

## 異方性中空円柱の圧密

## CONSOLIDATION OF ANISOTROPIC HOLLOW CYLINDER

熊本直樹\*・吉国 洋\*\*

By Naoki KUMAMOTO and Hiroshi YOSHIKUNI

In this paper, the consolidation behaviour of a hollow cylinder under seven kinds of deformation condition is examined assuming the anisotropic stress-strain relation of the clay skeleton. That is, a consolidation equation is induced, and then, giving its solution, the effects of anisotropy and deformation conditions on its consolidation behaviour are considered.

As a result, the authors clarified the following facts: the form of consolidation equation of transversally isotropic hollow cylinder becomes entirely the same as isotropic hollow cylinder; the rate of consolidation is depends on the ratio of outside and inside diameters of hollow cylinder, anisotropy and deformation conditions; etc.

## 1. ま え が き

多次元圧密の理論的な研究は、一般に等方線形弾性体をモデルとして行われている。たとえば、Barron<sup>1)</sup>の研究、Cryer<sup>2)</sup>の研究、Da Silveira<sup>3)</sup>の研究などはいずれも等方的な応力-ひずみ関係を仮定している。ところが、実際の粘土は層状に堆積し、何らかの異方性をもっていることが多いので、異方性が圧密挙動に与える影響を知ることが重要である。これに対し、田村<sup>4)</sup>は横等方性を考慮して、ある境界条件下の中空円柱の圧密過程を計算し、水平方向に対する垂直方向の剛性比 $\beta$ と外周径と内周径の比 $n$ をパラメーターにして、圧密挙動を考察している。しかし、それがどのような変形条件のもとにおける解か、明確には表現していない。また、その変形条件の不明確さのために、その結論があたかも中空円柱のすべてに共通の結論のように受けとられる面もあり、いく分の混乱がみられる。

そこでこの論文では、この点を明らかにするために、粘土骨格の応力-ひずみ関係を横等方性とし、7種類の

境界条件をもった中空円柱の圧密挙動を検討している。すなわち、上記の中空円柱の圧密応力を求め、圧密方程式を導出した。次にその解を示し、中空円柱の異方性およびその境界条件が圧密挙動に与える影響を考察した。

その結果、横等方性中空円柱の圧密方程式は等方性中空円柱の圧密方程式と全く同じ形になること、異方性の影響は圧密応力の増加率 $\alpha$ のみに反映されること、異方性を大きくしていくと、圧密速度と $n$ の関係が逆転するものもあるが、境界条件によってはそうでないものもあること、などを明らかにした。

## 2. 圧密を支配する方程式

この節では、横等方性粘土の圧密を支配する一般的な方程式を検討する。粘土は、水平方向に層を成しているものとし、その面内に $x$ 、 $y$ 座標をとり、 $z$ 座標を成層に垂直にとる。

$z$ 方向を成層の軸とする横等方性弾性体の応力-ひずみ関係は、式(1)のように $c_1 \sim c_5$ の独立な弾性定数で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= c_1 \varepsilon_x + (c_1 - 2c_5) \varepsilon_y + c_2 \varepsilon_z \\ \sigma'_y &= (c_1 - 2c_5) \varepsilon_x + c_1 \varepsilon_y + c_2 \varepsilon_z \\ \sigma'_z &= c_2 \varepsilon_x + c_2 \varepsilon_y + c_3 \varepsilon_z \\ \tau_{yz} &= c_4 \gamma_{yz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

\* 正会員 工修 三菱重工業(株)広島研究所  
(〒730 広島市中区江波沖町5-1)

\*\* 正会員 工博 広島大学教授 工学部第IV類  
(〒724 東広島市西条町大字下見)

$$\tau_{xx} = c_4 \gamma_{xx}$$

$$\tau_{xy} = c_5 \gamma_{xy}$$

ここで、 $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$  は有効垂直応力、 $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$  はせん断応力、 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$  はひずみである。なお、等方性の場合には

$$\left. \begin{aligned} c_1 = c_3 = \lambda + 2\mu = 1/m_v \\ c_2 = \lambda, \quad c_4 = c_5 = \mu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

である。ここで、 $\lambda, \mu$  は Lamé の定数、 $m_v$  は体積圧縮係数である。また、式 (1) のひずみは、式 (3) に示すように、変位 ( $u_x, u_y, u_z$ ) で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

次に圧密過程を静的とみなし、粘土の自重を無視すると式 (4) に示すつり合い方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $u$  は間隙水圧である。また、間隙水の移動則については、Darcy 則を採用する。

$$v = -\frac{k}{\gamma_w} \text{grad } u \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $v, k, \gamma_w$  はそれぞれ、間隙水の流速ベクトル、透水係数、間隙水の単位体積重量である。一方、粘土中では連続の条件が満足されなければならないので、次式が成立する。

$$\frac{\partial e_v}{\partial t} = \text{div } v \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $e_v, t$  はそれぞれ、体積ひずみ、時間である。

式 (1), (3), (4), (5), (6) で横等方性粘土の圧密は表わされるが、もう少し式を整理すると、式 (1), (3), (4) から式 (7)~(9) を得る。

$$\left. \begin{aligned} c_1 \frac{\partial e_v}{\partial x} + c_5 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ c_5 \frac{\partial u_x}{\partial z} \right. \\ \left. + (c_2 - c_1 + c_4) \frac{\partial u_z}{\partial x} \right\} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \dots\dots\dots (7) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 \frac{\partial e_v}{\partial y} + c_5 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ c_4 \frac{\partial u_y}{\partial z} \right. \\ \left. + (c_2 - c_1 + c_4) \frac{\partial u_z}{\partial y} \right\} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \dots\dots\dots (8) \end{aligned} \right\}$$

$$(c_2 + c_4) \frac{\partial e_v}{\partial z} + c_4 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} + c_4 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + (c_3 - c_2 + 2c_4) \\ \times \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

また、式 (5), (6) から式 (10) を得る。

$$\frac{\partial e_v}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 u \dots\dots\dots (10)$$

したがって、横等方性粘土の圧密は、式 (7)~(10) で表わされる。

### 3. 中空円柱の境界条件と圧密応力

解析に先立ち、次の仮定を置く。

- (1) 中空円柱の各境界面は滑らかである。
- (2) 各境界面は、圧密前の境界面に平行を保って変位する。
- (3) 鉛直方向の間隙水の流れはなく、内向き放射流れのみとする。

このような仮定を置くと、変位ベクトルを  $u$  とすれば、

$$\text{rot } u = 0 \dots\dots\dots (11)$$

である。また、中空円柱の鉛直方向に  $z$  座標をとると、上記仮定から  $z$  方向に偏微分した量はゼロになる。たとえば、

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial e_v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \dots\dots (12)$$

などである。したがって、 $z$  方向の変位  $u_z$  は全領域で一様であり、いわゆる等ひずみ条件である。このような条件のとき式 (7) および式 (8) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (c_1 e_v + u) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (c_1 e_v + u) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

となり、式 (9) は恒等的に成立する。また、式 (12) から、圧密過程を通じて

$$\frac{\partial}{\partial z} (c_1 e_v + u) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

が成立する。したがって、横等方性中空円柱の場合には、式 (7)~(9) を

$$\text{grad} (c_1 e_v + u) = 0 \dots\dots\dots (15)$$

と非常に単純な形で書くことができる。式 (15) から、

$$\varphi = c_1 e_v + u \dots\dots\dots (16)$$

と表わすことにすると、 $\varphi$  は時間のみの関数で、位置的には定数であることがわかる。式 (16) で表わされる  $\varphi$  を横等方性中空円柱の圧密応力と定義する。式 (16) を式 (10) に代入すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_1 k}{\gamma_w} \nabla^2 u + \frac{d\varphi}{dt} \dots\dots\dots (17)$$

を得る。以上から、横等方性中空円柱の圧密は、式 (15) および式 (17) で表わされることがわかる。圧密応力  $\varphi$

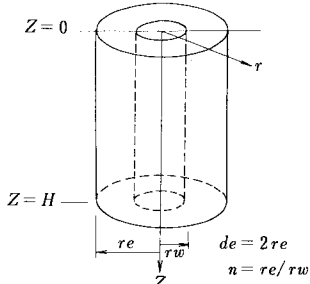


Fig. 1 Coordinate system of hollow cylinder.

を間隙水圧  $u$  のみで表現することができれば、間隙水圧  $u$  のみで表わされた横等方性中空円柱の圧密方程式を得る。

次に、具体的に中空円柱の圧密応力  $\varphi$  を求める。中空円柱の座標を Fig. 1 のようにとる。中空円柱の高さは  $H$  で、外径、内径はそれぞれ、 $r_e$ 、 $r_w$  とする。 $\varphi$  は位置的に定数であるので

$$\varphi = \bar{\varphi} = c_1 \bar{e}_v + \bar{u} \dots \dots \dots (18)$$

と書け、これと、各境界面における応力のつり合い、応力-ひずみ関係式、ひずみと変位の関係式から、式 (19) ~ (22) を得る。

$$\varphi = p_{re} + (c_1 - c_2) \frac{u_{zu}}{H} - 2c_5 \frac{u_{re}}{r_e} \dots \dots \dots (19)$$

$$\varphi = p_{rw} + (c_1 - c_2) \frac{u_{zu}}{H} - 2c_5 \frac{u_{rw}}{r_w} \dots \dots \dots (20)$$

$$\varphi = \bar{p}_z + (c_1 - c_3) \frac{u_{zu}}{H} - (c_1 - c_2) \frac{2(nu_{re} - u_{rw})}{r_w(n^2 - 1)} \dots \dots \dots (21)$$

$$\varphi = c_1 \left\{ \frac{u_{zu}}{H} - \frac{2(nu_{re} - u_{rw})}{r_w(n^2 - 1)} \right\} + \bar{u} \dots \dots \dots (22)$$

ここに、 $n = r_e / r_w$

$p_{re}$ ,  $p_{rw}$ ,  $\bar{p}_z$ : 外周面, 内周面および上端面における荷重強度 ( $z$  方向は平均値で与える)

$u_{re}$ ,  $u_{rw}$ ,  $u_{zu}$ : 外周面, 内周面および上端面の変位 (下端面の変位は 0 とする)

である。また、 $\bar{\quad}$  は位置的平均値を意味する。

ここでは、Fig. 2 に示す 7 種類のケースを取り扱う。ケース 1 は各境界面に圧密荷重を与えるもので、 $p_{re} = p_{rw} = \bar{p}_z$  のときは、いわゆる等方圧密である。ケース 4 は外周面および内周面の変位を拘束したもので、いわゆる  $K_0$  圧密である。Barron が取り扱った中空円柱の圧密は、このケース 4 に相当する。ケース 7 は、上下端面および内周面の変位を拘束し、内周面に荷重を作用させる形式の圧密である。

Fig. 2 に示す各圧密形式の既知境界値および未知境界値はそれぞれ 3 個である。これに圧密応力  $\varphi$  も加えると、未知変数は合計 4 個である。一方、境界値および圧密応力の関係式は式 (19) ~ (22) に示すように 4 つあるので、これらから 4 個の未知変数を求めることができる。各圧密形式について具体的に圧密応力  $\varphi$  を求めると、

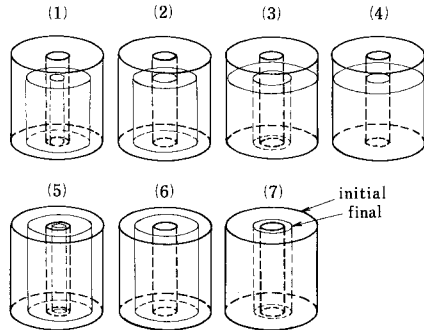


Fig. 2 Seven kinds of deformation conditions.

Table 1 Relations between boundary conditions and consolidation stress.

| case | known-value                         | unknown-value               | $\alpha$  | $F_z$  | $F_{re}$   | $F_{rw}$  |
|------|-------------------------------------|-----------------------------|---|--|--|---|
| 1    | $\bar{p}_z, p_{re}, p_{rw}$         | $u_{zu}, u_{re}, u_{rw}$    | $\frac{(c_1 - c_2)^2 - c_5(c_1 - c_2)}{c_1 c_2 - c_2 c_2 - c_2 c_5}$  | $\frac{c_1 - c_2 - c_5}{c_1 - 2c_2 + c_2 - c_5}$   | $\frac{n^2}{n^2 - 1} \cdot \frac{c_3 - c_2}{c_1 + c_2 + c_3 - c_5}$      | $\frac{-1}{n^2 - 1} \cdot \frac{c_3 - c_2}{c_1 - 2c_2 + c_2 - c_5}$ |
| 2    | $\bar{p}_z, p_{re}, u_{rw} = 0$     | $p_{rw}, u_{zu}, u_{re}$    | $\frac{n^2 \{ (c_1 - c_2)^2 - c_5(c_1 - c_2) \} + c_5(c_1 - c_2)}{n^2 \{ c_1(c_1 - c_2) + c_5(c_1 - c_2 - c_5) \} + c_5 c_2}$ | $\frac{n^2 c_1 (c_1 - c_2 - c_5) + c_1 c_2}{n^2 c_1 (c_1 - 2c_2 + c_3 - c_5) + c_1 c_2}$ | $\frac{n^2 c_1 (c_3 - c_2)}{n^2 c_1 (c_1 - 2c_2 + c_3 - c_5) + c_1 c_2}$ | 0   |
| 3    | $\bar{p}_z, p_{re}, u_{re} = 0$     | $p_{re}, u_{zu}, u_{rw}$    | $\frac{(c_1 - c_2)^2 + (n^2 - 1)c_5(c_1 - c_2)}{c_5 \{ c_1 + (n^2 - 1)c_2 \} - c_2 c_5}$                                      | $\frac{c_1 - c_2 + (n^2 - 1)c_5}{c_1 - 2c_2 + c_3 + (n^2 - 1)c_5}$                       | 0  | $\frac{c_3 - c_2}{c_1 - 2c_2 + c_3 + (n^2 - 1)c_5}$                 |
| 4    | $\bar{p}_z, u_{re} = 0, u_{rw} = 0$ | $p_{re}, p_{rw}, u_{zu}$    | $\frac{c_1 - c_2}{c_2}$   | 1  | 0  | 0   |
| 5    | $p_{re}, p_{rw}, u_{zu} = 0$        | $\bar{p}_z, u_{re}, u_{rw}$ | $\frac{c_2}{c_1 - c_5}$   | 0  | $\frac{n^2}{n^2 - 1}$  | $\frac{-1}{n^2 - 1}$  |
| 6    | $p_{re}, u_{zu} = 0, u_{rw} = 0$    | $\bar{p}_z, p_{rw}, u_{re}$ | $\frac{(n^2 - 1)c_2}{(c_1 - c_2)n^2 + c_2}$   | 0  | 1  | 0   |
| 7    | $p_{rw}, u_{zu} = 0, u_{re} = 0$    | $\bar{p}_z, p_{re}, u_{rw}$ | $-\frac{(n^2 - 1)c_2}{c_1 + (n^2 - 1)c_2}$  | 0  | 0  | 1   |

In case of isotropic clay,  $c_1 = c_3 = \lambda + 2\mu$ ,  $c_2 = \lambda$ ,  $c_5 = \mu$   $\lambda, \mu$ : Lané's constants

いずれの場合でも  $\bar{\varphi}$  は

$$\bar{\varphi} = (1 + \alpha)(F_z \bar{p}_z + F_{re} \bar{p}_{re} + F_{rw} \bar{p}_{rw}) - \alpha \bar{u} \dots\dots\dots (23)$$

という形に表わされる。  $\alpha$ ,  $F_z$ ,  $F_{re}$ ,  $F_{rw}$  は、境界条件、弾性定数、および  $n$  によって定まる定数で、具体的には Table 1 のようになる。なお、係数  $F_z$ ,  $F_{re}$ ,  $F_{rw}$  間には、次の関係が成立する。

$$F_z + F_{re} + F_{rw} = 1 \dots\dots\dots (24)$$

また、Table 1 で、 $c_1 = c_3 = \lambda + 2\mu$ ,  $c_2 = \lambda$ ,  $c_5 = \mu$  とおくと、等方弾性時の定数が得られる。

4. 圧密方程式とその解

式 (23) を式 (17) に代入すると、式 (25) を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_1 k}{\gamma_w} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + (1 + \alpha) \frac{dp}{dt} - \frac{2\alpha}{r_e^2 - r_w^2} \cdot \frac{d}{dt} \int_{r_w}^{r_e} r u dr \dots\dots\dots (25)$$

ここに、

$$p = F_z \bar{p}_z + F_{re} \bar{p}_{re} + F_{rw} \bar{p}_{rw} \dots\dots\dots (26)$$

式 (25) が横等方性中空円柱の内向き放射流れによる圧密方程式であるが、 $p$  が時間的に変化しない場合は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_1 k}{\gamma_w} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{2\alpha}{r_e^2 - r_w^2} \cdot \frac{d}{dt} \int_{r_w}^{r_e} r u dr \dots\dots\dots (27)$$

となる。無次元化した解を得るために

$$c_v = \frac{c_1 k}{\gamma_w}, R = \frac{r}{r_w}, U = \frac{u}{u_0}, T = \frac{c_v t}{d_e^2} \dots\dots\dots (28)$$

ここに  $u_0$  :  $u$  の初期値,  $d_e = 2r_e$  とおくと、式 (27) は次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial T} = 4n^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \right) - \frac{2\alpha}{n^2 - 1} \cdot \frac{d}{dT} \int_1^n R U dR \dots\dots\dots (29)$$

式 (29) は、等方性中空円柱の圧密方程式<sup>5)</sup>と全く同じ形をしている。したがって、異方性の影響は、係数  $\alpha$  のみに反映されていることになる。また、 $n$  が同一であれば、圧密過程 ( $U$ - $T$  曲線) は、係数  $\alpha$  のみによって異なる。なお、田村が求めた中空円柱の圧密方程式とここで求めたそれとを比較してみると、田村が検討した中空円柱は、この論文で対象としている 7 種類の変形条件の中のケース 3 に相当することがわかる。

次に、式 (29) の解を示す。  $U$  に関する境界条件は、内向き放射流れということから、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} U(1, T) &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial R} \Big|_{R=n} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

また、初期間隙水圧は一様に分布しているとして

$$U(R, 0) = 1 \dots\dots\dots (31)$$

と初期条件を置く。このような境界条件および初期条件下の式 (29) の解は著者らによってすでに求められてお

り<sup>5)</sup>、その結論のみを記すと、次のとおりである。

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \{ D_0(\lambda_i R) - D_0(\lambda_i) \} e^{-4\lambda_i^2 n^2 T} \dots\dots\dots (32)$$

$$\bar{U} = - \frac{2}{(1 + \alpha)(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{\lambda_i} D_1(\lambda_i) e^{-4\lambda_i^2 n^2 T} \dots\dots\dots (33)$$

ここに

$$C_i = \frac{-2\lambda_i D_1(\lambda_i)}{\lambda_i^2 n^2 \{ D_0(\lambda_i n) \}^2 - [\lambda_i^2 - 1] \dots\dots\dots (34)}$$

$$\cdot \frac{1}{\left[ \frac{2\alpha + (1 + \alpha)(n^2 - 1)}{(1 + \alpha)(n^2 - 1)} \right]^2} \{ D_1(\lambda_i) \}^2$$

$$D_0(\lambda R) = J_0(\lambda R) - \frac{J_1(\lambda n)}{Y_1(\lambda n)} Y_0(\lambda R) \dots\dots\dots (35)$$

$$D_1(\lambda R) = J_1(\lambda R) - \frac{J_1(\lambda n)}{Y_1(\lambda n)} Y_1(\lambda R) \dots\dots\dots (36)$$

$\lambda_i$  は

$$D_0(\lambda_i) + \frac{2\alpha}{(1 + \alpha)(n^2 - 1)\lambda_i} D_1(\lambda_i) = 0 \dots\dots\dots (37)$$

の根である。なお、 $J$ ,  $Y$  はそれぞれ、第 1 種および第 2 種の Bessel 関数で、添字 0, 1 はそれぞれ 0 次, 1 次を表わす。Fig. 3 に、 $n=10$  のときの平均圧密度  $\bar{U}_c$  と時間係数  $T$  の関係を示す。平均圧密度  $\bar{U}_c$  は

$$\bar{U}_c = \frac{\bar{e}_v}{e_{vf}} = 1 - \frac{\bar{u}}{u_0} \dots\dots\dots (38)$$

で定義している。添字 0 は初期状態を、添字  $f$  は最終状態を意味する。

間隙水圧は以上より求まるが、Fig. 2 に示した各圧密形式の未知境界値は式 (19)~(22) から求めることができる。以下にそれらを求めた結果を示す。

ケース 1 :

$$u_{zu} = \frac{1}{C_{12}} \left[ \left[ p - \frac{n^2}{N} p_{re} + \frac{1}{N} p_{rw} - \frac{c_5 D_z}{C_{32}} \right] + \frac{(c_3 C_{15} - c_1 c_2)\alpha + c_5 C_{13}}{c_1 C_{32}} \bar{U}_c p \right] H \dots\dots\dots (39)$$

$$u_{re} = \frac{1}{2C_{32}} \left[ \left[ -D_z - \frac{C_{32}}{c_5} \cdot \frac{1}{N} (p_{re} - p_{rw}) \right] - \frac{1}{c_1} \{ -c_1 + (1 + \alpha) c_3 \} \bar{U}_c p \right] r_e \dots\dots\dots (40)$$

$$u_{rw} = \frac{1}{2C_{32}} \left[ \left[ -D_z - \frac{C_{32}}{c_5} \cdot \frac{n^2}{N} (p_{re} - p_{rw}) \right] \right]$$

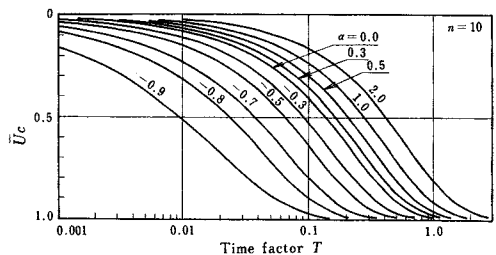


Fig. 3 Rate of consolidation ( $n=10$ ).

$$-\frac{1}{c_1} \{-c_1 + (1+\alpha) c_3\} \bar{U}_c p \Big] r_w \dots (41)$$

ケース 2 :

$$p_{rw} = \frac{1}{C_{12}^2 n^2 - c_5 C_{13} N} (c_5 C_{32} N p - c_5 C_{12} N \bar{p}_z + C_{12}^2 n^2 p_{re} + c_5 C_{32} N \alpha \bar{U}_c p) \dots (42)$$

$$u_{zu} = \frac{1}{C_{12}^2 n^2 - c_5 C_{13} N} \{C_{12} n^2 D_{re} - c_5 N D_z + (C_{12} n^2 - c_5 N) \alpha \bar{U}_c p\} H \dots (43)$$

$$u_{re} = \frac{nN}{2(C_{12}^2 n^2 - c_5 C_{13} N)} (-C_{12} D_z + C_{13} D_{re} - C_{32} \alpha \bar{U}_c p) r_w \dots (44)$$

ケース 3 :

$$p_{re} = \frac{1}{C_{32}} \left\{ C_{32} p_{rw} - c_5 N D_z + \frac{c_5}{c_1} N (C_{13} - c_3 \alpha) \bar{U}_c p \right\} \dots (45)$$

$$u_{zu} = \frac{1}{C_{12} C_{32}} \left[ C_{32} D_{rw} + c_5 N D_z + \left\{ C_{32} \alpha - \frac{c_5}{c_1} N (C_{13} - c_3 \alpha) \right\} \bar{U}_c p \right] H \dots (46)$$

$$u_{rw} = -\frac{N}{2C_{32}} \left( -D_z + \frac{C_{13} - c_3 \alpha}{c_1} \bar{U}_c p \right) r_w \dots (47)$$

ケース 4 :

$$p_{re} = p_{rw} = \left( 1 + \frac{C_{23}}{c_3} \bar{U}_c \right) p \dots (48)$$

$$u_{zu} = \bar{U}_c p H / c_3 \dots (49)$$

ケース 5 :

$$\bar{p}_z = \left( 1 - \frac{C_{12} - c_5}{c_5} \alpha \bar{U}_c \right) p \dots (50)$$

$$u_{re} = -\frac{1}{2c_5} (D_{re} + \alpha \bar{U}_c p) r_e \dots (51)$$

$$u_{rw} = -\frac{1}{2c_5} (D_{rw} + \alpha \bar{U}_c p) r_w \dots (52)$$

ケース 6 :

$$\bar{p}_z = \left[ 1 - \frac{c_5 + (C_{12} - c_5) n^2}{c_5 N} \alpha \bar{U}_c \right] p \dots (53)$$

$$p_{rw} = (1 + \alpha \bar{U}_c) p \dots (54)$$

$$u_{re} = -\frac{1}{2c_5} \alpha \bar{U}_c r_e p \dots (55)$$

ケース 7 :

$$\bar{p}_z = \left[ 1 + \frac{(C_{12} - c_5) + c_5 n^2}{c_5 N} \alpha \bar{U}_c \right] p \dots (56)$$

$$p_{re} = (1 + \alpha \bar{U}_c) p \dots (57)$$

$$u_{rw} = -\frac{1}{2c_5} \alpha \bar{U}_c r_w p \dots (58)$$

ここに,

$$C_{ij} = c_i - c_j \dots (59)$$

$$D_z = p - \bar{p}_z \dots (60)$$

$$D_{re} = p - p_{re} \dots (61)$$

$$D_{rw} = p - p_{rw} \dots (62)$$

$$N = n^2 - 1 \dots (63)$$

式 (39)~(58) において,  $\bar{U}_c = 0$  とおいて得られる境界値は載荷直後のもので,  $\bar{U}_c = 1$  とおいて得られる境界値は最終状態のものである。

次に圧密応力  $\varphi$  について考える。  $t=0$  では  $e_0=0$  であり, さらに, 今考えている問題では  $u_0$  は一様に分布していることから

$$\varphi_0 = u_0 = \bar{u}_0 \dots (64)$$

であり, これを式 (23) に代入すると  $u_0$  は

$$u_0 = F_z \bar{p}_z + F_{re} p_{re} + F_{rw} p_{rw} = p \dots (65)$$

となる。また,  $t=\infty$  においては  $\bar{u}=0$  であるので, 圧密完了時の圧密応力  $\varphi_f$  は式 (23) から

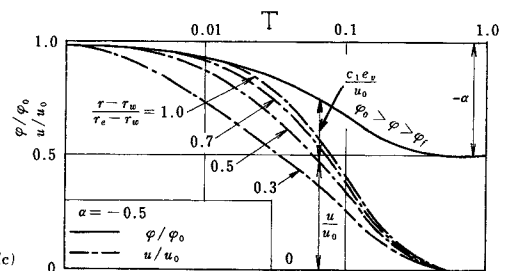
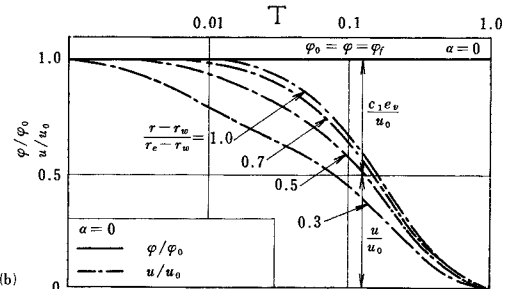
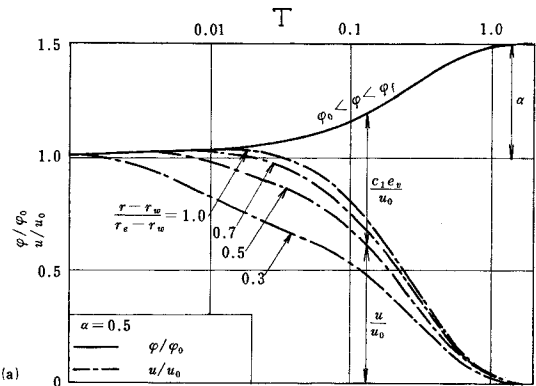


Fig. 4 Plot of consolidation stress  $\varphi$  and pore pressure  $u$  against time factor  $T$  for cases of  $\alpha = 0.5, 0.0$  and  $-0.5$ .

$$\varphi_r = (1 + \alpha)p \dots\dots\dots (66)$$

となる。したがって、式 (64), (65), (66) から

$$\alpha = \frac{\varphi_r - \varphi_0}{\varphi_0} \dots\dots\dots (67)$$

が得られ、 $\alpha$  は定荷重下の圧密応力の増加率を表わしている。また、以上の関係から

$$\varphi = \varphi_0(1 + \alpha \bar{U}_c) \dots\dots\dots (68)$$

という関係も導かれる。

$n=10$  の場合について、 $\alpha$  が 0.5, 0.0, -0.5 のときの間隙水圧および圧密応力を示すと、Fig. 4 のようになる。Fig. 4 から、 $\varphi$  と  $\alpha$  の意味、および、間隙水圧と体積ひずみの関係が知れる。すなわち、 $\alpha$  が正の場合は  $\varphi$  が圧密過程に増加し、 $\alpha$  が負の場合は減少する。 $\varphi$  が圧密過程に増加する場合は正の Mandel-Cryer 効果が、 $\varphi$  が減少する場合は負の Mandel-Cryer 効果が発生し、あたかも漸増荷重による圧密、または、漸減荷重による圧密のような挙動となる。Fig. 4 には、 $\varphi$  と間隙水圧および体積ひずみの関係も示しているが、 $\varphi$  が増加する場合は発生する体積ひずみも大きい。 $\varphi$  が減少する場合は、圧密速度は速いが、発生する体積ひずみも少ない。特に  $\alpha$  が -1 の場合は、瞬間的に間隙水圧が消失し、体積ひずみは発生しない。

### 5. 計算例と考察

この論文で考えている横等方性中空円柱の圧密方程式は等方性のそれと全く同じ形をしており、異方性の影響は圧密応力の増加率  $\alpha$  のみに反映される。したがって、 $n$  と  $\alpha$  をパラメーターにした解を得ておれば、異方性を考慮したときの  $\alpha$  がどのような値になるかを知りだけで、その圧密過程を知ることができる。そこでこの節では、異方性と圧密応力の増加率  $\alpha$  の関係について考察する。

議論を簡単にするために

$$c_1 = \lambda + 2\mu, c_2 = \lambda, c_3 = \mu \dots\dots\dots (69)$$

とし、鉛直方向の剛性  $c_3$  が水平方向の剛性  $c_1$  の  $\beta$  倍、すなわち

$$c_3 = \beta c_1 \dots\dots\dots (70)$$

および、ポアソン比  $\nu$  が

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = 0.3$$

の特殊な場合について考える。

Fig. 5, Fig. 6 に、 $n (= r_e/r_w)$  が 3 および 5 のときの  $\alpha$  と  $\beta$  の関係を示す。ケース 5, 6, および 7 では、 $\beta$  の値を変化させても、 $\alpha$  の値は変化しない。これは、ケース 5, 6, および 7 では、 $z$  方向の変位を拘束しているために、鉛直方向の剛性を変化させても圧密挙動に変化がないことを意味している。残りの 4 ケースのうち、 $n$

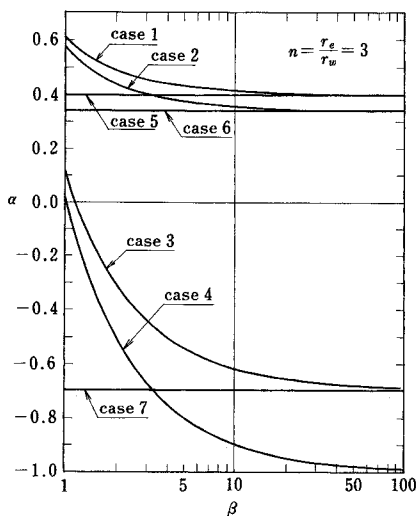


Fig. 5 Relations between increasing ratio  $\alpha$  of consolidation stress and coefficient  $\beta$  of vertical rigidity ( $n=3$ ).

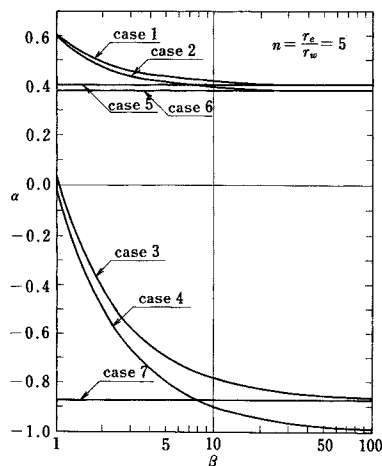


Fig. 6 Relations between increasing ratio  $\alpha$  of consolidation stress and coefficient  $\beta$  of vertical rigidity ( $n=5$ ).

を一定にして  $\beta$  を大きくすると、ケース 1 はケース 5 に、ケース 2 はケース 6 に、ケース 3 はケース 7 に漸近していく。これは、 $\beta$  が大きくなると  $z$  方向の変位が減少し、 $z$  方向の変位を拘束したケース 5, 6, 7 に類似してくるからである。たとえばケース 3 の圧密荷重  $p$  は

$$p = F_z \bar{p}_z + F_{rw} p_{rw}$$

であるが、 $\beta$  を大きくすると Fig. 7 に示すように  $F_z$  が小さく、 $F_{rw}$  が大きくなる。したがって、ケース 3 で  $\beta$  を極端に大きくすると圧密荷重  $p$  の大部分は  $p_{rw}$  となり、また、 $z$  方向の変位もほとんど発生しないので、ケース 7 の圧密に近くなる。

また、ケース 4 で  $\beta$  を大きくすると、 $\alpha$  は -1 に漸近

していく。 $\alpha$ が-1ということは、体積ひずみが生じない、すなわち、圧密変形が生じないということである。

次に、 $\beta$ を $\beta=5$ として、 $n$ と $\alpha$ の関係をみたものがFig.8である。ケース1, 4, 5は、 $n$ を大きくしても $\alpha$ は一定値で、ケース2はケース1へ、ケース3はケース4へ、ケース6はケース5へ漸近する。ケース7の $\alpha$ の値は $\beta$ に対しては変化しないので、等方性のときも

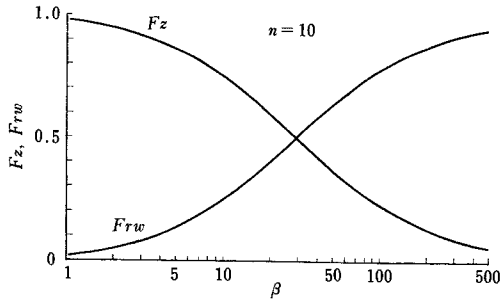


Fig. 7 Relations between the coefficient  $\beta$  and  $F_z$  and  $F_{rw}$ , in which  $F_z$  and  $F_{rw}$  are tabulated in Table 1 (case 3).

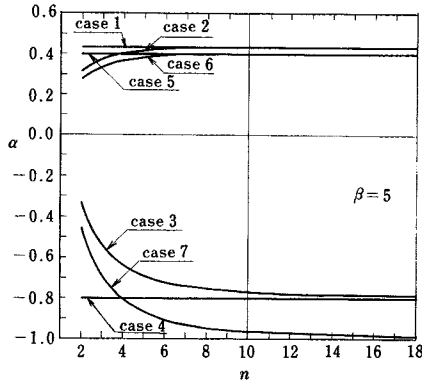


Fig. 8 Relations between increasing ratio  $\alpha$  and  $n$ , in which  $n = d_e/d_w$  ( $\beta=5$ ).

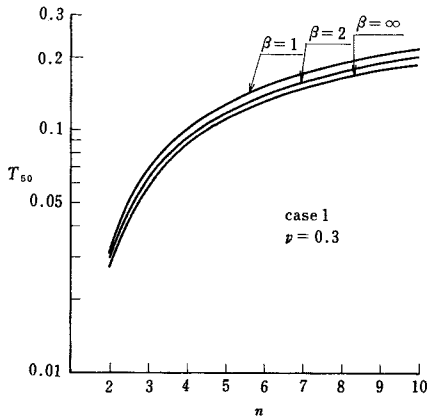


Fig. 9 Relations between  $n$  and  $T_{50}$ , which is a time factor at  $\bar{U}_c=50\%$  (case 1).

含めて Fig. 8 のように  $n$  を大きくすると  $\alpha$  が小さくなる。すなわち、ケース7の圧密では、 $n$  が大きい方が小さいものよりも常に圧密速度が速い。

さらに、 $n \rightarrow \infty$  かつ  $\beta \rightarrow \infty$  とすると、 $\alpha \rightarrow -1$  になるグループと、 $\alpha = 1 - 2\nu$  になるグループに分かれる。前者では圧密は生じず、後者では圧密は生じるが、 $p_{re}$  (外周面の圧密荷重) のみに支配される。

以上でみてきたことを、もう少し具体例で考える。圧密度50%に達するときの時間係数(式(28)で定義)を $T_{50}$ とし、 $\beta$ をパラメーターにして $T_{50}$ と $n$ の関係を調べる。Fig.9は、ケース1の $T_{50}$ と $n$ の関係を示したものである。 $\beta$ が変化しても $T_{50}$ はあまり変化しない。また、 $\beta$ が同じであれば、 $n$ が大きいときには常に圧密速度が遅い。ところがケース3の場合は、Fig.10に示すように、 $\beta$ の値により、 $T_{50}$ と $n$ の関係が大きく変化する。 $\beta$ が5程度までは、 $n$ を大きくすると圧密速度は遅くなるが、 $\beta$ が10を越えると、 $n$ を大きくしたときに圧密速度が速くなる場合がある。これは、ケース3の圧密で $\beta$ を大きくするとケース7の圧密に近づくからである。すなわち前述のように、ケース3の圧密で $\beta$ が大きくなると、 $z$ 方向の変位が減少し、内周面の荷重 $p_{rw}$ の寄与度が増大し、ケース7の圧密に近くなる。ケース4の $T_{50}$ と $n$ の関係はFig.11のようになる。 $\beta$ を大きくすると圧密速度は遅くなるが、いずれの $\beta$ でも $n$ が大きければ $T_{50}$ も大きい。以上からわかるように、鉛直方向の剛性を増したときに、 $n$ と圧密速度との関係が変わらないものと逆転するものがある。

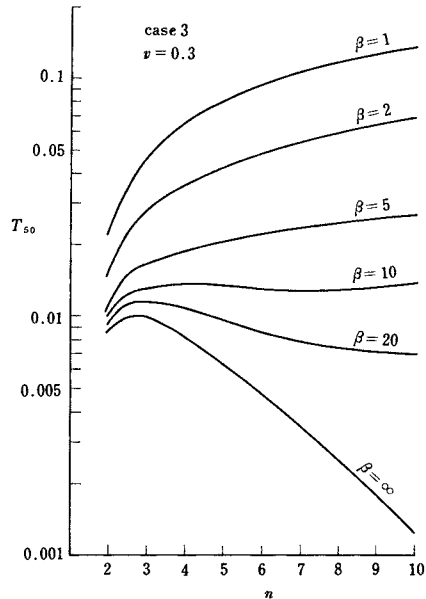


Fig. 10 Relations between  $n$  and  $T_{50}$ , which is a time factor at  $\bar{U}_c=50\%$  (case 3).

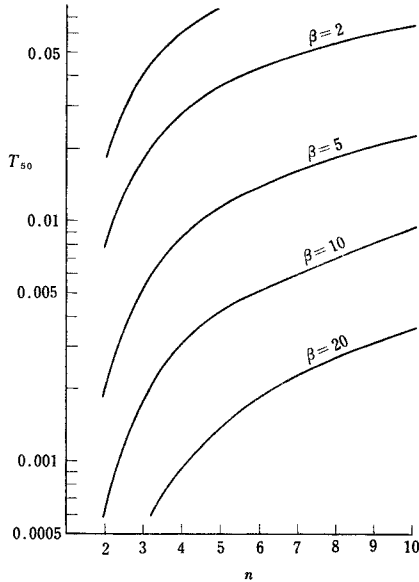


Fig. 11 Relations between  $n$  and  $T_{50}$ , which is a time factor at  $\bar{U}_c=50\%$  (case 4).

次に、実際のサンドドレーンの圧密が、ここで考えている7種類の圧密ケースのどれに近いかを考える。実際のサンドドレーン打設地盤は、いわゆる複合地盤であるので、粘土と砂柱の相互作用を考慮する必要がある。その意味では、ここで考えている7種類の变形条件は、いずれも該当しない。しかし、工学的には、サンドドレーンの圧密では砂柱の径の変化は第一近似としては無視してよいと考えられるので、7種類のケースから選ぶとすれば、ケース4が最も近いと考えられる。ケース3の圧密は内径も変化する条件になっており、現実のサンドドレーンに近いかのような印象を受けるが、ケース3の場合は内周面に荷重  $p_{rw}$  が常に作用していなければならない。実際のサンドドレーンでは内周面に荷重  $p_{rw}$  が常に作用しているわけではなく、特に鉛直方向の剛性が高く鉛直変位がほとんど発生しないときに、内周面のみが広がるような圧密形式になるとは考えられない。したがって、ケース3の圧密挙動を、サンドドレーンに共通な一般的な圧密挙動と考えることには無理がある。

最後に、圧密速度について補足しておく。この論文で述べている圧密速度は、中空円柱の平均圧密度と式(28)で定義した時間係数  $T$  の関係を表したものである。圧密度、時間係数ともに無次元量であるために、実際の感覚と少し異なるので、誤解のないように補足しておきたい。ケース4の圧密を例に説明すると、次のようになる。 $n=10$  のとき、この論文で使用している時間係数  $T$  と平均圧密度  $\bar{U}_c$  の関係を図示すると、Fig. 12 のようになる。この論文では、Fig. 12 のような関係を、 $\beta$

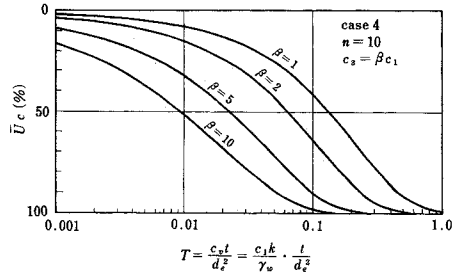


Fig. 12 Rate of consolidation which is expressed using horizontal rigidity.

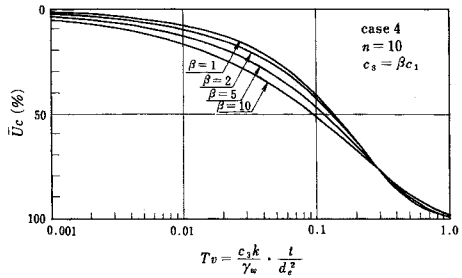


Fig. 13 Rate of consolidation which is expressed using vertical rigidity.

を大きくすると圧密速度が速くなると表現している。ところが、Fig. 12 を鉛直方向の剛性  $c_3$  を用いて無次元化した時間

$$T_v = \frac{c_3 k}{\gamma_w} \cdot \frac{t}{d_e^2} \dots \dots \dots (71)$$

を用いて書き改めると Fig. 13 のようになり、剛性比  $\beta$  と圧密速度の関係が Fig. 12 のように強調されない。

なお、Fig. 13 において、 $\beta$  を大きくするほど、すなわち  $c_3$  を固定して考えると相対的に横方向の剛性を小さくするほど圧密度が大きくなっているが、この理由は次のとおりである。異方性粘土の場合は等方性粘土と粘土内部の圧密挙動が異なるので、圧密曲線の形が変化する。たとえば、Fig. 13 に示す case 4 の圧密の場合、粘土内部のある点の体積ひずみ  $e_v$  は、

$$\text{(等方時)} \quad c_3 e_v / \bar{p}_z = 1 - u / \bar{p}_z \dots \dots \dots (72)$$

$$\text{(異方時)} \quad c_3 e_v / \bar{p}_z = 1 + (\beta - 1) \bar{u} / \bar{p}_z - \beta u / \bar{p}_z \dots \dots (73)$$

となる。したがって、最終体積ひずみ  $e_{vf}$  はいずれの場合も  $c_3 e_{vf} / \bar{p}_z = 1$  である。しかし、圧密初期では、 $\beta > 1$  (相対的に横方向剛性が小さい) の場合は、排水面に近い部分の体積ひずみが発生しすぎて、平均圧密度は等方時よりも大きくなる。このために圧密曲線の形が変化する。Fig. 13 に示す現象が発生する。

また、圧密速度が速いということは、沈下速度が速いということではない。ケース4で、 $d_e = 2\text{ m}$ 、 $H = 10\text{ m}$ 、 $c_v = c_1 k / \gamma_w = 100\text{ cm}^2/\text{day}$ 、 $c_1 = 10\text{ tf/m}^2$ 、 $\bar{p}_z = 1\text{ tf/m}^2$



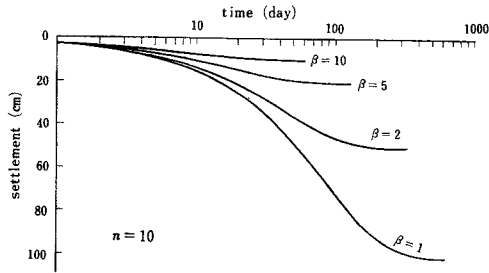


Fig. 14 Comparison of settlements (case 4).

として、表面沈下量と実時間の関係を求めると、Fig. 14 のようになる。βが大きくなると、圧密度と時間係数 T の関係で表現した圧密速度は速くなるが、沈下量は少ない。したがって、単位時間当たりの沈下量で沈下速度を定義すれば（たとえば10日間に発生した表面沈下量）、βが大きいものほど沈下速度が小さい。ケース4でβを極端に大きくすると、αは-1に近くなり、圧密はかなり速く進行するが、要は圧密変形がほとんど発生しない。

6. 結 論

この論文では、異方性中空円柱の圧密を検討し、次の結論を得た。

(1) 変位ベクトルを  $u$  とするとき、 $rot\ u=0$  となる条件の圧密の場合、異方性の影響は圧密応力の増加率  $\alpha$  のみに反映され、圧密方程式は等方性のそれと全く同じ形になる。

(2) 7種類の変形条件を有する中空円柱の圧密について検討したところ、田村が文献4)で取り扱った圧密は、外周面の変位を拘束し、中空円柱の上端面と内周面に圧密荷重を作用させる形式のものであることがわかった。この形式の圧密では、鉛直方向の剛性を増すと、中空円柱押し広げ型の圧密に近くなり、負の Mandel-Cryer 効果が生じる。そのため、 $n$  (中空円柱の外径/内径) が大きい方が圧密速度が速くなる場合がある。

(3) しかし、実際のサンドドレーンにおいて、鉛直方向の剛性が大きくて鉛直変位がほとんど発生しないときに、内径が押し広げられる圧密形式になるとは考えられないので、(2)で述べた形式の圧密挙動が通常のサンドドレーンの一般的な圧密挙動とは考えられない。

(4) 実際のサンドドレーンの圧密に近いと考えられる  $K_0$  圧密では、鉛直方向の剛性の増加は等方性の場合の  $m_v$  が減少したのと同義であり、圧密速度は速くなる。また、 $n$  が大きくなるとは、常に圧密速度が小さくなる。 $K_0$  圧密で鉛直方向の剛性を無限大にすると、 $\alpha=-1$  となって瞬時に圧密が完了するが、実は圧密変形も生じない。

補遺 式 (19)~(22) の誘導

式 (19)~(22) は以下の方法で誘導した。

(1) 境界面における応力のつり合い

(上端面) :  $\bar{\sigma}_z = \bar{p}_z = \bar{\sigma}'_z + \bar{u}$  ..... (A.1)

(内周面) :  $\sigma_r|_{r=r_w} = p_{r_w} = \sigma'_r|_{r=r_w} + u|_{r=r_w}$  ..... (A.2)

(外周面) :  $\sigma_r|_{r=r_e} = p_{r_e} = \sigma'_r|_{r=r_e} + u|_{r=r_e}$  ..... (A.3)

(2) 応力-ひずみ関係式

$\sigma'_r|_{r=r_w} = c_1 e_v - (c_1 - c_2) \epsilon_z - 2c_5 \epsilon_\theta|_{r=r_w}$  ..... (A.4)

$\sigma'_r|_{r=r_e} = c_1 e_v - (c_1 - c_2) \epsilon_z - 2c_5 \epsilon_\theta|_{r=r_e}$  ..... (A.5)

$\bar{\sigma}'_z = c_3 \bar{\epsilon}_z + c_2 (\bar{\epsilon}_\theta + \bar{\epsilon}_r)$  ..... (A.6)

(3) 圧密応力

$\varphi = c_1 e_v + u$  ..... (A.7)

また、 $\varphi$  は位置的に定数であるので

$\varphi = \bar{\varphi} = c_1 \bar{e}_v + \bar{u}$  ..... (A.8)

(4) 変位-ひずみ関係式

$\epsilon_z = \bar{\epsilon}_z = \frac{u_{zu}}{H}$  ..... (A.9)

$\epsilon_\theta|_{r=r_w} = -\frac{u_{rw}}{r_w}, \epsilon_\theta|_{r=r_e} = -\frac{u_{re}}{r_e}$  ..... (A.10)

$\epsilon_r + \epsilon_\theta = -\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r)$  ..... (A.11)

$\bar{\epsilon}_r + \bar{\epsilon}_\theta = \frac{2\pi}{\pi(r_e^2 - r_w^2)} \int_{r_w}^{r_e} r (\epsilon_r + \epsilon_\theta) dr$   
 $= -\frac{2(nu_{re} - u_{rw})}{r_w(n^2 - 1)}$  ..... (A.12)

(5) 式 (19)~(22) の誘導

式 (A.4), (A.5), (A.6), (A.8) に、式 (A.1), (A.2), (A.3), (A.7), (A.9), (A.10), (A.12) を代入すると、式 (19)~(22) を導くことができる。

参 考 文 献

- 1) Barron, R. A. : Consolidation of Fine-grained Soils by Drain Wells, Trans. ASCE, Vol.113, pp.811~835, 1948.
- 2) Cryer, C. W. : A Comparison of the Three-dimensional Consolidation Theories of Biot and Terzaghi, Q. Journ. Mech. Appl. Math., Vol.16, Part 4, pp.401~414, 1963.
- 3) Da Silveira, I. : Consolidation of a Cylindrical Clay Sample with external Radial Flow of Water, Proc., 3rd ICSMFE Vol. 1, pp.55~56, 1953.
- 4) 田村 武 : 異方性地盤におけるサンドドレーン周辺の圧密解析, 土木学会論文報告集, 第338号, pp.115~121, 1983.
- 5) Yoshikuni, H. and Kumamoto, N. : Study on the Irrotational Consolidation, Mitsubishi Heavy Industries, Ltd. TECHNICAL REVIEW, Vol.21, No.2, SER. No.20, pp.87~95, 1984.