

## 2つの斜面安定計算法の提案

## TWO NEW SLICE METHODS FOR SLOPE STABILITY ANALYSIS

望月秋利\*・三笠正人\*\*・勝田守文\*\*\*

By Akitoshi MOCHIZUKI, Masato MIKASA and Morifumi KATSUDA

This paper presents newly developed two slice methods for slope stability analysis ; Advanced Limit Equilibrium method and Janbu- $h/3$  method. They can be applied for both circular and non-circular slip surfaces. The Advanced Limit Equilibrium method gives a reasonable safety factor and a plausible distribution of interslice forces more easily than the Morgenstern & Price method. The Janbu- $h/3$  method gives a safety factor accurate enough for practical purposes, though it does not always give proper interslice forces.

## 1. ま え が き

斜面の安定解析は実務において頻繁に遭遇する問題であり、その研究は土質力学の主要な課題の1つとして古くから取り組まれてきた。

斜面安定計算法のうち現在最も広く用いられているスライス分割法の範囲でいえば、1930年代ペターソン (K. E. Petterson), フェレニウス (W. Fellenius), ハルティン (S. Hultin) によって示されたいわゆるスウェーデン法を嚆矢とすることができよう<sup>1), 2)</sup>。その後の安定計算法の発展はせん断強度の考え方と両輪を形成しながら進み、その成果は各種解析法の提案や斜面破壊の事例研究として数多く報告されている。この論文では対象を安定計算法に絞ることとする。

さてスライス分割法の発展のうえでの里程標として、スウェーデン法に続くものとして、スライス間力の考え方を導入したテラー (W. Taylor) の修正スウェーデン法<sup>3)</sup>、ビショップ (A. W. Bishop) の解析法<sup>4)</sup>、さら

に非円弧すべり面の安定解析を可能にしたヤンプ (N. Janbu) 法<sup>5)</sup>を挙げることができよう。モルゲンステルンら (N. R. Morgenstern & V. E. Price) の方法<sup>6)</sup>は現在最も一般化された解法と評価を受けているが、用いるつり合い式の観点からみれば基本的にはヤンプ法と同じである。この点については本文に詳しく示すが、いずれの計算方法も不静定問題を何らかの仮定を導入することによって解くことに変わりなく、したがってその仮定が解の特性を支配する。

本論文で提案する“改良限界つり合い法”および“ヤンプ・ $h/3$ 法”と名付けた、非円弧すべり面にも適用できる2つの新しい計算方法も当然この制約からまぬがれることはできない。しかし、前者の改良限界つり合い法はモルゲンステルン・プライス法 (以下M&P法と略す) の“合理的”とされる解とはほぼ同じ安全率を与え、しかもスライス間力および余剰滑動力 (定義は2. に示す)、スライス間力の作用位置 (スラスト線) について、より適切に評価できるという特徴をもっている。また、ヤンプ・ $h/3$ 法は前者に比べてわずかに安全率が大きくなり、またスライスに働く力の評価精度は劣るが、計算ははるかに容易なので、非円弧すべり面に対するかなり精度のよい実用計算法となり得ると考えられる。

\* 正会員 工修 大阪市立大学講師 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本 3-3-138)

\*\* 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科 (同上)

\*\*\* 正会員 工修 基礎地盤コンサルタンツ (株) (元・同上大学院院生) (〒550 大阪市西区鞠本町 1-15-2)

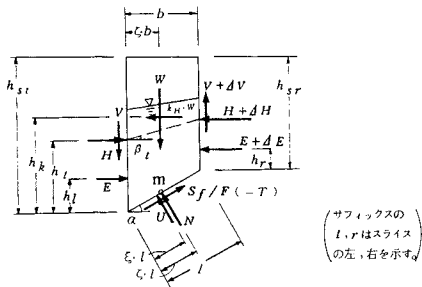
## 2. ヤンプ・h/3法と改良限界つり合い法

説明の便宜上、ヤンプ・h/3法の誘導から始める（hはスライス高さを意味する）。本法も従来のスライス法と同様に、二次元平面ひずみ問題として扱うので、考える力はすべて単位奥行当たりのものである。

### (1) ヤンプ・h/3法の誘導

図-1は斜面のすべり土塊から取り出した1つのスライスに働く力を示したものである。浸透流の影響はスライス側面、底面に働く水圧として考える。そして各スライスのすべり面に働く垂直力Nはそれぞれのスライスの重心を通る鉛直な線とすべり面の交点mに、また間隙水圧の合力UとE\*<sup>1</sup>はそれぞれの応力分布の重心位置に作用するものとする。地震力については震度法に基づき、水平震度k<sub>H</sub>を考慮する。

ヤンプはスライスの水平方向と鉛直方向の力のつり合いのほかに、m点に関するモーメントのつり合いを考えて安全率を導いた<sup>5)</sup>。これをヤンプ自身は一般スライス法(The Generalized Procedure of Slices)とよんだが、本論文では慣例にならってヤンプ法(あるいはヤンプの厳密法)とよぶことにする。スウェーデン法やビショップ法のようにすべり円弧中心に関するモーメント式を用いていないため、ヤンプ法は非円弧形状のすべり面にも適用できる。



- |   |                            |
|---|----------------------------|
| F : 安全率                                 | W : スライス全重量                |
| b : スライス幅                               | N : すべり面に働く垂直力             |
| l : すべり面長さ                              | V, ΔV, H, ΔH : スライス間力      |
| h <sub>s</sub> : スライス高さ                 | S <sub>f</sub> : せん断強さ(合力) |
| h : Eの作用高さ                              | T : 動員されるせん断力              |
| h <sub>i</sub> : Hの作用高さ                 | U : スライス底面に働く間隙水圧(合力)      |
| h <sub>k</sub> : k <sub>H</sub> ・Wの作用高さ | E : スライス側面に働く間隙水圧(合力)      |
| β <sub>1</sub> : スラスト線の傾き               | ε・l : Uの作用点までの距離           |
| k <sub>H</sub> : 水平震度                   | ε・l : スライス重心線までの距離         |

図-1 スライスに働く力

\*1 圧密非排水せん断条件(急激な破壊)での安定解析を行う場合、一般全応力法の立場で定義された強度定数 c<sub>cu</sub>, φ<sub>cu</sub>を用いるなら、せん断によって発生する間隙水圧は考慮する必要はない(強度定数にすでに考慮されている)。したがって、U, Eの値はせん断前の中立間隙水圧をとればよい。一方有効応力法によって安定解析を行う場合は、せん断によって発生する間隙水圧を含んだU, Eを用い、強度定数としてはc', φを用いる。圧密排水条件で安定解析を行う場合は、せん断中に間隙水圧は発生しないので、このような両者の区別はない<sup>7)</sup>。

さて、ヤンプ法はスウェーデン法やビショップ法では用いなかった各スライスに関するモーメント式n個(nはスライス分割数)を加えたのでそれだけ条件式は増えるが、また新たにスライス間力の作用位置h<sub>i</sub>が未知数としてn-1個増え、結局不静定問題であることに変わりない。そこでヤンプはh<sub>i</sub>に関して、φ材料(c=0)の場合スライス高さの約1/3点あるいはその近傍に、またc>0材料の場合、斜面の圧縮域ではそれよりいくらか高く、引張域ではそれよりいくらか低く、その間は両高さを滑らかに結ぶ線上の位置を仮定することをすすめる、計算例を示した<sup>8)</sup>。この仮定の仕方には任意性があるため、結局解と併せて検討し、適切な仮定および適切な解であることを判断し、用いることになる。すなわち、この手法は常に解析者のengineering judgementを入れる必要があり、1つのすべり面に対して、唯一の解を与えるものではない。

これに対し、ここで提案するヤンプ・h/3法は、c>0材料に対しても「h<sub>i</sub>をスライス高さの1/3に仮定する」方法である\*2。一般に解の取束は容易で、解は当然唯一的に定まる。以下、図-1を参照してこれを誘導する。なおこれは、基本的にはヤンプの導いたものと同じ式になるが、スライス幅が有限であることを考慮してスライス重量の作用位置を正しくスライスの重心位置にとったこと(これによって分割数が少なくても計算精度があまり下がらないことを確認している)、また浸透力、地震力を考慮した点が異なっている。

まず、安全率の定義を

$$F = S_f / T \dots\dots\dots (1)$$

とする。ここにFは安全率、S<sub>f</sub>はすべり面上で動員可能なせん断抵抗力の合力、Tは実際に動員されるせん断力(滑動力と同じ大きさで、方向は逆)である。すべり面方向の力のつり合いは、図-1を参照して次のように表わされる。

$$S_f / F = (W - \Delta V) \sin \alpha + (\Delta H + \Delta E + k_H \cdot W) \cos \alpha \dots\dots\dots (2)$$

すべり面に垂直な方向の力のつり合いから、次式が得られる。

$$N = (W - \Delta V) \cos \alpha - (\Delta H + \Delta E + k_H \cdot W) \sin \alpha - U$$

\*2 ヤンプは安全率の略算方法として、斜面形状と材料によって決まる係数を用いる方法を提案した。この方法をJanbu's simplified method(ヤンプの簡易法)とよぶこともあるが、ヤンプ自身が示したようにsimplified routine procedure(略算法)とよぶべきもので、本質的に厳密法とは性質を異にするものである。著者らは、まず解を得るための条件の検討を行い(3.(1)),ここに示した仮定を用いてよい結果を得ることを確認した。この方法はちょうどヤンプの厳密法を簡易化(特殊化)して解く方法すなわち、本来は簡易ヤンプ法とよばれるべき方法である。しかし、本論文では名称の混乱を避けるため、この方法をヤンプ・h/3法(Janbu-h/3 method)とよぶことにした。

$$\dots\dots\dots(3)$$

また、クーロン則を、

$$S_f = (c + \sigma_n \tan \phi) l = c \cdot l + N \tan \phi \dots\dots\dots(4)$$

と表わしたとき、式中  $\sigma_n$  は全応力からせん断強度に影響しない静水圧や浸透流などによる中立間隙水圧を差引いた「有効な全応力」<sup>7)</sup> である (ただし一般全応力解析法の場合; \*1 参照). 式 (2), (3) および (4) を用い、 $N$ ,  $S_f$  は次のように表わされる.

$$N = \frac{W - \Delta V - c \cdot l \sin \alpha / F - U \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \tan \phi / F} \dots\dots\dots(5)$$

$$S_f = \frac{c \cdot b + (W - \Delta V - U \cos \alpha) \tan \phi}{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \tan \phi / F} \dots\dots\dots(6)$$

また、式 (2), (6) から、水平方向のスライス間力差  $\Delta H$  は、次のように表わされる.

$$\Delta H = \frac{c \cdot b + (W - \Delta V - U \cos \alpha) \tan \phi}{F(\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \tan \phi / F)} \left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots(7) \\ -\Delta E - k_n \cdot W - (W - \Delta V) \tan \alpha \end{array} \right\}$$

さて、水平方向のスライス間力については当然、

$$\sum \Delta H = 0 \dots\dots\dots(8)$$

が成立する. 式 (7) を (8) に代入して次式を得る.

$$\sum \left\{ \frac{c \cdot b + (W - \Delta V - U \cos \alpha) \tan \phi}{F(\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \tan \phi / F)} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

$$= \sum [\Delta E + k_n \cdot W + (W - \Delta V) \tan \alpha]$$

安全率  $F$  はどのスライスに関しても等しいと仮定すると<sup>\*3</sup>, 式 (9) から次の式を得る.

$$F = \frac{\sum \left\{ \frac{c \cdot b + (W - \Delta V - U \cos \alpha) \tan \phi}{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \tan \phi / F} \right\}}{\sum [\Delta E + k_n \cdot W + (W - \Delta V) \tan \alpha]} \dots\dots\dots(10)$$

また  $N$  の作用点  $m$  に関するモーメントのつり合いを考えると、 $V$  は次のように表わされる.

$$V = -H \tan \beta_i - \frac{\Delta H}{b} h_i + E \left( \frac{h_i - h_r}{b} - \tan \alpha \right) \left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots(11) \\ -\Delta E \left[ \frac{h_r}{b} + (1 - \zeta) \tan \alpha \right] + U(\zeta - \xi) \frac{1}{\cos \alpha} \\ -k_n \cdot W \left( \frac{h_k}{b} - \zeta \cdot \tan \alpha \right) \\ -\Delta V(1 - \zeta) + \Delta H(\zeta \cdot \tan \alpha - \tan \beta_i) \end{array} \right\}$$

ヤンプはアンダラインを付した右辺第7, 8項を微小として無視した. 本法においても同様に無視し<sup>\*4</sup>, 「 $h_i$  はスライス高さの1/3とする」という仮定を全スライス面に対して適用する. すなわち式 (11) に

$$h_i = h_{st} / 3 \dots\dots\dots(12)$$

\*3 この内容はすべり面上でせん断強さが同時に fullmobilize する, いわゆる全般せん断破壊が生ずるものと仮定する (すなわち進行性破壊を考慮しない) ことと同義で, 現在の安定計算法全般に用いられる仮定である.

\*4 式 (11) の第7, 8項を無視せずに計算したところ, これら無視したケースに比べて安全率は0.002~0.01大きくなり, 収束のための繰返し回数は増えた. ヤンプ・ $h/3$  法では, 実用的計算法という観点から第7, 8項を無視することにした.

を代入し, 右辺第7, 8項を省略すると,

$$\left. \begin{array}{l} V = -H \cdot \tan \beta_i - \frac{\Delta H}{b} \cdot \frac{h_{st}}{3} + E \left( \frac{h_i - h_r}{b} - \tan \alpha \right) \\ -\Delta E \left[ \frac{h_r}{b} + (1 - \zeta) \tan \alpha \right] + U(\zeta - \xi) \frac{1}{\cos \alpha} \\ -k_n \cdot W \left( \frac{h_k}{b} - \zeta \cdot \tan \alpha \right) \end{array} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

となる.

すべり土塊の両端においてはスライス面の高さがゼロであるから、

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = 0, V_{n+1} = 0 \\ H_1 = 0, H_{n+1} = 0 \\ h_{t1} = 0, h_{t_{n+1}} = 0 \\ E_1 = 0, E_{n+1} = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

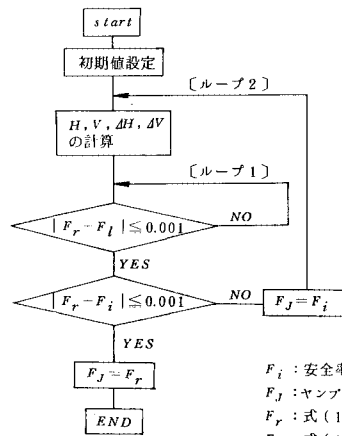
が成立する (ここでサフィックスはスライス面ナンバーである).

式 (14) の境界条件のもとで, 式 (10) 右辺および左辺の  $F$  が一致し, かつ式 (13) を満足した場合の諸量が求める解となる.

図-2 に計算の手順を示す. 一般に解の収束は早い. 次節に示す計算例では, 収束するまでの「ループ2」(図-2) の繰返しは通常10回未満で, 多くても30回程度であった.

(2) 改良限界つり合い法の誘導

改良限界つり合い法の誘導はヤンプ・ $h/3$  法と同じく, すべり土塊内の任意スライスに働く力 (図-1) のすべり面方向とそれと垂直な方向のつり合い, および  $N$  の作用点  $m$  に関するモーメントのつり合いを基礎式とする安定計算法で, 非円弧すべり面にも適用できる. すなわち前節の式 (1)~(11) および (14) はそのまま用いられ, 安全率は, 式 (10) から求められる.



$F_i$  : 安全率初期値  
 $F_j$  : ヤンプ・ $h/3$  法の安全率  
 $F_r$  : 式 (10) 右辺の安全率  
 $F_l$  : 式 (10) 左辺の安全率

図-2 ヤンプ・ $h/3$  法計算手順

さて、本計算法もヤンプ・ $h/3$ 法と同様、力学的高次不静定問題であるから、何らかの仮定の導入が必要である。本法では、“余剰滑動力の方向が、スラスト線の方向に一致する”と仮定する。ここに余剰滑動力（左向きに正） $F_r$ は、そのスライスの両側面に働くスライス間力を  $L$ ,  $R$  とベクトル表示するとき、

$$L + R + F_r = 0 \dots\dots\dots(15)$$

で定義される。これから、

$$F_r = -(L + R) = -(\Delta V + \Delta H) \dots\dots\dots(16)$$

と表わせる。ベクトル  $F_r$  はスライス間力ベクトルの和と同じ大きさで、逆向きである（図-3 参照）。

すなわち、図-3（1）はスライス自らの重量（および地震力）に起因する滑動力が大きくて、それを自らのすべり面に働くせん断抵抗力によって支えることができないので、その差、すなわち余剰滑動力  $F_r$  を左隣のスライスに伝えて（厳密には右隣のスライスにもスライス間力の減少として伝わる）安定を保つ例を示したものである。したがって図（1）の  $L$  は  $R$  に比べて大きい。逆に図（2）は、自らの滑動力に対する抵抗力のほかに、右隣のスライスから伝えられる余剰滑動力に対する抵抗力、すなわち余分に分担する抵抗力をも有している例で、このときこのスライスの余剰滑動力は図（1）のベクトルとは逆向きとなる。また、当然

$$\begin{aligned} \sum V = 0, \sum H = 0 \text{ より,} \\ \sum F_r = 0 \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

となる。

さて前述の  $F_r$  の方向についての仮定は次式のように表わせる。

$$\frac{\Delta V}{\Delta H} = -\tan\beta_t \dots\dots\dots(18)$$

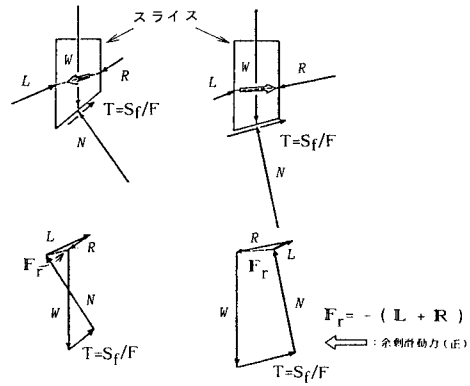
ここに、 $\beta_t$  はこのスライス中のスラスト線が水平と成す角度である。式（18）の目的は各スライスの滑動抵抗力の過不足分（ $\Delta V + \Delta H$ ）を最も自然な形で隣のスライスへ伝達させることにある\*5。

図-4 に改良限界つき合い法の計算手順を示す。ヤンプ・ $h/3$ 法による解を第1近似解として用い、式（10）の右辺、左辺の  $F$  が一致し、かつ式（11）（第7, 8項を省略）を満足させるまで繰返し計算する。

収束の判定は、

$$\left. \begin{aligned} |F_r - F_l| &\leq 0.01 \\ |F_r - F_i| &\leq 0.01 \\ |\tan\beta_t - \tan\beta_r| &\leq \Delta B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

\*5 スライス間力（ $V$ ,  $\Delta V$ ,  $H$ ,  $\Delta H$ ）の伝達について、スペンサー<sup>9)</sup>はスライス間力の合力の方向がすべてのスライスで平行とみなし、またモルゲンステルンら<sup>6)</sup>は  $V/H = \lambda \cdot f(x)$ （ $\lambda$  は定数、 $f(x)$  は適当に選んだ関数、図-9 参照）とおいた。著者らは、余剰滑動力ベクトルがスライス間で伝達される際にその位置と方向がスラスト線に一致すると仮定するのが最も自然であると考えた。



(1) 余剰滑動力(正) (2) 余剰滑動力(負)

図-3 余剰滑動力と力の多角形

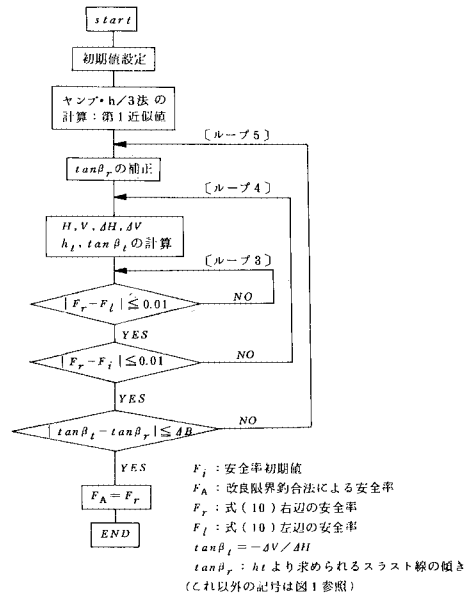


図-4 改良限界つき合い法計算手順

の3つの条件で行う。

ここに、 $F_i$ : 初期設定安全率

$F_r$ : 式（10）右辺の安全率

$F_l$ : 式（10）左辺の安全率

$$\tan\beta_t = -\Delta V / \Delta H$$

$\tan\beta_r$ :  $h_t$  より求められるスラスト線の傾き

$\Delta B$ : 収束許容誤差（次項参照）

(3) 改良限界つき合い法による解の性質

ある均質な単純斜面の1つの円弧すべり面\*6 について

\*6 改良限界つき合い法、ヤンプ・ $h/3$ 法とも非円弧すべり面に対して解析可能な計算方法であるが、簡単のためここでは円弧とした。なお、改良限界つき合い法は、ヤンプ・ $h/3$ 法と同様に臨界円を求めることができるが、本論文ではあらかじめ設定した円弧に対して安全率を求めるにとどめた。

て改良限界つり合い法で計算し、解の性質を検討した。表一に斜面の諸元および材料定数を示す。表中  $\Delta B$  は

$$\Delta B = \left| \left( -\frac{\Delta V}{\Delta H} \right) - \tan \beta_r \right| = |\tan \beta_l - \tan \beta_r| \dots\dots\dots (20)$$

なる量で、収束許容誤差とよび、この値で解の収束判定を行う。 $\Delta B$  を小さく設定すると繰返し回数(図一4, ループ5)は急速に増え、解を収束させることができないケースもある。特に右端のスライスでは他の所よりも収束させることが難しい。そこで右端のスライスを他と区別して、 $\Delta B_E$  と表わし、 $\Delta B = \Delta B_E$ 、あるいは  $\Delta B < \Delta B_E$  のいずれの条件でも計算できるようにし、その影響についても検討した。

図一5は  $\Delta B$ 、 $\Delta B_E$ とも0.01(0.6度)に設定して計算したときの、スライス間力の大きさと方向、および作用位置を示したものである。繰返し回数(図一4, ループ5)は実に1870回に達し、事実上これよりも小さい収束許容誤差で収束させることは困難である。なお、スライス⑤の左側のスライス面に引張力が働いているという結果であるが、実際にはそれを期待することはできず、引張クラックが発生するものと考えられるが<sup>9)</sup>、今回の計算では、そこまでは考慮していない。図一6に、得られた余剰滑動力の分布を示す。余剰滑動力の方向はスラスト線の方向とまったく一致している。各余剰滑動力の向きから、スライス③、④は、それぞれの底面に働くせん断抵抗力だけではスライス自重による滑動力に抗することができず、その不足分が、スライス①、②および⑤によって補われている様子が理解できる。なお、余剰滑動力の貸借は、すべり土塊全体でバランスすることはいうまでもない(式(17))。

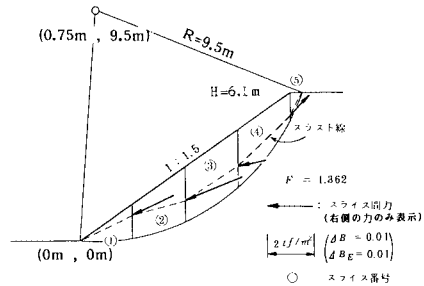
図一7は、図一5と同じ円弧に対して、収束許容誤差を変えたときの安全率と、収束までの繰返し回数(図一4, ループ5)を示したものである。図中には  $\Delta B = \Delta B_E$ 、 $\Delta B < \Delta B_E$ の両ケースについての結果を示した。いずれも収束許容誤差を小さくすれば、安全率は小さくなる。次に、収束許容誤差の最も大きい  $\Delta B = 0.3$ 、 $\Delta B_E = 0.4$ の結果と最も小さい  $\Delta B = 0.01$ 、 $\Delta B_E = 0.01$ の結果を比較する。両者による安全率には、工學上問題にならない0.012の差しかないのに対して、繰返し回数は約23倍(≒1870/80)の違いがある。ここには示していないが、スライス間力、余剰滑動力の分布にも大きな差はない。したがって、収束許容誤差は0.01よりもかなり大きくてもよいと考えられる。次に、収束許容誤差を  $\Delta B < \Delta B_E$ にとることの影響について調べる。図一7に示すように、 $\Delta B = \Delta B_E$ のケースに比べて、安全率は最大でも0.002程度の差しかない。これに対して繰返し回数では100~200回少なくなっている。

以上の結果から判断して、収束許容誤差は  $\Delta B = 0.1$  }  $\Delta B_E = 0.2$  } \dots\dots\dots (21)

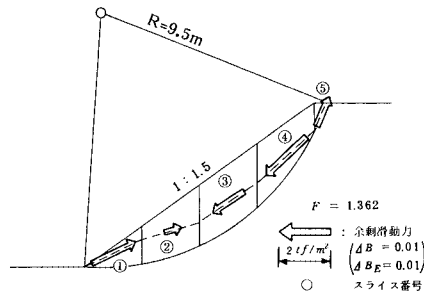
とれば十分であると結論できる。しかし、特殊な形の斜面では収束が一般に難しく、この基準をさらに緩めて用いた。また、図一7中にはヤンプ・h/3法による安全率も示したが、安全率は1.376で、 $\Delta B = 0.01$ 、 $\Delta B_E = 0.01$ の場合よりも0.014大きいだけであった。

表一 計算斜面の諸元および材料定数

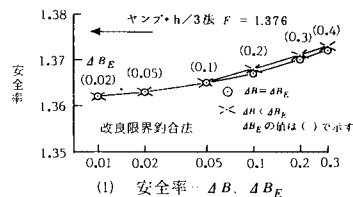
ケース	勾配	斜面高さ	すべり面形	スライス数	材料定数			$\Delta B$	$\Delta B_E$
					$\beta_l$	$c$	$d$		
1	1:1.5	6.1m	円弧 ( $R=9.53m$ )	5	$t/m^2$	$tf/m^2$	$15^\circ$	0.01	0.01
					2	1.0		0.3	0.4



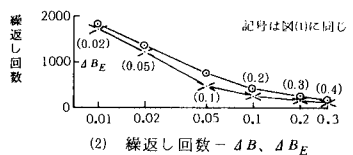
図一5 スライス間力の分布(ケース1)



図一6 余剰滑動力の分布(ケース1)



(1) 安全率- $\Delta B$ 、 $\Delta B_E$



(2) 繰返し回数- $\Delta B$ 、 $\Delta B_E$

図一7 収束許容誤差と安全率ならびに繰返し回数(改良限界つり合い法)

いずれにしても、ヤンプ・ $h/3$ 法は改良限界つり合い法による安全率のほぼ上限の値を与えるが<sup>\*7</sup>、その差はそう大きくないことから、實際上安全率に関してはヤンプ・ $h/3$ 法も改良限界つり合い法に近い精度を有する計算法とみてよいだろう。

3. 従来の安定計算法との比較

(1) 不静定次数と仮定

それぞれの斜面安定計算法で用いられている条件式やつり合い式、不足条件式数(不静定次数)および仮定について検討しておくことは、解の評価に関して重要である。

表一2は各計算法の既知量, 未知量, 条件式および不静定次数をまとめたものである<sup>\*8</sup>。不静定次数がゼロであるのは無限斜面法だけで<sup>\*9</sup>、その他の計算法では不静定次数に応じて何らかの仮定の導入が必要であることがわかる。円弧すべり面にしか適用できないスウェーデン法, 簡易ビショッフ法が, 円弧中心に関するモーメント(表中8(3))を用いているのに対して, 非円弧すべり面に適用できる4つの計算方法は各スライスに関するモーメントのつり合い式(表中6(3))を用いている。

またヤンプ法, ヤンプ・ $h/3$ 法, 改良限界つり合い法の既知量, 未知量, 条件式および不静定次数はまったく同じであるM&P法は条件式が1つ少ないほかは同じであることから, これらの解析手法は基本的に同じ立場にあることが理解できる。

表一3は各計算法で用いる仮定をまとめたものである。表一2と比べると各計算法とも当然, 不静定次数と仮定条件式数はまったく一致している。この表から各計算法の性格について次のことがわかる。1つはスウェーデン法, ビショッフ法のグループとそれ以外のグループの本質的な違いである。前者はスライス間力差の全部, または一部をゼロと仮定しており, 当然, 解の誤差も大きい。後者は主としてスライス間力の作用点および方向に関する仮定を用いており, 力に関する省略はない。したがって適切な仮定によって, 正しい解に近づくことが期待できる。

もう1つは後者のグループの仮定の性格についてである。ヤンプ法, M&P法ではスライス間力の作用点あ

\*7 本論文で示した計算例はすべて改良限界つり合い法の安全率に比べてヤンプ・ $h/3$ 法の安全率が大きかった(表一4参照)。しかし,  $\Delta B$ ,  $\Delta B_E$ を大きくとらなければ収束しないような斜面の場合で, わずかな差ではあるが逆転するケースもあった。

\*8 モルゲンステルン・プライスの提案の特徴の1つは, 斜面形状, すべり面, スラスト線等を適切な関数に置き, より一般化して斜面の安定問題を扱える点である。しかしその問題は, ここでは考慮していない。

\*9 ウェッジ法のうち三角土塊のすべりを仮定する方法も, 無限斜面法と同様に不静定次数はゼロである。

表一2 安定計算法の既知量, 未知量, 条件式, 不静定次数<sup>①</sup>

安定計算法	無限斜面法	ウェッジ法	簡易ビショッフ法	ヤンプ法	M&P法	ヤンプ・ $h/3$ 法	改良限界つり合い法
前提	平面	円弧	円弧	円弧 (非円弧)	円弧 (非円弧)	円弧 (非円弧)	円弧 (非円弧)
既知量	1	n	n	n	n	n	n
1. スライスに働く力							
(1) $W$	1	n	n	n	n	n	n
2. 境界条件							
(1) $V_i, V_{n+1} = k_1 \sigma_i^2$	-	2	2	2	2	2	2
(2) $H_i, H_{n+1} = k_2 \sigma_i^2$	-	2	2	2	2	2	2
(3) $h_{c1}, h_{c(n+1)} = k_3 \sigma_i^2$	-	-	-	2	2	2	2
未知量							
3. 安全率	1	1	n	n	n	n	n
4. すべり面に動員可能な全強度	1	n	n	n	n	n	n
5. スライスに働く力							
(1) $N$	1	n	n	n	n	n	n
(2) $T$	1	n	n	n	n	n	n
(3) $V$	-	n-1	-	-	-	-	-
(4) $H$	-	n-1	-	-	-	-	-
(5) $\Delta V$	1	-	n	n	n	n	n
(6) $\Delta H$	1	-	n	n	n	n	n
(7) $h_c$	-	-	-	n-1	n-1	n-1	n-1
未知量合計	6	5n+1	6n	7n-1	7n-1	7n-1	7n-1
条件式							
6. 円弧に関する約合							
(1) 水平方向 or すべり面方向	1	n	n	n	n	n	n
(2) 鉛直方向 or すべり面垂直方向	1	n	n	n	n	n	n
(3) モーメント	-	-	-	n	n	n	n
7. スライス間力に関する約合							
(1) $\sum \Delta H = 0$	1	-	-	1	-	1	1
(2) $\sum \Delta V = 0$	1	-	-	-	-	-	-
8. 全体に対する約合							
(1) $\sum H = 0$	-	-	-	-	-	-	-
(2) $\sum V = 0$	-	-	-	-	-	-	-
(3) $\sum M = 0$	-	(1) <sup>②</sup>	1	-	-	-	-
9. 強度別							
(1) クラック別	1	n	n	n	n	n	n
10. 安全率式							
(1) $F = \tau_{m}/\tau_0$	-	1	-	-	-	-	-
(2) $F = S/T$	1	-	n	n	n	n	n
(3) $F_1 = F_2 = \dots = F_n$	-	-	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1
条件式数合計	6	3n+1	5n	6n	6n-1	6n	6n
不静定次数	0	2n-2	n	n-1	n	n-1	n-1

① 1 記号は図-1参照。② 既知量数(通常はゼロ)。③ 10(1)の安全率式と同じ

表一3 各安定計算法で用いる仮定

解析法	すべり面形状	仮定	仮定条件式数
スウェーデン	円弧	$V = 0$ $H = 0$	$n-1$ $n-1$ 計 $2n-2$
簡易ビショッフ	円弧	$\Delta V = 0$	n
ヤンプ	円弧 (非円弧)	$h_c$ を適切に仮定し、「適切な解」を選ぶ。	$n-1$
M & P	円弧 (非円弧)	$V = \lambda \cdot f(\alpha)H$ :ここに $n-1$ 個の $f(\alpha)$ と1個の $\lambda$ を仮定し,得られた解の 中から「適切な解」を選ぶ。	$n-1$ $\frac{1}{\text{計 } n}$
ヤンプ・ $h/3$	円弧 (非円弧)	$h_c = h_s/3$	$n-1$
改良限界つり合い	円弧 (非円弧)	$dV/dH = -\tan \beta_2$ (上端あるいは下端のス ライスは仮定が不要)	$n-1$

るいは作用方向を適当に仮定し, 解の中から「適切な解」を選ぶという方針をとっている。そこでホイットマンらは「適切な解」として,

①  $\phi > \phi_{req}$

ここに,  $\phi_{req}$ : スライス側面に動員される摩擦角,

$$\phi_{req} = \tan^{-1} \left( \frac{V - c \cdot h_s}{H} \right)$$

V, H: スライス間力の鉛直, 水平成分

h<sub>s</sub>: スライス高さ

② スラスト線の流れが適切である。

の2つを挙げた<sup>10)</sup>。スラスト線(すなわち h<sub>t</sub> の位置)についてのヤンプの仮定は2.(1)にすでに示した。

しかし, 実際にはこのような「基準」で, 「適切な解」かそうでないかを判断することが難しいことは想像に欠かさない。一方ヤンプ・h/3法, 改良限界つり合い法では, 一応妥当と思われる仮定を導入し, それによって妥当な解を唯一的に得ようとするものである。

(2) 改良限界つり合い法とM&P法との比較

図-8はホイットマンらがM&P法を用いて安定計算を行ったモデル斜面の形状と材料定数である<sup>10)</sup>。図-9は f(x), λを変えて得られた4つの解である(ただし, λ値は4ケース共不明)。このうち図-9(1), (2)に示すものは「適切な解」と判断され, また図(3), (4)に示すものは φ<sub>req</sub>が大きすぎることを, スラスト線位置が適切でないことから, 「適切でない解」と判断されたものである。したがってこのすべり面の安全率は, 「適切な解」の図(1), (2)の1.59~1.61となる。

図-10(1), (2)は改良限界つり合い法による結果である。スラスト線の形は, 図-9の中では(2)の結果によく似ている。φ<sub>req</sub>は図-10(2)に示したが, 9°~0°で, ホイットマンらが得た結果よりも小さいが, いずれにしても φ > φ<sub>req</sub> を満足する(ただし, 引張域は無視する)。安全率は1.630で, M&P法による結果よりもやや大きい, 工学上問題にならない差である。M&P法との比較が可能な他の適当な計算例がみつからなかったため, 計算結果によるこれ以上の検討はできないが, 上述の比較で, M&P法が多くの試行と engineering judgement を要するのに対し, 改良限界つり合い法はより簡単に, 妥当な結果を得ることができることが理解されよう\*<sup>10)</sup>。

(3) 4つの方法による安全率の比較

スウェーデン法, 簡易ビショップ法, ヤンプ・h/3法および改良限界つり合い法を用いて, 浸透流のない4ケースの例題を計算して安全率を比較した。モデル斜面は図-8のケースと, 図-11に示す3ケースである(すべり面はいずれもりの先破壊で, すべり面の半径と中心

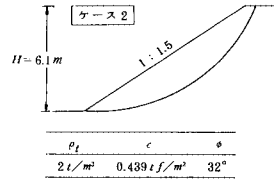


図-8 単純(1:1.5)斜面(ケース2)

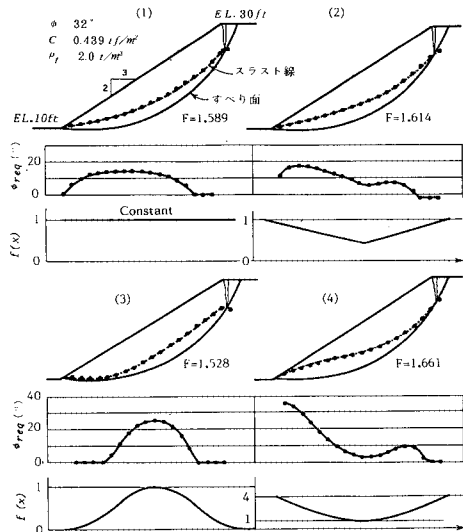
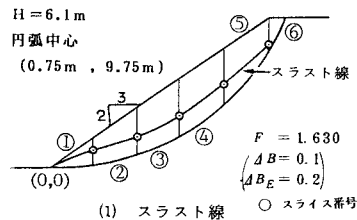
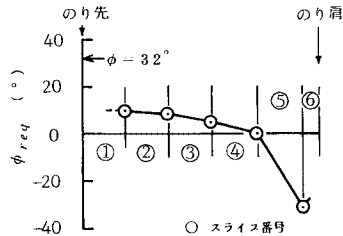


図-9 モルゲンステルン・プライス法 (ホイットマンらによる)<sup>10)</sup>



(1) スラスト線



(2) φ<sub>req</sub> - スライス番号

図-10 改良限界つり合い法(ケース2)

\*10 M & P法および改良限界つり合い法の両方とも, その基本式として表-2中の6(1), (2), (3)を用いるので基本的には仮定したスラスト線位置の違いが求める諸量 (F, F<sub>t</sub>, H<sub>s</sub>, ...) の違いに反映する。したがってスラスト線位置に極端な差がない限り, 原理的に両者の解に大きな差は生じ得ない。このことはヤンプ・h/3法についても同様である。

位置については図-12~15に示す)。表-4に結果を示す。安全率の最小値および最大値は, それぞれスウェーデン法およびヤンプ・h/3法によって得られた。改良限界つり合い法の結果はヤンプ・h/3法の値よりもいずれ

もわずかに小さくなった。

スウェーデン法では  $V=0, H=0$  の仮定を用いるため、特に勾配の急なすべり面上の垂直力を小さく見積もり、その結果せん断抵抗を過小に評価し、過小な安全率を与えた。また、 $\Delta V=0$  と仮定する簡易ビショッフ法の計算では、スウェーデン法とヤンプ・ $h/3$ 法の結果のほぼ中間の値を与えた。

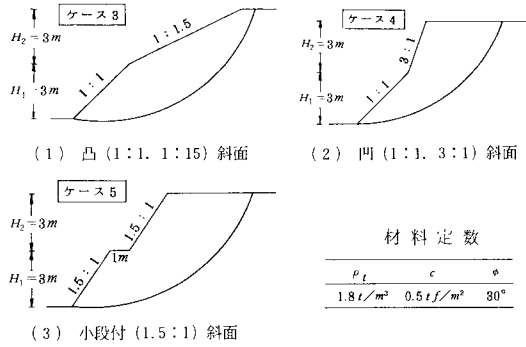
表一5にスウェーデン法、簡易ビショッフ法による安全率の、改良限界つり合い法の安全率に対する比を示す。スウェーデン法では10~15%，簡易ビショッフ法では5~7%だけ安全率が改良限界つり合い法に比べて小さい。ビショッフはあるモデル斜面について計算し、「簡易ビショッフ法の安全率がビショッフの厳密法によるよりも約5%小さい」と、またホイットマンらはM&P法と比較して、「簡易ビショッフ法は7%以下の誤差をもっている」と述べている<sup>10)</sup>。表に示すように、簡易ビショッフ法の安全率が改良限界つり合い法に対してちょうど5~7%小さくなっていることから、逆にビショッフの厳密法、M&P法は改良限界つり合い法と同等の安全率を与え得る方法<sup>\*11)</sup>であることがわかる。

(4) 提案する2方法によるスライス間力、余剰滑動力の検討

前節と同じ4ケースのモデル斜面について、改良限界つり合い法およびヤンプ・ $h/3$ 法によって得られるスライス間力、余剰滑動力、スラスト線を比較したものが図一12~15である。単純斜面(ケース2;図一12)ではスラスト線に大きな差はなく、スライス間力、余剰滑動力とも似かよった結果が得られた。凸斜面(ケース3;図一13)では、スライス間力は比較的似かよってはいるものの、ヤンプ・ $h/3$ 法による余剰滑動力の分布は、スラスト線に対してばらつき、力の絶対値も大きい。凹および小段付斜面(ケース4, 5, 図一14, 15)では両計算法の結果の違いがさらにはっきりしている。特にヤンプ・ $h/3$ 法による余剰滑動力の分布には方向性がなく、力の流れが自然でない。なお、ケース3, 4, 5では、斜面形状が特殊で改良限界つり合い法の解の収束が悪く、収束許容誤差を大きくとって計算せねばならなかった。そのため余剰滑動力の方向とスラスト線の方向は必ずしも一致していない。

さて、以上の改良限界つり合い法の結果は、ヤンプやホイットマンらが示した「解が適切であるための条件」(2.(1), 3.(1))をよりどころに考えるならば、いずれも適切解と判断される。ヤンプ・ $h/3$ 法による解は、

\*11 M&P法は唯一的な解を与えるものでないから(3.(2)), 与えるとはいえない。また、ビショッフの厳密法による解析法、あるいは計算例については、著者らの知る限り報告されておらず、これ以上本法との比較はできない。



図一11 モデル斜面(ケース3, 4, 5)

表一4 安全率の比較

ケース	スウェーデン	簡易ビショッフ	ヤンプ・ $h/3$	改良限界均合
2*	1.43	1.54	1.63	1.63
3	1.51	1.65	1.77	1.76
4	1.19	1.28	1.36	1.34
5	1.21	1.33	1.41	1.40

\* M&P法による「ケース2」斜面の安全率は1.59~1.61(3.2参照)。

表一5  $F_s/F_A, F_B/F_A$ の比\*

ケース	$F_s/F_A$	$F_B/F_A$
2	87.7(%)	94.5(%)
3	85.8	93.8
4	88.8	95.5
5	86.4	95.0

\*  $F_s$ : スウェーデン法による安全率  
 $F_B$ : 簡易ビショッフ法による安全率  
 $F_A$ : 改良限界均合法による安全率

スライス間力、特に余剰滑動力については適切でない分布を与えるケースもあり、この点は改良限界つり合い法に比べて合理的とはいえない。しかし、安全率の値に関しては十分満足できるものである。

4. 結 論

本研究で得られた主な結論は次のとおりである。

(1) 円弧および非円弧すべり面に適用できるヤンプ・ $h/3$ 法および改良限界つり合い法の2つの斜面安定計算法を新しく提案した。両計算法とも基礎式としてスライスのすべり面方向とそれに垂直な方向のつり合い式、および  $N$  の作用点  $m$  (図一1参照) に関するモーメントのつり合い式を用いる。前者は「スライス間力の作用高さはスライス高さの1/3である」、後者は「余剰滑動力の方向はスラスト線の方向に一致する」の仮定を用いた。ここに余剰滑動力は、1つのスライスに働くスライス間力のベクトル和と同じ大きさで、逆向きの力と定義した。



(2) 改良限界つり合い法による解は収束計算によって得られるが、そのとき、収束許容誤差を小さくしていくと安全率はわずかに小さくなっていくが、収束のための繰返し回数は急増する。この点を考えて適当な収束許容誤差の値を示した。

(3) ヤンプ・ $h/3$ 法による安全率は、改良限界つり合い法による解よりもわずかに大きく（計算例では0.014以下）、ほぼ改良限界つり合い法による安全率の

上限値となる。しかし、その差は小さくて工学上問題にならず、両者はほぼ同じ安全率を与えるとしてよい。

(4) 従来用いられてきた無限斜面法、スウェーデン法、簡易ビショップ法、ヤンプ法、モルゲンステルン・プライス法 (M&P 法) および新たに提案したヤンプ・ $h/3$ 法、改良限界つり合い法について、安定計算等で用いられている条件式、つり合い式を調べ、不足条件式数（不静定次数）とそれに対する仮定を明らかにした。

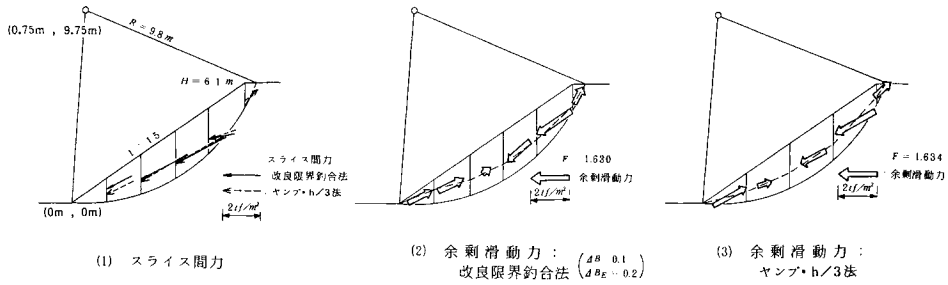


図-12 1:1.5 斜面 (ケース 2)

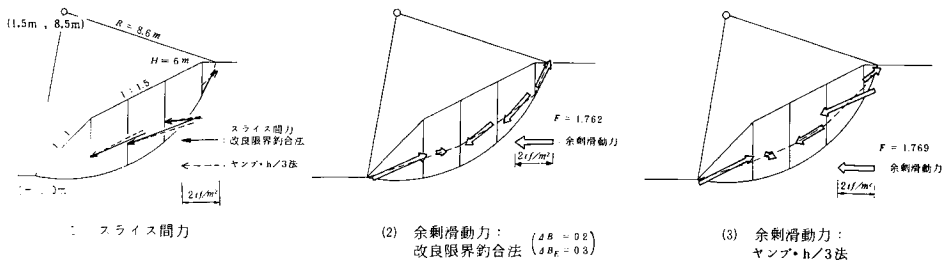


図-13 凸 (1:1, 1:1.5) 斜面 (ケース 3)

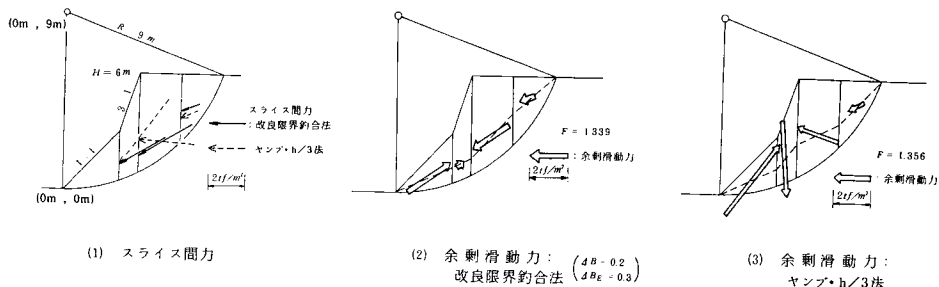


図-14 凹 (1:1, 3:1) 斜面 (ケース 4)

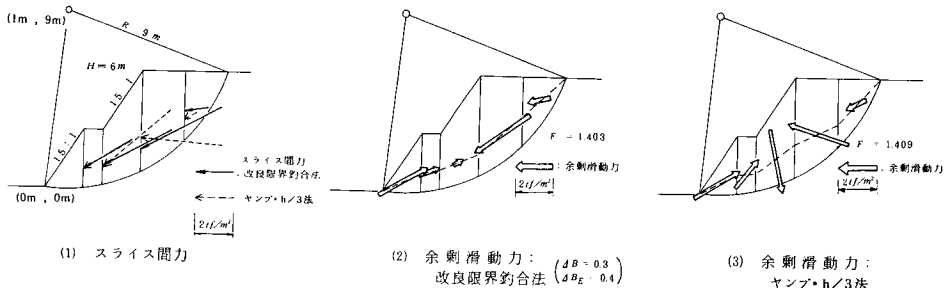


図-15 小段付 (1.5:1) 斜面 (ケース 5)

(5) 改良限界つり合い法による解を、M&P法によるホイットマンらの「適切な解」と比較したところ、スラスト線、安全率ともほぼ一致した結果が得られた。改良限界つり合い法はM&P法に比べて、より簡単に、唯一的に妥当な結果を与える。

(6) 4ケースのモデル斜面(浸透流を考えない)に対して、スウェーデン法、簡易ビショッブ法、ヤンプ・ $h/3$ 法、改良限界つり合い法で計算した安全率を比較した結果、安全率はいずれのケースでも

スウェーデン法<簡易ビショッブ法<改良限界つり合い法 $\approx$ ヤンプ・ $h/3$ 法

となった。改良限界つり合い法を基準に考えると、スウェーデン法による安全率は10~15%、簡易ビショッブ法による安全率は5~7%小さくなった。

(7) 改良限界つり合い法は、ヤンプ・ $h/3$ 法に比べて、はるかに自然で妥当なスライス間力、余剰滑動力を与える。しかし、両者はほぼ同じ安全率を与えることから、ヤンプ・ $h/3$ 法は非円弧すべり面にも適用できる精度のよい実用計算法と位置づけることができる。

謝 辞：計算手法の開発に協力された元・大阪市立大学学部生(現・基礎地盤コンサルタンツ(株))庄司岳雄氏、および解析法について討論して頂いた大阪市立大学 園田恵一郎教授に感謝の意を表します。

#### 参 考 文 献

- 1) Fellenius, W. : Calculation of the Stability of Earth Dams, Second Congress on Large Dams, pp.445~462, 1936.
- 2) Bjerrum, L. and Flodin, N. : The Development of Soil Mechanics in Sweden, 1900-1925, Geotech., Vol.10, pp.1~18, 1960.
- 3) Taylor, D.W. : Stability of Slopes (chap.16), Foundations of Soil Mechanics, John Wiley & Sons, pp.406~479, 1948.
- 4) Bishop, A.W. : The Use of the Slip Circle in the Stability Analysis of Slopes, Geotech., Vol.5, pp.7~17, 1955.
- 5) Janbu, N. : Earth Pressure and Bearing Capacity Calculations by Generalized Procedure of Slices, The 4th ICSMFE, Vol.2, pp.207~212, 1957.
- 6) Morgenstern, N.R. and Price, V.E. : The Analysis of the Stability of General Slip Surfaces, Geotech., Vol.15, pp.79~93, 1965.
- 7) 望月秋利：三笠正人：フィルダムの安定解析法，土と基礎，Vol.32-4, pp.19~26, 1984.
- 8) Janbu, N. : Slope Stability Computations, Embankment-Dam Engineering, John Wiley & Sons, pp.47~86, 1973.
- 9) Spencer, E. : Effect of Tension on Stability of Embankments, ASCE, SM 5, pp.1159~1173, 1968.
- 10) Whitman, R.V. and Bailey, W.A. : Use of Computers for Slope Stability Analysis, ASCE, SM 4, pp.475~498, 1967.

(1986.1.20・受付)