす負荷ポテンシャル・エネルギーである.

[内部エネルギー  $U$ ]: 付着すべりを考慮した場合の内部エネルギーは, 下式で表わすことができる<sup>19)</sup>.

$$U = U_{cn} + U_{st} + U_{bs} \dots \dots \dots (12)$$

上式中の  $U_{cn}$  と  $U_{st}$  は, それぞれコンクリートと全鉄筋層に蓄積されるひずみエネルギーであり,  $U_{bs}$  は, 各層の鉄筋とコンクリートの界面に生ずる付着すべりにかかるエネルギーの総和である. これらのうち, コンクリート部分のひずみエネルギー  $U_{cn}$  は式(1), (4)を用い, また全鉄筋層のひずみエネルギー  $U_{st}$  は式(5), (7)の関係により求められ, それぞれ次のようになる.

$$U_{cn} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{l/2}^{l/2} B E_c z \epsilon_c^2 dz dx - \frac{1}{2} \int_0^L E_c \left( \sum_{i=1}^m A_{si} h_i \epsilon_c^2 \right) dx \dots \dots \dots (13)$$

$$U_{st} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} \epsilon_{si}^2 \right) dx \dots \dots \dots (14)$$

ただし,  $L$ : はりの部材長,  $h_i \epsilon_c$ :  $i$  層の鉄筋位置のコンクリートのひずみ

上式(13)の右辺の第2項目は, 鉄筋によるコンクリートの断面欠損を考慮するために必要となるものである.

次に,  $U_{bs}$  を考える. 基本仮定事項④に従えば, 任意の鉄筋層  $i$  の付着境界に生ずる付着応力  $\tau_i$  とすべり変位  $S_i$  の間には, 次の関係が成立する.

$$\tau_i = K_{bi} S_i \dots \dots \dots (15)$$

ただし,  $K_{bi}$ :  $i$  層の鉄筋の付着係数.

したがって, 全鉄筋層の付着すべりにかかる内部エネルギー  $U_{bs}$  は, 下式で表示することができる.

$$U_{bs} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \sum_{i=1}^m A_{bsi} K_{bi} S_i^2 \right) dx \dots \dots \dots (16)$$

ただし,  $A_{bsi}$ : 単位長さ当たりの鉄筋層  $i$  の表面積.

[負荷ポテンシャル・エネルギー  $V$ ]: 外力のなす負荷ポテンシャル  $V$  は, 荷重条件に応じて異なったものとなる. ここでは一例として, はりの両端に軸荷重  $P_u$  が, また  $z$  方向には一様な分布荷重  $q_z$  が作用する場合を考え, 鉄筋はすべて材端で定着されているものとする. 負荷ポテンシャル・エネルギー  $V$  は, 次のように表わされる.

$$V = \int_0^L (P_u u' + q_z w) dx \dots \dots \dots (17)$$

[汎関数  $II$ ]: 以上で得た  $U_{cn}$ ,  $U_{st}$ ,  $U_{bs}$ ,  $V$  を式(11)に代入して整理すると, 全ポテンシャル・エネルギー汎関数  $II$  が求められ, 下式となる.

$$II = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left( AE_c + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} \right) (u')^2 - 2 \left( \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_i \right) u' \cdot w'' + \left( E_c I_0 + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_i^2 \right) (w'')^2 + 2 \cdot u' \left( \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} S'_i \right) - 2 \left( \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} h_i S'_i \right) w'' + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} (S_i')^2 + \sum_{i=1}^m A_{bsi} K_{bi} S_i^2 \right] dx - \int_0^L (P_u u' + q_z \cdot w) dx \dots \dots \dots (18)$$

(5) 支配微分方程式

補強筋のすべりを考慮した RC はりの曲げを支配する基礎微分方程式は、前節式 (19) の全ポテンシャル・エネルギー汎関数  $\Pi$  の停留関数として求めることができる。変位  $u$  と  $w$ 、および任意の鉄筋層  $i$  のすべり変位  $S_i$  に関して、Euler-Lagrange 方程式を構成すると、以下に示す支配微分方程式を得る。

変位  $u$  に関して：

$$\left( AE_c + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} \right) u'' - \left( \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_i \right) w'' + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} S_i'' = 0 \dots\dots\dots (19)$$

変位  $w$  に関して：

$$-\left( \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_i \right) u'' + \left( E_c I_0 + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_i \right) w'' - \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} h_i S_i'' = q_z \dots\dots\dots (20)$$

変位  $S_i$  に関して：

$$A_{si} E_{si} (u'' - h_i w'' + S_i'') = A_{bsi} K_{bi} S_i \dots\dots\dots (21)$$

ただし、 $i=1 \sim m$

これらの式のうち式 (21) は、はり断面内に配筋されている鉄筋層の数  $m$  だけ成立するから、これと同種の式は  $m$  個存在することになる。また上記の 3 式は、式 (8)~(10) の関係を用いて以下に示す一連の平衡方程式に変換することができる。

$$N' = dN/dx = 0 \dots\dots\dots (22)$$

$$M'' = d^2M/dx^2 = q_z \dots\dots\dots (23)$$

$$A_{si} \sigma_{si}' = A_{si} d\sigma_{si}/dx = A_{bsi} \tau_i \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 $i=1 \sim m$

上の最後の式 (24) はいうまでもなく、従来、はりの変形とは全く独立に、“曲げ付着”として論じられてきた慣用の式に対応するものであり、本論ではこれを、はりの曲げ変形理論の中に完全に取り込んだことになる。

3. 有限要素法による線形解析

前章の全ポテンシャル・エネルギー汎関数に基づく有限要素法により、以下に述べる高・低 2 種の形状関数要素を用いて解析を行ってみる。ただし、鉄筋ははり断面内に  $m$  層配筋されているものとする。

(1) 高次関数要素 (H-ELM)

解析に用いた高次関数要素 H-ELM を図-2 に掲げる。この要素の独立変数  $u$ 、 $w$ 、 $S_i$  の形状関数は、そ

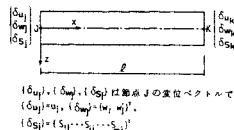
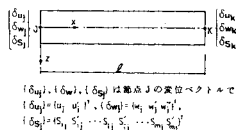


図-2 高次関数要素 H-ELM 図-3 低次関数要素 L-ELM

それぞれ次のように仮定される。

$$u = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \alpha_{u1} \ \alpha_{u2} \ \alpha_{u3} \ \alpha_{u4}^T = [f_3] \alpha_u \dots\dots\dots (25)$$

$$w = [1 \ x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5] \alpha_{w1} \ \alpha_{w2} \ \alpha_{w3} \ \alpha_{w4} \ \alpha_{w5}^T = [f_5] \alpha_w \dots\dots\dots (26)$$

$$S_i = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \alpha_{S1i} \ \alpha_{S2i} \ \alpha_{S3i} \ \alpha_{S4i}^T = [f_3] \alpha_{S_i} \dots\dots\dots (27)$$

ただし、 $i=1 \sim m$

ここに、 $\alpha_u$ 、 $\alpha_w$ 、 $\alpha_{S_i}$  は、それぞれ  $u$ 、 $w$ 、 $S_i$  の一般化変位で、これらはまた対応する図-2 中の各節点変位ベクトル  $\{\delta_u\}$ 、 $\{\delta_w\}$ 、 $\{\delta_{S_i}\}$  と関係づけられる。

(2) 低次関数要素 (L-ELM)

図-3 に示すこの低次関数要素は、変形法を用いてこの問題を定式化するための最も単純な要素である。この要素の独立変数  $u$ 、 $w$ 、 $S_i$  の形状関数は、以下のように書くことができる。

$$u = [1 \ x] \alpha_{u1} \ \alpha_{u2}^T = [f_1] \alpha_u \dots\dots\dots (28)$$

$$w = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \alpha_{w1} \ \alpha_{w2} \ \alpha_{w3} \ \alpha_{w4}^T = [f_3] \alpha_w \dots\dots\dots (29)$$

$$S_i = [1 \ x] \alpha_{S1i} \ \alpha_{S2i}^T = [f_1] \alpha_{S_i} \dots\dots\dots (30)$$

ただし、 $i=1 \sim m$

ここに、 $\alpha_u$ 、 $\alpha_w$ 、 $\alpha_{S_i}$  は、先の高次関数要素の場合と同様、それぞれ変位  $u$ 、 $w$ 、 $S_i$  の一般化変位で、これらもまた対応する図-3 の節点変位ベクトル  $\{\delta_u\}$ 、 $\{\delta_w\}$ 、 $\{\delta_{S_i}\}$  と関係づけられる。

(3) 剛性マトリックス

上記 2 種の RC はり要素に対する剛性マトリックスは、通常の有限要素展開の手続きに従って、それぞれ独自に求めることができる。必要な諸式を前掲の汎関数式 (18) に代入し、各節点変位に関して変分をとることにより、両要素の剛性マトリックスは、見掛け上全く相似な型で次のように書き下すことができる。

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{us} \\ K_{uw}^T & K_{ww} & K_{ws} \\ K_{us}^T & K_{ws}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_u \\ \delta_w \\ \delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_u \\ P_w \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

4. 有限要素法による非線形解析

理論解析が非常に繁雑となる鉄筋とコンクリートの付着すべり現象を、直接取り扱わざるを得ないのは、亀裂近傍の鉄筋の抜け出しが支配的となるはりと柱等の接合部の変形挙動の問題に対してであり、亀裂発生後の RC はり部材の曲げ剛性の評価を意図する場合には、より平易で間接的な“平均化手法”がきわめて有効に使用できることは、先にも触れたとおりである。したがって、短期荷重下における、RC はり部材の曲げ変形挙動の解析のみを目的とする限り、学問的な興味は別として、ある間隔をおいて散発的に発生する実際の亀裂現象を、現実に近い型で忠実に追跡することの必要性は低く、またその意義も希薄である。しかしながら、事が「使用荷重下における、RC 部材の長期変形挙動の問題」となると、

事情は一変する。その理由としては、1) 通常の RC 部材では、使用荷重下における亀裂の発生が不可避であること、2) この場合の亀裂の発生はきわめて“まばら”で、その付着作用も局所的であること、また、3) 亀裂位置は接合部近くのモーメントの急変部が少なくなく、既往の長期解析で使用されている“平均化手法”の適用性には疑問があること、などが挙げられる。したがって、亀裂の生じた RC はり部材の、より詳細な長期変形解析を可能にするためにも、まず、短期荷重下のはりの亀裂現象を、実際に近い形で再現できる解析手法を確立することが必要となる。

平面保持の仮定に立脚するはり要素に、補強筋のすべりの効果を取り入れた既往の RC はりの非線形解析としては、Aldstedt ら<sup>9)</sup>、鬼沢ら<sup>10)</sup>、多田・武田<sup>11)</sup>、松浦・山本<sup>12)</sup>、黒正ら<sup>13)</sup>、市之瀬<sup>14)</sup>、小坂ら<sup>15)</sup>、佐藤・青柳<sup>16),17)</sup>、等の研究がある。これらのうち、多田らと市之瀬の報告は「はりと柱の接合部（両端の2個）を含めた1つのはり部材を、弾性状態に限定される1個のはり要素と、その両端に、塑性挙動を表示するためのプラスチックヒンジ要素、およびこれに隣接する接合部をつなぎ合わせて構成するマクロなモデル」で、地震時のはり・柱接合部の解析等に適する方法である。他の研究は、長期変形解析を目的とした Aldstedt らと松浦らの報告を含めて、すべて、RC はりの変形挙動をより詳細に追跡することを意図しているが、亀裂間隔まで表現し得るのは、著者の知る限りでは今のところ、佐藤らの報告があるのみである。したがって、RC はりの荷重-変形挙動を実際に近い形で表現するという観点からすれば、平面保持の仮定に準拠したこの種の解析手法としては、佐藤らの研究が、現時点における最も進んだ解法の1つとして位置づけることができるように思われる。しかしながら、この研究では、荷重条件が一定モーメントおよび一定軸力下に限定されており、また亀裂の発生に伴って生ずる鉄筋のすべり方向の逆転による、付着応力の除荷の効果が無視されている。

ここでは、接合部等の拘束端からの鉄筋の抜け出しや、亀裂間隔をも表示可能な、より適用性の広い RC はり部材の材料非線形付着すべり解析のための一手法について記述することとする。

(1) 仮定事項

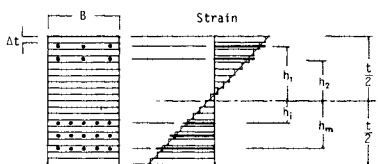


図-4 Fiber 要素の断面記号

① 前節で展開した低次関数要素 (L-ELM) を用いるものとし、ひずみ量に応じてはり丈方向に変化するコンクリート部分の材料性状の違いを表示するため、図-4 に示すように、はり断面を厚さ方向に層状に仮想分割して取り扱う周知の Fiber 要素を採用する。

② 部材は単調増加荷重下のみあり、コンクリートと鉄筋の応力-ひずみ関係、および各鉄筋層の付着応力-すべり関係は、部材全域にわたって同一の性質を有するものとする。ただし、各コンクリート層および鉄筋層は、異なった接線剛性をとり得るものとし、これらの係数は、個々の層の中心点のひずみを用いて評価する。

③ コンクリートの亀裂は材軸に垂直に生ずるものとし、解析に際しては、他の要素より長さの十分短い、既報<sup>9)</sup>で詳述した亀裂を表示するための要素（以下亀裂要素と呼称）を分散・配置しておき、亀裂はこの要素に選択的に発生させる。

④ 非線形解法としては、接線剛性を用いた初期応力法に基づく荷重増分反復法を使用する。

(2) 材料性状と構成関係

a) コンクリートの応力-ひずみ関係

コンクリートは、図-5 に示すように引張り側では、弾性-亀裂材料として、また圧縮側では、一軸圧縮強度  $\sigma_{cc}$  に達するまでは、Saenz のシミュレート曲線で表示でき、C 点で剛性を失い ( $E_{ct}=0$ )、以後は F 点まで保持応力を減衰していき、F 点に至って全応力を消失するものとする<sup>19)</sup>。

b) 鉄筋の応力-ひずみ関係

各鉄筋層は、それぞれの材質に応じた図-6 に例示する bilinear の完全弾・塑性材料として取り扱う。

c) 付着応力-すべり関係

部材内のある位置に、鉄筋を横切るような亀裂が発生すると、亀裂を挟んだどちらか一方の側にすべり方向の逆転が起こるので、部材全体が単調増加荷重下にある場合でも、付着応力-すべり関係（以下  $\tau$ -S 関係と略記）には、除荷による載荷履歴の影響を考慮することが必要となる。ここでは、森田らの  $\tau$ -S モデルに準拠して既報<sup>9)</sup>で設定した図-7 に示す  $\tau$ -S 関係を用いることとする。

(3) 非線形解析のための増分汎関数

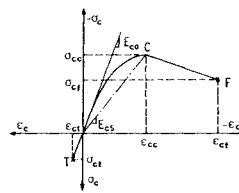


図-5 コンクリートの仮定応力-ひずみ関係

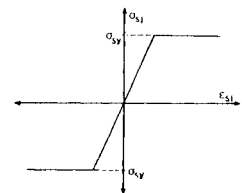


図-6 鉄筋の仮定応力-ひずみ関係

前節(1)の仮定④より、各荷重増分段階では Piece-wise Linear が適用されるので、基本的には前章の汎関数式(18)が有効であるが、非線形領域においては、個々の要素の各薄層ごとに構成材料の接線剛性が異なるので、先の汎関数は、非線形解析のための Fiber 要素に適した型に書き換えることが必要になる。この汎関数は増分形で表示され下式となる。

$$\begin{aligned} \Delta \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \left( B \cdot \Delta t \sum_{i=1}^n E_{ci} + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} \right) (\Delta u')^2 \right. \\ & - 2 \left( B \cdot \Delta t \sum_{i=1}^n E_{ci} z_i + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_i \right) \Delta u' \cdot \Delta w'' \\ & + 2 \Delta u' \left( \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} \Delta S_i \right) + \left( B \cdot \Delta t \sum_{i=1}^n E_{ci} z_i^2 \right. \\ & + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_i^2 \left. \right) (\Delta w'')^2 - 2 \Delta w'' \left( \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} h_i \Delta S_i \right) \\ & + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} (\Delta S_i)^2 + \sum_{i=1}^m A_{bsi} K_{bsi} \Delta S_i^2 \left. \right] dx \\ & - \int_0^l (\Delta p_u \cdot \Delta u + \Delta q_z \cdot \Delta w) dx \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

ただし、 $\Delta t$ ：仮想分割断面のコンクリート層の厚さ  
 $E_{ci}$ ： $i$ 層のコンクリートの接線ヤング係数

(4) 非線形解析手法

非線形領域における本解析法の計算手順は、亀裂要素の取り扱い等、基本的には、すでに著者が文献(19)で報告した手法と同一である。したがって、ここでは重複を避け、本報告に特徴的な事項についてのみ記述することにする。

以下では、①平面保持の仮定がもたらす矛盾点を指摘し、②これを克服するためにとられている既往の手法について言及した後、③より実際に近い形でコンクリートの亀裂現象を表示するために、本解析法で用いた一簡略化手法について述べる。

① 平面保持の仮定がもたらす矛盾点：論点を明確にするために、図-8に示すような、一定モーメントに支配される単配筋のはり部材を考える。はり幅方向の応力分布を平均化して扱くと、亀裂近傍の(図-8のA-A断面から $\xi$ 方向)各横断面における、コンクリート部分の実際の応力分布は、図-9(a)のようになっているものと考えることができる<sup>6)</sup>。この応力状態はまた、図(b)の亀裂位置A-A断面のコンクリートの圧縮応

力分布を、外荷重とみなしたときの無筋はりの応力分担と、(c)の引張り鉄筋からコンクリートへの付着による応力伝達の問題とに、分離して取り扱うことができる。

ここで留意すべきは、図(b)のはり丈方向の応力分布形状である。この応力分布をそのままひずみ分布として読み換えると、亀裂近傍の圧縮側と引張り側では、ひずみの分布の形状が大きく異なっており、はり断面に唯一つの曲率を設定する平面保持の仮定とは大きな隔たりがあることを示している。これが、本解析法のように、はりのコンクリート断面に平面保持を仮定した場合に生ずる、大きな矛盾点である。また、この事実、「亀裂に隣接する引張り側のコンクリートの剛性分担を軽減させる必要がある」こと、換言すれば「亀裂近傍の要素では、平面保持の仮定を担うはり断面の曲率を、圧縮側と引張り側とに分けて設定することが必要となる」ことを示唆している。逆説的にいえば「この矛盾点を克服するための何らかの処置をとらなければ、亀裂近傍のはりの引張り側の剛性を過大評価する」危険があることを意味している。また実際、この点に対する特別な処置を講じていない既往の報告では<sup>13),15)</sup>、コンクリートの亀裂発生領域が広範囲にわたっており、付着すべりを考慮した本来の意義が失われている。

② 上記矛盾点を克服するための既往の手法：図-10(a),(b)には、上記の矛盾点に抵触しない既往の単純化モデルを掲げた<sup>20),21)</sup>。この種の手法は、亀裂が十分に発達したいわゆる“亀裂安定状態”におけるはりの挙動の解析に対してのみ使用可能な単純化手法である。より実際の有用な方法が、先に言及した佐藤・青柳によって示されている<sup>6)</sup>。彼らは、部材が一定モーメント下にある場合を対象とし、亀裂の生じたRCはりを支配する基礎微分方程式を導き、これを Runge-Kutta 法を用いて解析する方法について報告している。この手法では、亀裂発生後のコンクリートの引張り応力分担は、付着による鉄筋からの応力伝達にのみ依存するものとみなして評価しているため、前述のような矛盾は生じない。しかしこの方法では、図-9の(b)でみたような、「亀裂位置近くのコンクリートのひずみ分布の乱れは、鉄筋からの応力伝達がなくても、実際にはかなり狭い範囲で局部的に分散・吸収され、平面保持が回復する」という事実が見逃されており、結果として「コンクリートの引

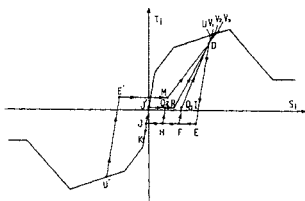


図-7 仮定付着応力-すべり関係

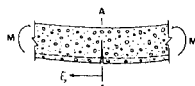


図-8 亀裂近傍のはりの断面記号

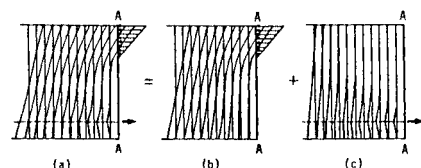


図-9 亀裂近傍のはりの応力状態の概念図

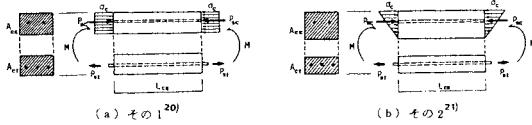


図-10 亀裂安定状態を対象とした既往の単純化モデル

張り応力分担を過小に見積る可能性がある」ことを、指摘することができる。

③ 本報告で用いた一簡略化手法： 前項①, ②で概観したように、平面保持の仮定に立脚する限り、何らかの近似的な方法を導入せざるを得ないことは明らかである。本報告では、前記の矛盾に対処するために、1) 亀裂近傍の引張り側コンクリート部分の、ある領域内の曲率を、圧縮側のそれより低減して表示するものとし、2) その領域と、亀裂部位からの距離に応じて異なる曲率低減の程度は、亀裂位置の圧縮分担応力を外荷重とみなした、無筋はりの断面応力状態を参考にして評価する、という簡略化手法を採用することとした。

図-11 は、上記の目的を達成するために図-9 (b)を参照して、「引張り側コンクリートの曲率減領域が、亀裂深さ  $e_{cr}$  の違いによってどのように変化するか」を二次元有限要素法を用いて調べたものである。すなわち、この図は、十分に長い無筋はりの亀裂位置を想定したはり先端部 A-A 断面に、コンクリートの圧縮分担応力に相当する三角形の外荷重 (0 点回りのモーメント  $M_0$  が一定になるように) を作用させたときの、3 種の亀裂深さ・はり文比 ( $e_{cr}/t=0.8, 0.7, 0.6$ ) に対する A-A 断面近傍の応力状態の線形解析結果を掲げたものである。同図中にはまた、これらをひずみ分布として読み換え、さらにこのひずみを、圧縮側と引張り側とに分離し

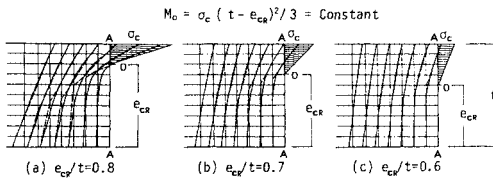


図-11 Crack Depth の違いが亀裂近傍のコンクリートの応力分担に及ぼす影響 (二次元有限要素解)

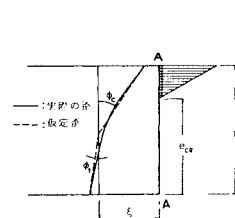


図-12 亀裂近傍のひずみ分布の近似化

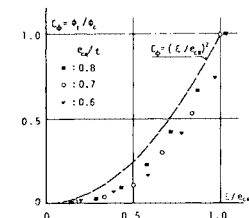


図-13 曲率比  $\phi_t/\phi_c$  と距離比  $\xi/e_{cr}$  の関係

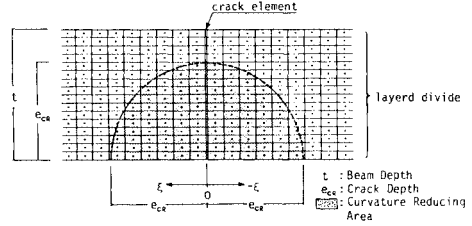


図-14 亀裂近傍引張り側コンクリートの剛性低減領域

て直線でシミュレートした (厳密には容認し難いが、大局的には問題の本質を損なうものでないことは明らかである) 場合の近似値をも破線で併記した。また図-13 は、図-11 の各シミュレート値を、図-12 に示すような曲率  $\phi_c, \phi_t$  で表わし、これをさらに平面保持の回復の程度を表わす曲率比  $C_\phi = \phi_t/\phi_c$  と、距離比  $\xi/e_{cr}$  の関係に整理し直して表示したものである。この図は「平面保持の乱れは、亀裂位置から離れるに従って急速に回復し、亀裂深さ  $e_{cr}$  に相当する位置 ( $\xi/e_{cr}=1$ ) では、ほとんど  $\phi_t/\phi_c=1.0$  とみなし得ること」を示している。本報告では、この関係を図中に破線で記入したシミュレート曲線で表示し、これを用いて亀裂に隣接する要素の引張り側コンクリートの剛性を評価することとした。すなわち、亀裂から  $\xi$  なる距離にある要素の、引張り側の各コンクリート層  $i$  の剛性係数  $E_{ci}$  を、下式で与える。

$$E_{ci} = E_{co} \cdot C_\phi = E_{co} (\xi/e_{cr})^2 \dots \dots \dots (33)$$

図-14 にはまた、先の結果に基づいて設定し、本解析で用いた剛性低下領域を掲げた。

以上に述べた本簡略化手法には、容易に指摘し得るように、平面保持の回復に寄与する付着による鉄筋の効果が無視されており、一見容認し難い仮定のようにみえる。しかしながらこの方法は、引張り側コンクリートの応力分担を、鉄筋からの付着による応力伝達にのみ求める前述の佐藤らの仮定と対照をなすものであり、簡略化の程度という意味では、両者は同列に位置するとみなし得るものである。また明らかに、著者の仮定は低配筋のはりに有利であり、佐藤らのそれは高配筋のはりの解析に適する仮定である、ということもできよう。

### 5. 数値計算例と考察

#### (1) 線形計算例

補強筋の付着すべりが、線形領域における RC はり部材の曲げ変形性状にどのような影響を及ぼすかを調べるため、前3章で展開した高・低2種の要素を用い、図-15 に示すような、等分布荷重下にある単配筋の単純支持はりを設定して計算を行ってみる。ただし、鉄筋は材端で完全に定着されているものとし、荷重強度や材料性状を一定に保ち、鉄筋の付着係数  $K_b$  (単位:  $\text{kg}/\text{cm}^2$ )

の値のみを7段階 ( $K_b=1.0, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ ) に変化させ、その効果について検討することにする。

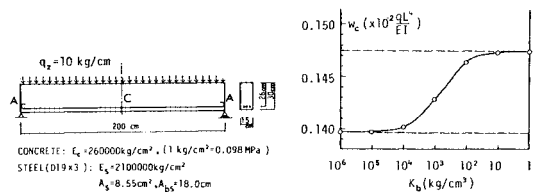
高次関数要素 H-ELM による解析結果を、図一16～22 に掲げる。なお、図中の解のプロット位置をみると明らかのように、この計算例では、支持端近傍で急変する付着応力分布の詳細を知るため、はりの半部材長を、支持端に近づくにつれて要素長が短くなる計 20 個の不等間隔要素に分割して解析を行った。

図一16 は、はり中央点の鉛直変位  $W_c$  が付着係数  $K_b$  の値とともに変化する様相を図示したものである。この図は明らかに、 $K_b$  の値が 10 以下と  $10^4$  以上の領域では、ほぼ両極の極限状態に近いことを示している。ここにおける両極とは、アンボンド状態に対応する  $K_b=0$  の「付着すべり自由」と、完全付着に対応する  $K_b=\infty$  の「付着固定」の 2 つの極限状態を意味している。既往の実験結果を通観すると、通常の異形鉄筋では、 $K_b$  が  $10^4$  以

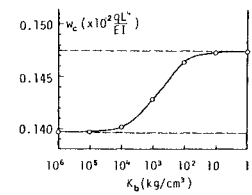
上の値となることは確かなようであるから、この結果は、従来暗黙裡に使用されてきた弾性域にある RC はりに対する「完全付着の仮定」に、理論的な根拠を与えるものである。図一17 の (a)～(c) には、ここで設定した付着係数のうちの、両極の値を例にとり、材軸に沿う鉛直変位曲線、曲げモーメント、およびせん断力の分布曲線を、それぞれ無次元化して例示した。これらの図から、付着係数  $K_b$  の値は、はりのモーメントとせん断力分布には何らの影響も及ぼさないことを知り得る。また、図一17 の (d), (e) には、材軸に沿う鉄筋応力分布曲線と付着応力分布曲線が  $K_b$  の変化とともに、いかように推移するかを調べるため、7段階すべての  $K_b$  の値に対する解析結果を一覧して掲げた。両図は、先の図一16 での考察の妥当性を裏付けている。なお、図 (e) に示した付着応力  $\tau$  は、式 (15) により鉄筋のすべり変位  $S$  から求めたものであるが、この高次要素 H-ELM では、式 (24) を用いて鉄筋応力  $\sigma_s$  からも得ることが可能である。また、この両者の差は、前掲の基礎微分方程式の厳密解が得られていない現在、近似解である本 FEM 解の精度を類推する際の、一つの目安ともなり得るものと考えられるので、同図 (f) には参考のため、 $K_b=10^6$  の場合を例にとり、この 2 種の付着応力値を対比して示した。両者の値は、良好な近似度をみせており、本解析値が満足し得る十分な精度を有していることを示唆している。

図一18 の (a)～(d) には、 $K_b=10^6$  の場合を例にとり、低次関数要素 L-ELM による、鉛直変位、曲げモーメント、鉄筋応力、および付着応力の各分布曲線を、前掲の H-ELM の解と比較して掲げた。これらの各図の両解析値はきわめてよく一致しており、低次関数要素でも十分な精度が得られることを示している。

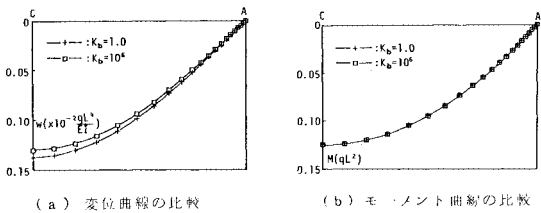
(2) 非線形計算例



図一15 モデルはりの概要

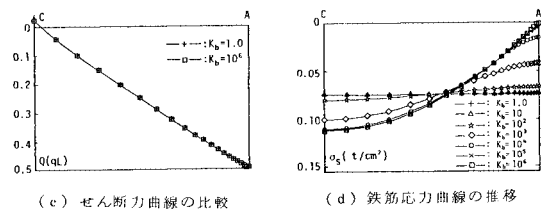


図一16 はり中央点の鉛直変位  $W_c$  に及ぼす付着係数の影響



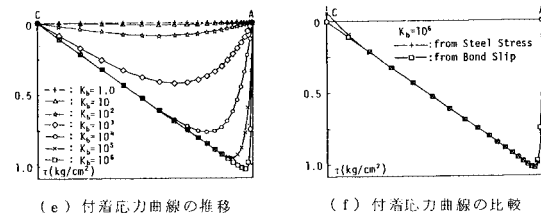
(a) 変位曲線の比較

(b) モーメント曲線の比較



(c) せん断力曲線の比較

(d) 鉄筋応力曲線の推移

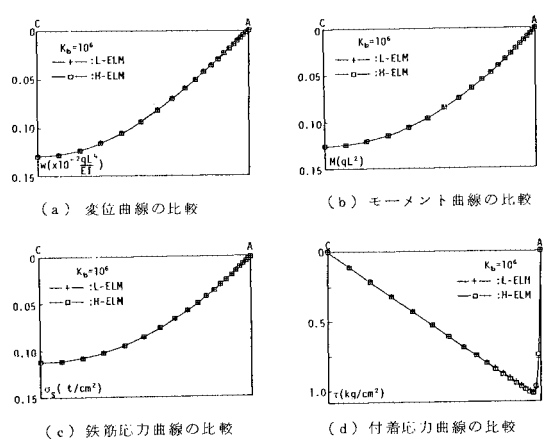


(e) 付着応力曲線の推移

(f) 付着応力曲線の比較

図一17 H-ELM による解析結果

—CA 線 (図一15 参照) に沿う各応力分布曲線—



図一18 L-ELM 解と H-ELM 解の比較

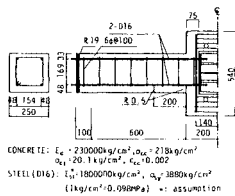
—CA 線 (図一15 参照) に沿う各応力分布曲線—



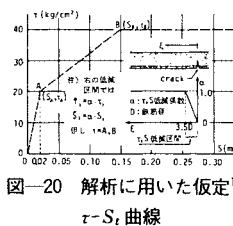
前4章で展開した本非線形解析法の妥当性を検討するため、既往の実験結果との比較を行い、若干の考察を試みる。

図一19に、ここで解析の対象とした林らの片持ちはりの概要と材料性状を示す<sup>18)</sup>。自由端近くに集中荷重を受けるこのはりの鉄筋は、上下ともはり先端と拘束端(図の中央の厚肉部)から7.5 cmの位置で完全に定着されており、また、はり下側のコンクリート部分には、拘束端とそれから20 cm離れた位置に、それぞれ Precrack を想定した絶縁用の鋼板(厚さ0.5 mm)が、下端筋下面まで挿入されている。図一20には、計算に用いた仮定  $\tau$ -S 関係を掲げたが、この仮定値は、亀裂近傍の付着劣化をも考慮して、林ら自身が実験結果に基づいて設定した  $\tau$ -S 関係そのままであり、比較のため後に掲げる林ら自身の解との整合性をとるため、前章(2)のc)で述べた本報の付着応力減領域を、あえて設定しなかったものである。またここでは、2か所の Precrack 位置に亀裂要素(要素長=0.1 mm)を挿入した図一21に示すような分割形状を用い、このはりを「拘束部では、コンクリート断面が無限大であり、鉄筋の抜け出しのみが生ずる」ものとして計算を行った。なお、この実験結果は、本解析法を用いて計算する際に必要となる諸材料定数が明記されたものとしては、著者が見出し得た唯一の例である。

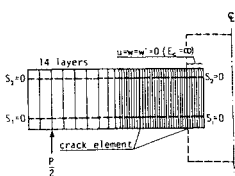
図一22は、林らの実験と解析値、および著者の計算値を、荷重点の荷重-変位曲線で比較したもので、図一23は、荷重  $P=7t$  の時点为例にとり、このはりの材軸に沿う下端筋の鉄筋応力と付着応力の分布曲線に対する先の三者の値を、それぞれ対比して図示したものである。これらの図によれば、著者の解は、同図中に併記した林らの解と比べると、その精度は幾分劣っているものの、



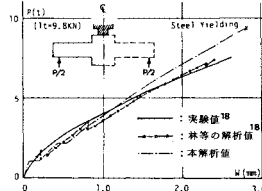
図一19 林らの片持ちはりの概要<sup>18)</sup>



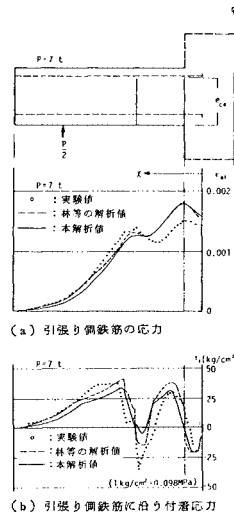
図一20 解析に用いた仮定  $\tau$ -S<sub>1</sub> 曲線<sup>18)</sup>



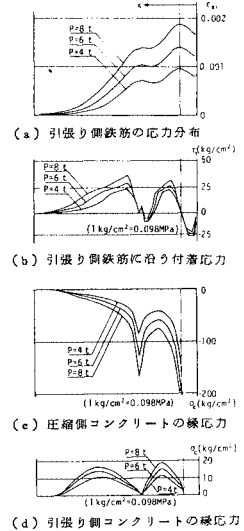
図一21 要素分割と拘束条件



図一22 荷重点の荷重-変位曲線



図一23  $P=7t$  の時点の鉄筋応力と付着応力分布



図一24 各応力分布曲線の推移

実験曲線の全体的な傾向をかなりよく表現している。この結果は、「林らの解が、実験時の亀裂パターンを模した要素分割を用い、現時点ではこの種の問題を最も実際に近い状態で追跡することが可能とされている、ボンドリンクとクラックリンクを導入した二次元有限要素解析によって得られた解析結果である<sup>18)</sup>」ことを考えると、満足し得るものであり、本非線形解析手法の妥当性を窺い知ることができる。図一24には参考のため、3段階の荷重を対象として、本解析法による下端筋の鉄筋応力と付着応力、および、はり上・下面のコンクリートの縁応力分布曲線の推移状況を例示して掲げた。図中のコンクリートの計算縁応力分布が、実際の曲線にどの程度近似するかは不明であるが、少なくとも、その形状が“それらしい形”をしていることだけは確かなようである。

## 6. 結 言

本報告では、コンクリート断面に平面保持を仮定し、補強筋に付着すべりを考慮した場合のRCはりの、線形ならびに非線形領域における曲げについて論じた。

まず、既往のRCはりの微小変形曲げ理論に、補強筋のすべりの効果を取り込んだ場合の線形領域における基礎微分方程式を導いた。次にこの理論に基づき、高・低2種の形状関数を用いた有限要素により定式化し、線形領域における等分布荷重下の単配筋の単純支持RCはりの解析を行い、付着係数  $K_b$  の大きさがはりの曲げに及ぼす影響について調べ、1) 付着係数  $K_b$  の値は、はりのモーメントとせん断力にはほとんど影響を与えないが、鉛直変位  $w$  と、鉄筋応力および付着応力の各分

布形状に大きな影響を及ぼし、 $K_b$ が $10\text{ kg/cm}^3$ より小さくなると実質的には付着なしのアンボンド状態に対応し、また $10^4\text{ kg/cm}^3$ 以上では、ほぼ付着すべり固定とみなすことができ、したがって、2) はりの補強筋に $10^4\text{ kg/cm}^3$ より大きな付着係数をもつ通常の異形鉄筋を用いる限り、従来の完全付着の仮定は十分妥当なものであること、等の結果を得た。また、亀裂発生後のはりの変形挙動を、より実際に近い形で追跡することを意図して、亀裂近傍の引張り側コンクリートの剛性を低減するための一簡略化手法を導入した非線形解析法を展開し、林らの片持ちはりの実験、ならびに解析結果との比較を行って、本解析法の有用性を明らかにした。

しかしながら、非線形領域における上記の結果は、本解析手法の有用性を支持する一つの例を提示したに過ぎぬものであり、また、この唯一の例が、他のあらゆる支持条件や、荷重ならびに断面性状のRCはり部材に対する、本非線形解析法の有用性を保証するものでないこともまた、当然予期し得るところである。形態の異なる他の多くのRCはり部材の実験との比較・検討は必要不可欠の事柄であり、またそれによってのみ、さらなる手法の改良・発展が可能になるものと考えている。

**謝 辞**：貴重な実験結果と解析値を転載させた頂いた福井大学工学部助教授 林静雄博士と、東京工業大学工学部教授 黒正清治博士に、心からの謝意を表します。

**補 遺**：本稿の非線形解析例では、亀裂要素の配置位置を2か所（実験結果を参照して）に限定して計算を行ったが、実際問題としては、どこに亀裂が発生するか予測できない場合がほとんどである。したがって、このような場合をどのように取り扱うかは、本非線形解析法のみならず、既往のボンド・リンクを用いた二次元有限要素解析手法を含めて「RCはり部材の亀裂現象を実際に近い形で追跡することを意図した理論手法」に課せられた共通の重要な課題であるが、最近注目を集めつつある“確率有限要素法”的な考え方が、その有効な手段となることが期待される。

#### 参 考 文 献

- 1) 次の文献に、この種の手法の詳しいreviewがある。  
角田・佐伯・堺：RC引張部における付着の共同作用に関するモデル化の研究，土木学会北海道支部論文報告集，第36号，1980.2.
- 2) 次の文献に、この種の手法の詳しいreviewがある。  
Wegner, R. : Finite element methods for reinforced concrete, Proc. US-German Symposium on finite element methods, MIT, Boston, 1976.
- 3) Ngo, D. and Scordelis, A.C. : Finite element analysis of reinforced concrete beams, J. of ACI, V. 64, 1967. 3.
- 4) Nilson, A. H. : Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method, J. of ACI, V. 65, 1968. 3.
- 5) 黒正・滝口：有限要素法による鉄筋コンクリート部材の二次元非線形解析，建築学会論文報告集，第189号，1971.11.
- 6) 六車・森田・富田・曲げひびわれを生じた鉄筋コンクリートはり材の応力状態と変形に関する研究，建築学会論文報告集，第200号，1972.10.
- 7) 林・黒正・小山内：変動軸力を受ける鉄筋コンクリート柱の曲げ変形性状に関する実験的研究，その2，建築学会論文報告集，第312号，1982.2.
- 8) 野口：有限要素法による鉄筋コンクリートの非線形解析，第4報，建築学会論文報告集，第262号，1978.12.
- 9) Aldstedt, A. and Bergan, P. : Nonlinear time-dependent concrete-frame analysis, Proc. of ASCE, V. 104, No. ST 7, 1978. 7.
- 10) 鬼沢・林・黒正：付着剛性を考慮した鉄筋コンクリート部材の変形解析，建築学会大会学術講演会梗概集，1979. 9.
- 11) 多田・武田：鉄筋コンクリート部材における付着劣化過程の解析的研究，大林組技術研究所報，No. 22, 1981.
- 12) 松浦・山本：鉄筋コンクリート梁・柱部材の非線形及び時間依存性挙動，建築学会論文報告集，第322号，1982.12.
- 13) 黒正・和田・坂田：鉄筋コンクリート部材の付着を考慮した曲げ弾塑性解析，建築学会大会学術講演会梗概集，1983.10.
- 14) 市之瀬：付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート骨組の非線形解析法，建築学会論文報告集，第328号，1983.6.
- 15) 小坂・谷川・山田：エンドクロニック理論による鉄筋コンクリートの非線形解析，第1報，第2報，建築学会論文報告集，第326, 330号，1983.4, 8.
- 16) Sato, R. and Aoyagi, Y. : Studies on deformation and crack of reinforced concrete flexural members under low temperature, Proc. of JSCE, No. 329, 1983.2.
- 17) Sato, R., Aoyagi, Y. and Kanazu, T. : Experimental and theoretical studies on the behaviours of flexurally restrained reinforced concrete members subjected to temperature gradient, Proc. of JSCE, No. 348, 1984.8.
- 18) 林・吉田・黒正：ひびわれ近傍における異形鉄筋とコンクリートの付着性状に関する実験研究，建築学会論文報告集，第348号，1985.2.
- 19) 上田・土橋：軸力を受ける鉄筋コンクリート棒部材の材料非線形付着すべり解析，土木学会論文集，第360号，V-3, 1985.8.
- 20) 原ほか：RC部材の長期たわみに関する解析的研究，竹中技術研究報告，第15号，1976.3.
- 21) Tassios, T.P. and Yannopoulos, P.J. : Analytical studies on reinforced concrete members under cyclic loading based on bond stress-slip relationship, J. of ACI, V. 78, 1981.6.
- 22) 上田・土橋：補強筋の滑りを考慮したRC梁部材の曲げについて，土木学会北海道支部論文報告集，第41号，1985.2.

(1985.7.12・受付)