

砂のような粒状体の構成則としてのすべりモデルの定式化と適用性

A FORMULATION OF CONSTITUTIVE EQUATION FOR GRANULAR MATERIALS LIKE SAND BASED ON SLIP MODELS AND ITS APPLICATION

飛田善雄*・加藤高之**・柳澤栄司***

By Yoshio TOBITA, Takayuki KATO and Eiji YANAGISAWA

A micromechanically based constitutive equation is formulated based on a slip model in which multi slips are assumed to take place instantaneously. The proposed multi slip model can account for many aspects of deformation characteristics of granular materials. The numerical calculation results accord well with experimental results in a qualitative manner. As a simplified version of the proposed multi slip model, 'Double slip model' is modified so as to account for the anisotropic hardening nature of granular materials. The applicability of the model is discussed to some extent from a phenomenological point of view. In order to assess the limitation of the model, the physical ground of the slip model, as a micromechanism for granular materials, is critically discussed.

1. ま え が き

本論文では、従来より、砂のような粒状体の変形挙動の微視的モデルとして考えられているすべりモデルの定式化とその適用性について論じる。現在のわれわれの限られた知識では、仮定する微視的モデルの適否を物理的観点のみから判断するのは妥当とは思われないので、本文では主に、「すべりモデルが砂のような粒状体の実験事実をどこまで表現し得るのか？」という現象論的観点から、その適用性を論じ、すべりモデルの物理モデルとしての妥当性は、最後に簡単に議論する。

砂のような粒状体の破壊時のすべり面の存在は、Coulomb 以来、知られてきたことであるが、変形挙動の表現に、すべり面の概念を用いたのは、Newland & Allely¹⁾が最初のものである。このモデルでは、①ダイレイタンスーは、すべり面から、粒子の実際の運動方向が逸脱するために生ずる。②砂のような粒状体が、個々の粒子のもつ固有摩擦角 ϕ_μ を越えても安定である。この2つの現象を説明したという点で画期的なものであ

る。これ以降、すべり面の存在を仮定する理論が発展した。たとえば、Murayama²⁾、Matsuoka³⁾らの研究を、その代表として挙げることができる。特に Matsuoka は複合滑動面⁴⁾、Matsuoka, Nakai⁵⁾は、空間滑動面(SMP)に、すべりモデルを拡張し、すべりモデルの適用性を高めた。

一方、すべり運動を基礎とする、客観性の条件を満足する、より厳密な砂の構成則は、完全流動状態について Spencer⁶⁾、ダイレイタンスーを伴うひずみ軟化時の挙動について、Mehrabadhi and Cowin⁷⁾が与えており、以下、Double Slip モデルとよぶ。Anand⁸⁾はこのモデルを単調載荷時のひずみ硬化時の変形挙動に適用している。

本論文では、Matsuoka⁴⁾のように、応力比が最大となる面(以下、最大傾度面とよぶ)のみを、すべり運動の基準面(すべり面)と考えるのではなく、他の面においても、陽に、すべり運動の基準面を設定し、すべりモデルの適用性を高めている。以下、多重すべりモデルとよぶことにする。多重すべりモデルの定式化は、多結晶金属におけるすべり運動の定式化^{9),10)}、ダイレイタンスーを含む一般の材料の定式化¹¹⁾および Double Slip モデルの定式化を参考にしながら、微小変形理論の範囲内で厳密に行っている。本論文の提案する多重すべりモデ

* 正会員 工修 八戸工業大学講師 土木工学科
(〒031 八戸市妙字大開 88-1)

** 日本鋼管株式会社(前・東北大学大学院生)

*** 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

ルの示す変形挙動は、Double Slip モデルに、適切な硬化領域を与えれば、表現できることを示し、数学的に簡単化できることを示す。提案モデルに基づく数値計算例を示し、既往の実験結果と比較し、その適用性を論ずる。

本論文は、主に、二次元的平面変形状態を対象とし、三次元応力状態の変形は、考察の章で簡単に議論するにとどめる。本文中では、特に断りのない限り、ラテン文字の繰り返し指標に関する総和規約を用いる。指標はデカルト座標系の成分を示す。土質工学の慣例に従い、圧縮を正にとる。このため、本文では、右手座標系の矢印 (Fig.1) の反対方向を正にとるものと約束する。

2. すべりモデルに基づく構成則の数学的表現

多重すべりに基づく、砂のような粒状体の構成則の数学的表現を与える。ここでは有限変形理論に基づいて、Nemat Nasser¹¹⁾が提案したダイレイタンスを有する材料の微視的構成則の変形成分、摩擦成分を限定し、微小変形理論の範囲内で定式化した。

いま、Fig.1 に示すように、潜在すべり面が、基準座標系 x_1x_2 平面内に多数存在するものとする。おのおののすべり面 α (すべり面の法線ベクトル n_i^α とすべり面に沿ってせん断力 τ^α の反対方向を有する単位ベクトル s_i^α により規定される) は与えられたひずみ履歴、現

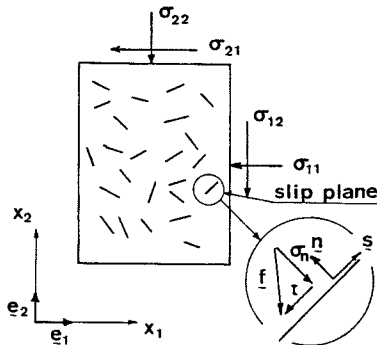


Fig.1 Concept of Multi-Slip in Plane Deformation.

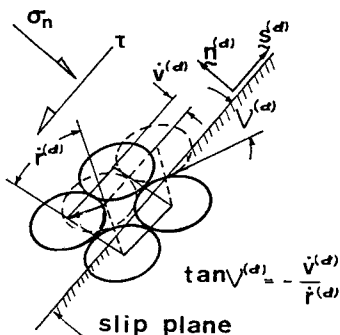


Fig.2 Slip Model for a Slip Plane.

在の応力状態により決定されるダイレイタンス係数 $\tan \nu^{(\alpha)}$ を有しているものとする。 $\tan \nu^{(\alpha)}$ は Fig.2 に示すように、粒子間の接触面に平行に生ずる実際の粒子の運動が、すべり面から $\nu^{(\alpha)}$ だけずれていることによるダイレイタンスを表現することになる。

すべり面 α がある応力条件を満足し、粒子のすべり運動が生じ、その運動が Fig.2 に示すようなダイレイタンスを伴う単純せん断変形であるとするとき、すべり面 α の2つの単位ベクトル n_i^α, s_i^α を基準ベクトルとする右手系の局所座標系 x_i^α を考える。この局所座標系 x_i^α での変形速度テンソルおよびスピテンソルは次のようになる。

$$D_{ij}^{\alpha\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}^\alpha/2 \\ \dot{\gamma}^\alpha/2 & \dot{\nu}^\alpha \end{bmatrix}, W_{12}^{\alpha\alpha} = -W_{21}^{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}^\alpha \dots (1)$$

ここに、 $\dot{\gamma}^\alpha$ は α 面上のせん断ひずみ速度、 $\dot{\nu}^\alpha$ はすべり面に垂直な方向の縦ひずみ速度を表現する。

局所座標系 x_i^α と基準座標系 x_i との間で、2階のテソルの変換公式を用い、その結果を n_i^α と s_i^α を用いて表示すると、 α すべり面上の運動は、基準座標系において、次のように表現できる。

$$\left. \begin{aligned} D_{ij}^{\alpha\alpha} &= P_{ij}^{\alpha\alpha} \dot{\gamma}^\alpha, W_{ij}^{\alpha\alpha} = \Omega_{ij}^{\alpha\alpha} \dot{\gamma}^\alpha \\ P_{ij}^{\alpha\alpha} &= \frac{1}{2} (s_i^\alpha n_j^\alpha + n_i^\alpha s_j^\alpha - 2 \tan \nu^{(\alpha)} n_i^\alpha n_j^\alpha) \\ \Omega_{ij}^{\alpha\alpha} &= \frac{1}{2} (s_i^\alpha n_j^\alpha - n_i^\alpha s_j^\alpha), \end{aligned} \right\} \dots (2 \cdot a, b, c)$$

ここに、 $\tan \nu^{(\alpha)} = -\dot{\nu}^\alpha / \dot{\gamma}^\alpha$ を用いている。

また、 $D_{ij}^\alpha, W_{ij}^\alpha$ は、すべり運動による変形速度テンソル、スピテンソルを示す。考えている領域内で N 個のすべりが生じたとき、基準座標系における $D_{ij}^\alpha, W_{ij}^\alpha$ はその総和として、次のように与えられる。

$$D_{ij}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^N P_{ij}^{\alpha\alpha} \dot{\gamma}^\alpha, W_{ij}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \Omega_{ij}^{\alpha\alpha} \dot{\gamma}^\alpha \dots (3 \cdot a, b)$$

変形速度テンソル D_{ij} 、スピテンソル W_{ij} は、すべり運動による成分 (P をつけて記す) と、全体として適合条件を満足させるように生ずる成分 (e をつけて記し、弾性成分とよぶ) の和として与えられる。

$$\left. \begin{aligned} D_{ij} &= D_{ij}^e + D_{ij}^\alpha, W_{ij} = W_{ij}^e + W_{ij}^\alpha \\ D_{ij} &= (v_{i,j} + v_{j,i})/2, W_{ij} = (v_{i,j} - v_{j,i})/2 \end{aligned} \right\} \dots (4 \cdot a, b)$$

ここに、 v_i は粒子の速度を示し、 \cdot は偏微分を示す。

客観性の条件を満足する Jaumann の応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}^e$ と弾性的変形速度 D_{ij}^e の間に、次のような線形関係を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}^e &= L_{ijnk}^e D_{nk}^e \\ \dot{\sigma}_{ij}^e &= \dot{\sigma}_{ij} - W_{ik}^e \sigma_{kj} + \sigma_{ik} W_{kj}^e \end{aligned} \right\} \dots (5 \cdot a, b)$$

ここに、 \cdot は物質微分を示し、 L_{ijnk}^e は、その瞬間にお

注1) $\nu^{(\alpha)}$ は、その接点に作用する応力比が全体的なすべり面上の応力比よりも減少するとき正とする。

ける弾性スティフネスであり、一般には、拘束圧依存性、ひずみ履歴依存性を有する。

式 (4・a), 式 (3・a) を式 (5・a) に代入して,

$$\dot{\sigma}_{ij}^e = L_{ijkl}^e D_{kl} - L_{ijkl}^e \sum_{\alpha=1}^N P_{kl}^{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha} \dots\dots\dots (6)$$

さらに全体の運動に対して、客観性の条件を満足する Jaumann の応力速度 $\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - W_{ik}\sigma_{kl} + \sigma_{ik}W_{kj}$ を用いて式 (6) より $\dot{\sigma}_{ij}^e$ を消去すると,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = & L_{ijkl}^e D_{kl} - L_{ijkl}^e \sum_{\alpha=1}^N P_{kl}^{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha} \\ & - \sum_{\alpha=1}^N (\omega_{ik}^{\alpha} \sigma_{kj} - \sigma_{ik} \omega_{kj}^{\alpha}) \dot{\gamma}^{\alpha} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに、 $\|L_{ijkl}^e\| \cong 10^2 \sim 10^3 \|\sigma_{ij}\|$ であり、式 (3) より $\|W_{ij}^e\|$ は $\|D_{ij}^e\|$ と同程度の値であるから式 (7) の右辺第3項は無視できる。ここに $\|\cdot\|$ はノルムを示す。さらに、スピントensorが微小であるとすれば、 $\dot{\sigma}_{ij} \cong \dot{\sigma}_{ij}$ となり、式 (7) は微小変形理論の範囲内で、次のようになる。

$$\dot{\sigma}_{ij} = L_{ijkl}^e D_{kl} - L_{ijkl}^e \sum_{\alpha=1}^N P_{kl}^{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha} \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) において、 $\dot{\gamma}^{\alpha}$ を応力速度、あるいは変形速度を用いて記述すれば、構成式が得られることになる。

いま、各面でのすべり運動の生ずる条件を与える。

$$f^{\alpha} = \tau^{\alpha} - \eta^{\alpha} \sigma^{\alpha} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\tau^{\alpha} = \sigma_{ji} n_j^{\alpha} s_i^{\alpha}$, $\sigma^{\alpha} = \sigma_{ji} n_j^{\alpha} n_i^{\alpha}$, $\eta^{\alpha} = \tan \phi^{\alpha}$ であり、構造変化を加味した摩擦による抵抗を表現する。すべり運動の継続のために、塑性論の適合条件に相等する次の条件が満足される必要がある。

$$\dot{\tau}^{\alpha} - \eta^{\alpha} \dot{\sigma}^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^N h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{\beta} \dots\dots\dots (10)$$

いま、すべり面自身は運動しないものとすれば、 $\dot{n}_i^{\alpha} = \dot{s}_i^{\alpha} = 0$ であるから、式 (10) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_{ji} q_{ji}^{\alpha} &= \sum_{\beta=1}^N h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{\beta} \\ q_{ji}^{\alpha} &= (n_j^{\alpha} s_i^{\alpha} - \eta^{\alpha} n_j^{\alpha} n_i^{\alpha}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

式(11)における右辺の $h^{\alpha\beta}$ は、ひずみ硬化率を表現し、 $\alpha = \beta$ のときは、すべり面自身のすべり運動による硬化を表現し、 $\beta \neq \alpha$ のときは、他のすべり面 β 上のすべり運動による α すべり面上の潜在硬化を表現する。

塑性ひずみ速度の発生に関する条件は、せん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}^{\alpha}$ を用いて、次のようにまとめられる。

$$\dot{\gamma}^{\alpha} > 0, f^{\alpha} = 0, \dot{\sigma}_{ij} q_{ij}^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^N h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{\beta} \dots\dots\dots (9), (11)$$

$$\dot{\gamma}^{\alpha} = 0, f^{\alpha} = 0, \dot{\sigma}_{ij} q_{ij}^{\alpha} < \sum_{\beta=1}^N h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{\beta} \dots\dots\dots (12)$$

$$\dot{\gamma}^{\alpha} = 0, f^{\alpha} = 0, \dot{\sigma}_{ij} q_{ij}^{\alpha} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\dot{\gamma}^{\alpha} = 0, f^{\alpha} < 0 \dots\dots\dots (14)$$

式 (12), (13), (14) は、塑性論の用語に従えば、それぞれ除荷、中立負荷、弾性状態に対応する。

式 (8), (11) より、 $\dot{\gamma}^{\alpha}$ を変形速度により表現し、

変形速度より応力速度を求めることもできるが、通常の変力空間に基礎を置く塑性論(応力速度より変形速度を求める)との関連性を考える。いま、式 (5) の逆関係式を

$$D_{ij}^e = C_{ijkl}^e \dot{\sigma}_{kl} \dots\dots\dots (5')$$

と表現し、さらに式 (4・a), 式 (3・a) を用いると

$$D_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\sigma}_{kl} + \sum_{\alpha=1}^N P_{ij}^{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha} \dots\dots\dots (15)$$

式 (11) の右辺の $[h^{\alpha\beta}]$ の逆マトリックスを $[M^{\alpha\beta}]$ と表現するとき

$$\dot{\gamma}^{\alpha} = [M^{\alpha\beta}] q_{kl}^{\beta} \dot{\sigma}_{kl}, [M^{\alpha\beta}] = [h^{\alpha\beta}]^{-1} \dots\dots\dots (16)$$

式 (16) を式 (15) に代入して,

$$D_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\sigma}_{kl} + \sum_{\alpha=1}^N P_{ij}^{\alpha} [M^{\alpha\beta}] q_{kl}^{\beta} \dot{\sigma}_{kl} \dots\dots\dots (17)$$

と求められることになる。

式 (17) と次式で示される塑性論に基づく変形挙動の定式化の関連性について簡単に考察する。

$$D_{ij} = \left(C_{ijkl}^e + \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right) \dot{\sigma}_{kl} \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 C_{ijkl}^e :弾性コンプライアンス、 h :硬化係数、 g :塑性ポテンシャル、 f :降伏(負荷)関数、である。式 (17) と (18) を比較すると、 P_{ij}^{α} が塑性ポテンシャルの対応する応力成分の偏微分と関連し、 $[M^{\alpha\beta}]$ が硬化係数と関連し、 q_{kl}^{β} が降伏関数の対応する応力成分の偏微分と関連することは明らかである。

いま、1つのすべり面の運動のみを取り出して考えると、降伏条件式 (9) の偏微分は

$$\partial f^{\alpha} / \partial \sigma_{ij} = n_j^{\alpha} s_i^{\alpha} - \eta^{\alpha} n_j^{\alpha} n_i^{\alpha} = q_{ji}^{\alpha} \dots\dots\dots (19)$$

で与えられ、対応する P_{ij}^{α} は式 (2・c) により与えられる。このモデルでは、 η^{α} は面に作用している応力比を表現し、 $\tan \nu^{\alpha}$ は粒子運動がすべり面に対して、どの程度ずれているかを示すパラメーターであり、 $\eta^{\alpha} = \tan \nu^{\alpha}$ である。以上より、ここで考えたすべりモデルは関連流動則は満足しないことがわかる。

3. 各すべり面の独立性を考えた構成則

前章で導かれた一般式について、本章では、最も単純な場合である、各すべり面が独立に運動・硬化し、せん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}^{\alpha}$ 、ダイレイタンス係数 $\tan \nu^{\alpha}$ が、その面における応力比のみの関数である場合について定式化する。応力比のみにより、 $\dot{\gamma}^{\alpha}$ 、 $\tan \nu^{\alpha}$ が決定されるということは、すべり面に作用する応力比が最大主応力軸に関して対称であることを考えると、材料の対称軸が最大主応力軸と一致する場合を想定することに等しいことがわかる。主応力軸の回転まで含めて考える場合、このことが常に成立するためには、結局、この定式化は等方体を考えていることになる。なお、以下の定式化では、すべり面は各方向に等しく分布し、各すべり面に付

随する領域は、方向によらず、すべて等しいと考えている。

(1) 硬化則について

現在のわれわれの粒状体の微視的運動に関する知識が十分でないことを考えると、多数のすべり面の存在を仮定する場合、数学的複雑さを避けるために、各すべり面が独立な硬化挙動を示すと考えるのが妥当のように思われる。このとき、式 (11) における h^{ab} は、

$$h^{ab} = h_0 \delta^{ab} \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 δ^{ab} はクロネッカーのデルタであり $\delta^{aa}=1(a=\beta)$ 、 $\delta^{ab}=0(a \neq \beta)$ である。このとき、式 (17) は、

$$D_{ij} = [C_{ijkl}^c + \sum_{\alpha=1}^N P_{ij}^{\alpha} \frac{1}{h_0^{\alpha}} q_{kl}] \dot{\sigma}_{kl} \dots\dots\dots (21)$$

と簡単化できることになる。

いま、各すべり面でのひずみ硬化特性を、各すべり面に対し、共通に、

$$\eta^{\alpha} = \dot{\gamma}^{\alpha} \dots\dots\dots (22)$$

と与えるとき、すべり変形が継続するためには、

$$\dot{\tau}^{\alpha} - \dot{\sigma}^{\alpha} \eta^{\alpha} \equiv \dot{\sigma}_{ij} q_{ij}^{\alpha} = \sigma^{\alpha} \dot{\eta}^{\alpha} \dots\dots\dots (23)$$

が成立しなければならない。式 (10)、(20) と式 (23) を比較して、

$$h_0^{\alpha} = \sigma^{\alpha} \frac{\dot{\eta}^{\alpha}}{\dot{\gamma}^{\alpha}} = \sigma^{\alpha} \frac{\partial \eta^{\alpha}}{\partial \gamma^{\alpha}} \dots\dots\dots (24)$$

であることがわかる。

高応力比を受けるすべり面においては、多数の粒子がすべりの条件を満足し、かつ1個のすべる距離も長くなるものと思われる。この効果を取り入れるために、各すべり面での応力比とせん断ひずみの間に、次式のような双曲線関係を仮定する。

$$\eta^{\alpha} = \frac{\gamma^{\alpha}}{a + b\gamma^{\alpha}} \dots\dots\dots (25)$$

(2) $\tan \nu^{\alpha}$ の移行則について

いま、Fig. 3 に示すように、すべり面 α 上に、 τ^{α} 、 σ^{α} なる平均的接線および垂直応力成分が作用している、2組の粒子の接触状態を考える。Fig. 3 より明らかなよう

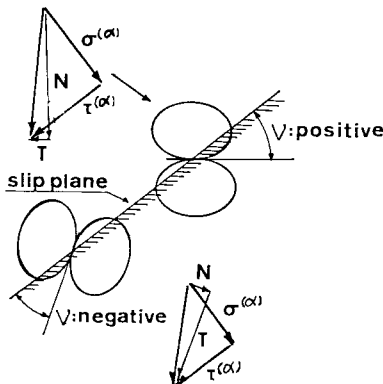


Fig. 3 Definition of Dilatancy Angle.

に、正のダイレイタンシー角を有する接点においては、粒子接触面に作用する接線成分 T と垂直成分 N の比 (T/N) は、平均的応力比 ($\tau^{\alpha}/\sigma^{\alpha}$) よりも低い。逆に、負のダイレイタンシー角を有する接点では、(T/N) は ($\tau^{\alpha}/\sigma^{\alpha}$) よりも高いことになる。実際に、すべりを生じる接点では、接触面に作用する応力比は、粒子間固有摩擦角で与えられる応力比: $\tan \phi_{\mu}$ に等しくなっているものと考えることができる。その関係は、次のように与えられる¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \tan \phi_{\mu} &= \tan (\phi^{\alpha} - \nu^{\alpha}) \\ \tan \phi^{\alpha} &= \tau^{\alpha} / \sigma^{\alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

式 (26) より、負のダイレイタンシー角を有する接点が始まり、低応力比状態ですべり、すべり運動に伴い、粒子の接触状態が、正のダイレイタンシー角をもつように変化し、ひずみ硬化が生じるものとする (この仮定の是非については考察の章を参照)。この構造変化により、高応力比状態で、すべりを生ずる接触面でのダイレイタンシー角は正となり、式 (2) において対角項をとれば、 $D_{kk}^p < 0$ となり、正のダイレイタンシーが生ずることになる。

すべり面上においては、粒子間力の不均一性のためにさまざまなダイレイタンシー角をもつ粒子が運動すると考えられるが、ここでは簡単に、ダイレイタンシー係数は、式 (26) により与えられるものとする。すなわち、

$$\nu^{\alpha} = \phi^{\alpha} - \phi_{\mu} \dots\dots\dots (27)$$

注意すべきことは、式 (27) における ν^{α} は、すべる粒子の平均的なダイレイタンシー角を表わすものであり、その面におけるすべての粒子の平均のダイレイタンシー角を与えるものではないことである。もし、式 (17) に使用するダイレイタンシー係数 $\tan \nu^{\alpha}$ をすべての粒子のダイレイタンシー角の平均と考えれば、最大主応力軸方向に接点が卓越する構造を考えたとき、すべてのすべり面において、粒子の平均的ダイレイタンシー角は常に正であり、変形初期の負のダイレイタンシーが表現できないことになる。

ここに得られた式を整理して再録すると、

$$\left. \begin{aligned} D_{ij} &= D_{ij}^c + D_{ij}^p \\ D_{ij}^p &= \sum_{\alpha=1}^N P_{ij}^{\alpha} \frac{a}{(1-b\eta^{\alpha})^2} \dot{\eta}^{\alpha} \\ P_{ij}^{\alpha} &= \frac{1}{2} (s_i^{\alpha} n_j^{\alpha} + n_i^{\alpha} s_j^{\alpha} - 2 \tan \nu^{\alpha} n_i^{\alpha} n_j^{\alpha}) \\ \nu^{\alpha} &= \phi^{\alpha} - \phi_{\mu}, \phi^{\alpha} = \tan^{-1} (\tau^{\alpha} / \sigma^{\alpha}) \\ \eta^{\alpha} &= \tan \phi^{\alpha}, \tau^{\alpha} = \sigma_{ji} n_j^{\alpha} s_i^{\alpha}, \sigma^{\alpha} = \sigma_{ji} n_j^{\alpha} n_i^{\alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 n_i^{α} 、 s_i^{α} は、 α すべり面の法線ベクトル、およびすべり運動に反対方向のすべり面に沿う単位ベクトルを表現する。ただし、式 (28) は等方体に関する定式化であることを、もう一度、注意しておく。

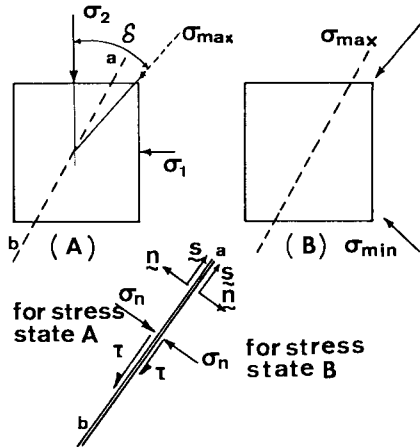


Fig. 4 Reverse Shearing during Rotation of Principal stress axes.

(3) すべり面の逆向きせん断について

最大主応力軸が回転する場合のすべり面の運動について、次に考察する。このとき、Fig. 4 に示す δ の角度の範囲内に存在するすべり面は、逆向きせん断力 τ を受けることになり、逆向きの運動が生ずることになる。このとき、もし粒状体が、現在までの応力履歴の中で、正のダイレイタンスを生ずるような応力を受けていなければ、せん断による構造変化は大きくないと考えることができるので、逆方向のせん断応力に対しても、処女載荷時のすべり運動と全く同一の運動をすると、近似的に考えることができる。

もし、応力履歴の中で、高応力比を受けていると、粒状体の内部構造は、初期のものとは全く異なるので、処女載荷時とは異なる硬化式、ダイレイタンス係数式を指定する必要がある (5. の計算例参照)。

ちなみに、三軸圧縮・伸張試験のように、最大主応力軸が 90° 回転する場合には、すべてのすべり面で逆向きのせん断が生じることになる。

(4) 多重すべりモデルのもたらす降伏曲面について

各方向に等しくすべり面が存在する場合について、多重すべりモデルが、応力空間上にどのような降伏曲面を描くかについて考察する。

いま、基準座標系に、主応力が作用し、平均主応力一定のもとで、ある応力比まで作用させた状態を考える。主応力 $\sigma_2, \sigma_1 (\sigma_2 > \sigma_1)$ を用いて、

$$P_0 = (\sigma_2 + \sigma_1)/2, q_0 = (\sigma_2 - \sigma_1)/2 \dots\dots\dots (29)$$

とおく。次に、この応力比を減少させ、再び $\sigma_2 = \sigma_1$ の状態に戻す (等方応力状態は弾性であるとする)。主応力軸を δ だけ、基準座標系よりずらして載荷する。そのときの主応力を $\sigma_2^*, \sigma_1^* (\sigma_2^* > \sigma_1^*)$ と記し、

$$P^* = (\sigma_2^* + \sigma_1^*)/2, q^* = (\sigma_2^* - \sigma_1^*)/2$$

とおくとき、この応力系の最大傾度面の応力比は、

$$\frac{\tau^*}{\sigma^*} = \frac{q^* \cos \phi}{P^* - q^* \sin \phi}, \phi = \sin^{-1}(q^*/P^*) \dots\dots\dots (30)$$

と与えられる。主軸の回転が生ずる場合には、多重すべりモデルでは、前述したように、必ず逆方向のすべり運動が生ずるが、 δ が小さいとき、この寄与は大きくないのでこれを無視する。式 (30) による最大傾度面は、基準座標系に対して、 $\theta = 45^\circ + \phi/2 - \delta$ および $\theta = 135^\circ - \phi/2 - \delta$ の角度を有する。この2つの面が式 (29) による主応力系で受けた応力比は、 ϕ, δ を用いて、次のようになる。

$$\frac{\tau_0}{\sigma_0} = \frac{q_0 \cos(\phi \mp 2\delta)}{P_0 - q_0 \sin(\phi \mp 2\delta)} \dots\dots\dots (31)$$

式 (31) 中、 2δ の前につく (-) は $\theta = 45^\circ + \phi/2 - \delta$, (+) は $\theta = 135^\circ - \phi/2 - \delta$ の面に関連する。

$(\tau^*/\sigma^*) \leq (\tau_0/\sigma_0)$ の条件が、弾性的変形を与える応力領域を表わすものと考え、次のような関係式が得られる (両者の面について同じである)。

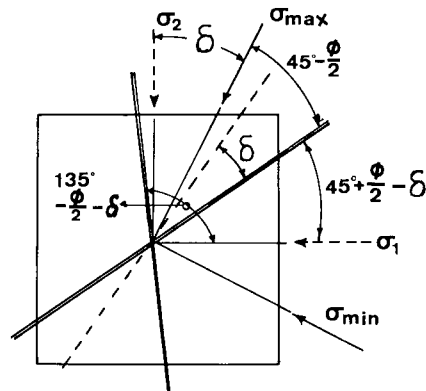


Fig. 5 Maximum obliquity plane during Rotation of Principal stress axes.

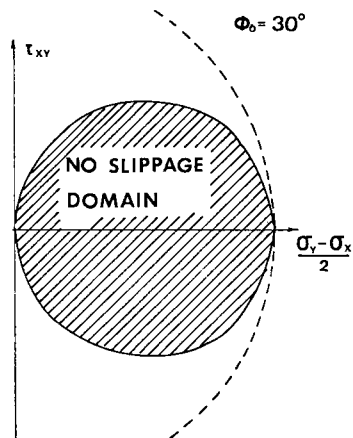


Fig. 6 No Slippage Domain derived from Multi-Slip Model.

$$\delta \leq \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{\sin \phi}{\sin \phi_0} \right) \dots \dots \dots (32)$$

ここに、 $\sin \phi = q^*/P^*$ 、 $\sin \phi_0 = q_0/P_0$

平均主応力を一定に保つものとするれば、式 (32) の右辺の項は $1/2 \cos^{-1}(q^*/q_0)$ となり、偏差応力面上で、これを図示することができる。式 (32) は、 q^* が与えられたとき、弾性的変形を示す δ の範囲を示すことができる。 $\phi_0 = 30^\circ$ の場合について、この関係を図示したのが Fig. 6 であり、多重すべりモデルは異方的硬化を示すことがわかる。Fig. 6 における破線は、等方硬化の仮定による降伏曲面を示している。

$\delta = 45^\circ$ において、硬化が消失するのは、 $\delta \geq 45^\circ$ では最大傾度面が常に逆方向のせん断を受けることに対応している。式 (32) は、逆方向せん断による運動が小さいという仮定のもとに導かれた式であるが、 δ が大きくなれば、多数の面が逆向きせん断を受け、この影響は無視し得なくなる。ゆえに δ が大きいときは、Fig. 6 に示す曲面より、さらに内側に、弾性的変形を与える曲面が形成されるものと思われる。

多重すべりモデルの具体的計算例を示す前に、次章において、多重すべりモデルを数学的に単純化する目的で、Double-Slip モデルの基本的特性を議論する。

4. 多重すべりモデルと Double Slip モデルの関係

Double Slip モデルの簡単な紹介を行い、その基本的特性を論じた後、多重すべりモデルとの関係について考察する。

粒状体の変形後期に示す完全流動状態について、Mohr-Coulomb の降伏条件による 2 つの応力特性曲線を速度特性曲線とする理論が Spencer⁶⁾ より導かれた。以下、これを Double Slip モデルとよび、DS モデルと略記する (Double shearing モデル、Double sliding モデルとよばれることがある)。

Spencer の理論は、完全流動状態についてのものであるから、ダイレイタンスーは考慮されなかった。この理論に、Mehrabadi and Cowin⁷⁾ により、ダイレイタンスー特性が取り入れられ、ひずみ軟化時の構成則が与えられた。Anand⁸⁾ は、この Mehrabadi と Cowin によるモデルを、等方硬化理論を用いて、ひずみ硬化時の変形挙動に適用した。Anand においては、速度特性曲線が応力特性曲線に一致するという仮定は用いず、単に、最大主応力軸より $45^\circ - \xi/2$ をなす角に、速度特性曲線が存在すると仮定され、一般性をもたせた。

本論文における議論は、ひずみ硬化時の変形挙動に限定しているため、Anand のモデルを取り上げることにする。

Anand の DS モデルにおいては、最大主応力軸より $45^\circ - \xi/2$ をなす面が速度特性曲線であり、ダイレイタンスーを伴う単純せん断変形が生じている、と考えている。このとき、主応力軸を基準座標系とする変形速度成分は、 $\theta = 45^\circ + \xi/2$ を式 (2) に代入して、次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^{\alpha} &= \frac{-1}{2 \cos \nu^{\alpha}} [\cos (\xi - \nu^{\alpha}) + \sin \nu^{\alpha}] \dot{\gamma}^{\alpha} \\ D_{12}^{\alpha} &= \frac{\pm 1}{2 \cos \nu^{\alpha}} [\sin (\xi - \nu^{\alpha})] \dot{\gamma}^{\alpha} \\ D_{22}^{\alpha} &= \frac{1}{2 \cos \nu^{\alpha}} [\cos (\xi - \nu^{\alpha}) - \sin \nu^{\alpha}] \dot{\gamma}^{\alpha} \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

ここに、 $\alpha (\alpha = 1, 2)$ は、最大主応力軸に対称な 2 つの速度特性曲線を表現している。 D_{12} 成分の±は、2 つの面で符号が異なることを示す。

DS モデルは式 (33) より明らかのように、2 つの速度特性曲線上のせん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}^{\alpha}$ 、ダイレイタンスー係数 $\tan \nu^{\alpha}$ が異なれば、主応力座標系で、 $D_{12} \neq 0$ であるから、一般には、 \mathbf{D} と $\boldsymbol{\sigma}$ の共軸性は成立しない。

2 つの応力比に関しては等価な、すべり面上の $\dot{\gamma}^{\alpha}$ 、 $\tan \nu^{\alpha}$ が異なるという状況は、初期異方性の変形特性に与える影響、あるいは、高い応力比を受けた粒状体が主応力軸の回転を受けた場合に生ずる。このような場合、一般に共軸性は成立しないことになる。

以上のことより、等方体を対象とする 3. の定式化では厳密にいえば、主応力軸回転時の塑性変形挙動は表現できないことがわかる。しかし、多重すべりモデルの大事な特徴は、異方的硬化特性をもち、主応力回転時の塑性変形を与える点にあるので、5. の計算例では、低応力比状態からの主応力軸回転時の変形挙動のシミュレーションを行っている。

DS モデルについても、われわれは $\dot{\gamma}^{\alpha}$ 、 $\tan \nu^{\alpha}$ が応力比のみの関数であるという仮定を用いる。すなわち、等方体を対象とし、式 (33) の D_{12} 成分は常に 0 である場合について構成則を与える。DS モデルにおける速度特性曲線は、主応力軸の回転とともに同じ角度回転する。

このため、主応力軸とともに回転する座標系の変形速度成分は、常に主値を取り、式 (33) により与えられる。一般座標系における変形速度成分は、この主値を座標変換することにより求めることができる。

多重すべりモデルと DS モデルの関連について考える。DS モデルにおける 2 つの速度特性曲線上のすべり運動は、多重すべりモデルの各すべり面上の運動が平均的に与えられたものと考えることができる。また、多重すべりモデルのもつ異方的硬化特性は、Fig. 7 に示すように、2 つの速度特性曲線に、異方的硬化領域を与えれば、近似的に表現できることになる。たとえば、次のような関数が考えられる。

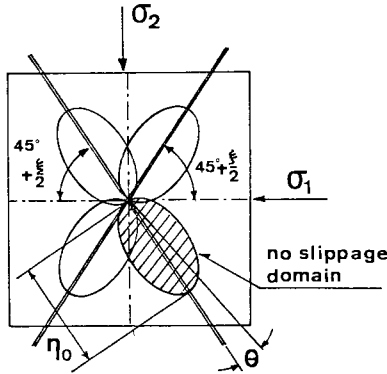


Fig.7 Double Slip Model with Anisotropic Hardening Region.

$$\eta = \eta_{max}(1 - \cos A\theta) \dots \dots \dots (34)$$

ここに、 η_{max} は供試体内に発生する最大応力比であり、 θ は速度特性曲線 の方向からの角度を表現する。A の値がひずみ履歴の関数であるとすれば、主応力回転時の塑性変形に伴う硬化が近似的に表現できることになる。

このように、異方硬化特性を与えた DS モデルを用いることにより、多重すべりモデルのもつ特徴を失うことなく、簡単化できることになる。次章の計算例では、DS モデルの硬化式として、式 (25)、式 (34) を採用した。ただし、速度特性曲線上の応力比は最大応力比 η_{max} を用いた。ダイレイタンスー係数 $\tan \nu^\alpha$ は式 (27) により計算した。多重すべりモデルと DS モデルに使用した式 (25) a の値は、両モデルが同程度の初期せん断定数を与えるように決定した。

5. 数値計算例

本章の計算例では、弾性変形の大きさは無視している。以下、多重すべりモデルと DS モデルを比較して計算例を示すことにする。計算を行った応力経路に対して、実験結果との比較を行うために、代表的実験結果を既往の文献より引用する。本計算例は平面変形に関するものであり、必ずしも実験結果との対応は良好ではない。ゆえに、比較は定性的観点から行うことにする。

多重すべりモデルは、5° ごとに1つのすべり面を考え、 $0 < \theta < 180^\circ$ に36個のすべり面を与えた。すべり面の運動は、最小主応力軸について対称であるので、領域の半分のみを計算すればよい。計算に用いたパラメーターの値は図中に示すことにする。

Fig. 8, Fig. 9 は多重すべりモデルと DS モデル ($\phi = 30^\circ$) の平均主応力一定試験の単調載荷時の応力比-ひずみ-ダイレイタンスー関係を示している。変形初期における負のダイレイタンスー、変相線を越えた後のダイレイタンスー挙動が表現されている (この結果はよく知ら

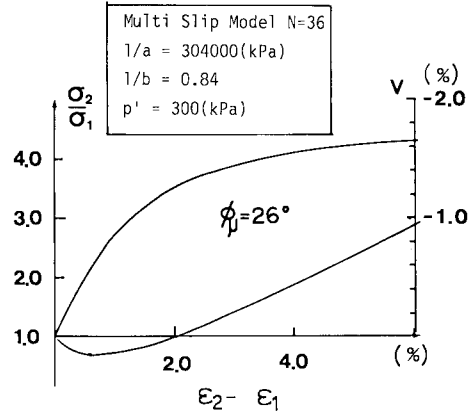


Fig.8 Stress Strain Relationship based on Multi Slip Model.

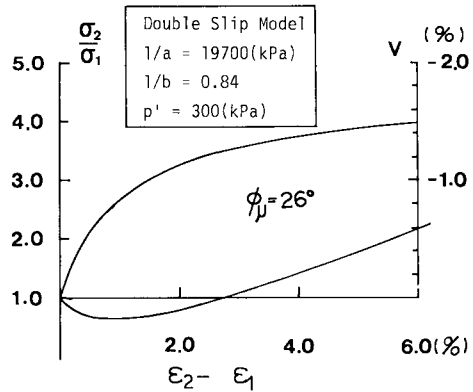


Fig.9 Stress strain Relation based on Double Slip Model.

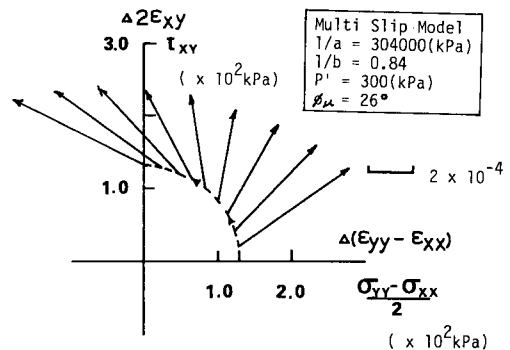


Fig.10 Strain Increments during Rotation of Principal Stress Axes based on Multi Slip Model.

れている事実であるから、実験結果との比較は行わない)。

Fig.10, Fig.11 は主応力比を一定に保ったまま、主応力軸回転時の、10° ごとにのひずみ増分ベクトルを示している。Fig.12 は、中空ねじり三軸試験器を用いた東畑¹³⁾の実験結果を引用したものである。多重すべりモデルでは、ひずみ増分ベクトルが、応力ベクトル (現在の

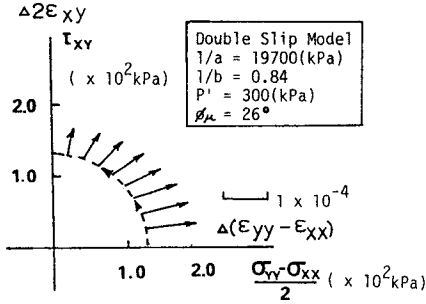


Fig. 11 Strain Increments during Rotation of Principal stress Axes based on Double Slip Model.

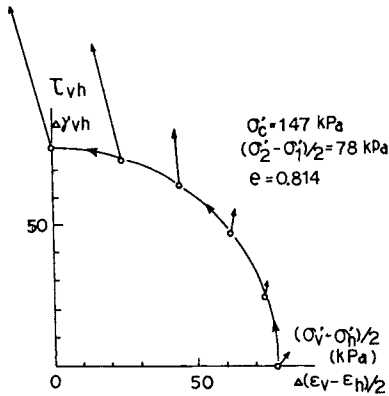


Fig. 12 Strain Increments during Rotation of Principal Stress Axes (Experimental results, Towhata¹³⁾).

応力と原点を結んだベクトル)から、応力増分ベクトルの方向に、ずれるという実験結果が表現されているのに対して、DSモデルではこのことが表現されていない。これは、多重すべりモデルでは、主応力軸の回転を受けると、逆向きのすべり運動を示す面が存在するとしているのに対して、DSモデルでは、常に最大主応力軸に対称な変形速度が生ずると仮定しているためである。このことより、応力と変形速度の共軸性を仮定するモデルでは、主応力回転時の変形挙動を、定性的にも、表現し得ないことがわかる。

Fig. 13は応力振幅が大きい場合の繰り返し载荷時のダイレイタンスー挙動をDSモデルによりシミュレーションしたものである。Fig. 14は、Tatsuoka and Ishihara¹⁴⁾による三軸圧縮・伸張試験の結果である。この場合、最大主応力軸は90°回転することになる。速度特性曲線は最大主応力方向より45°-ξ/2 (ξ=30°)に、σ₂>σ₁, σ₁>σ₂の応力状態について、別個に存在するものとして計算した。

応力振幅が大きい場合、σ₂>σ₁の载荷により、σ₁>σ₂ですべり運動を生ずる速度特性線の構造が変化する(σ₂>σ₁の载荷に抵抗するため、この面でも正のダイレ

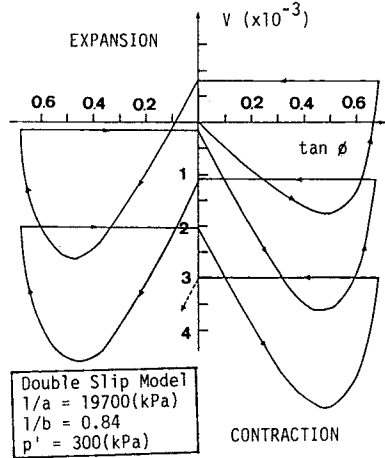


Fig. 13 Volumetric Strain in Large Reverse Loading based on Double Slip Model.

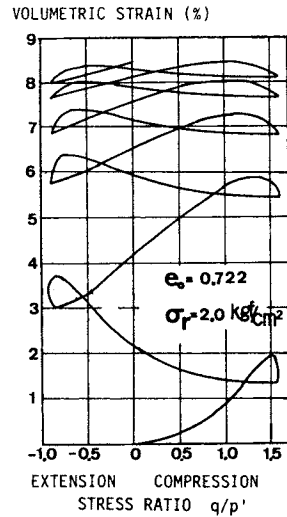


Fig. 14 Volumetric Strain in Large Reverse Loading (Experimental Results, Tatsuoka & Ishihara¹⁴⁾).

イタンシー角をもつ接点が増える。このことは、σ₁>σ₂に対しては、負のダイレイタンスー角をもつ接点が増えることを意味する)。このため、σ₁>σ₂の状態では、多くの粒子が、すべりの条件を満足するために、せん断ひずみ速度が、処女载荷時よりも大きいことになる。このことを考慮するため、式(25)における1/aの値を便宜的に処女载荷時の1/aの1/2として、2回目以降の载荷の計算を行った。ただし、速度特性線上の構造変化によるすべりやすさの影響は、正のダイレイタンスーが現われた時点で消失し、以後は、処女载荷時の硬化式に従うものとした。

計算値と実験値を比較して容易に理解できるように、実験では、除荷時に負のダイレイタンスーが生ずるのに

対して、計算値では、全くダイレイタンスー変化は生じない。このことは、すべりモデルによる硬化特性が応力比で支配され、除荷過程では、両すべり面とも応力比が減少するため、塑性変形が生じないことを考えれば明らかである。

このように、すべり面におけるすべり運動のみを考えた場合は、除荷時の負のダイレイタンスーは説明できないことになる。このことについても、考察の章で議論する。

6. 考 察

この章では、(1)において、提案した多重すべりモデルおよびDSモデルの三次元応力状態への適用性、繰り返し載荷時の除荷時の負のダイレイタンスーの表現の可能性、異方体への適用について論じる。(2)においては、最近の粒状体力学の知見に基づいて、提案したすべりモデルの物理モデルとしての妥当性について論じる。

(1) 提案モデルの適用性の拡張について

前章までの議論は主に、二次元的平面変形状態に関するものであったが、多重すべりモデルの式(14)、式(17)は三次元応力状態でも、数学的には成立する。平面変形と三次元変形の異なる点は、三次元変形の場合、すべり面が三次元的分布をもつことである。すべり面の法線ベクトルが、中間主応力方向の成分をもてば、降伏・破壊挙動は中間主応力の影響を受けることになる。たとえば、松岡・中井のSMP面は中間主応力方向の成分を有するすべり面である。このように、すべり面の適切な分布を与えることができれば、三次元状態への拡張は難しくない。

三次元への拡張を考える場合にも、異方硬化特性をもつDSモデルは、その数学的簡便さから有利である。

計算例で示したように、提案したすべりモデルでは、大振幅時の除荷時の負のダイレイタンスー挙動(非排水載荷時のサイクリック・モビリティ現象)、を表現することができない。これは、物理的観点からは、すべりモデルの限界であるが、現象論的には、致命的欠陥ではない。なぜならば、計算例では無視した弾性成分が、ひずみ履歴に依存する異方的コンプライアンスをもつとすれば、この現象は表現できるからである¹⁵⁾。

4. においては、最も単純な場合である等方構造を有する粒状体について、定式化を行った。もし、あらかじめ、初期異方性、誘導異方性の程度が推定できれば、応力比に関しては等価な2つのすべり面上で、相異なるせん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}^{\alpha}$ 、ダイレイタンスー係数 $\tan \nu^{\alpha}$ を与えることにより、現象論的には、初期異方性、誘導異方性の応力ひずみ関係に与える影響をシミュレーションすることができる。

このように提案したすべりモデルおよび定式化は、上記の拡張のいずれもが新たな困難をもたらすことになるが、現象論的には、砂のような粒状体のもつ多様な変形特性を表現することができる。

(2) 提案モデルの物理的妥当性

本論文の定式化は、金属多結晶体の微視的な弾塑性挙動の定式化を参考にしている。ここでは多結晶体との比較を通して、砂のような粒状体に関するすべりモデルの物理的妥当性を論じる。

まず、砂のような粒状体のひずみ硬化時のすべり面の存在について考える。多結晶体の場合には、すべり面は金属組織学的に決定され、その面で転位運動が生じている¹⁶⁾。砂のような粒状体では、ひずみ軟化時に巨視的すべり面が形成されることが知られているが、ひずみ硬化時には、すべり運動の基準面となるすべり面を決定することは、不可能であるように思われる。このように、砂のような粒状体のすべり面の決定には、少なからず、任意性が存在する。

多結晶体のすべり運動のひずみ硬化は、転位が増加し、それにつれて、転位どうしが束縛し合い、さらなるすべり運動のためには、せん断応力を増加させる必要があることによりもたらされる¹⁶⁾。このようなメカニズムの場合、せん断ひずみ速度に関連して、ひずみ硬化がもたらされるという定式化は正しいことになる。

本論文の定式化の背景となったひずみ硬化の考え方は「すべり面における粒子の接触状況が、すべり運動の結果、正のダイレイタンスー角をもつように変化し、ひずみ硬化が生ずる」というものであり、Murayama, Matsuokaらの考え方を参考にしたものである。

一方、Odaのひずみ硬化モデル¹⁷⁾は、特定のすべり面は指定することなく、「最大主応力方向へ、粒子の接点の集中が起こり、最大主応力軸方向へ発達した構造：柱(column)を形成し、外力に対する支持力が増加し、ひずみ硬化を生じる」とするものである。

現在のわれわれの知識では、このどちらのひずみ硬化モデルが適切なのかという疑問に明確に答えることはできない。しかし、最近の以下の実験事実はOdaのひずみ硬化説を支持しているように思われる。

(1) 力を伝えている粒子は、すべりに対して安定な状態にあることが多い¹⁸⁾。

(2) 力を伝えている粒子の運動メカニズムとして、すべり運動の寄与は小さい。すべりは力を伝えていない粒子間において起こる¹⁹⁾。

もし、すべり運動が粒状体の粒子間力の伝達メカニズムと関連がなければ、すべり運動がひずみ硬化特性を支配するとは考えにくいことになる。Odaのひずみ硬化説によれば、ある傾度をもった面の平均的粒子の接触状

況が正のダイレイタンス角をもつようになるのは、ひずみ硬化の結果として生ずることになる（最大主応力方向へ粒子間接点が卓越することにより、任意の面の平均的ダイレイタンス角は正の方向へ移行する）。

Oda のひずみ硬化説を採用すれば、粒状体の非可逆的変形は2つの成分に分離することができよう¹⁵⁾。すなわち、1つの成分は、粒子間力を伝達する構造の変化により、生ずる成分であり、もう1つは、この構造の変化に付随して生ずるすべり運動である。このように、考えると、大振幅時の除荷時の負のダイレイタンス角は、除荷時に、弱い方向に圧縮力が作用するために生ずる構造変化によるものと考えることができる。また、構造変化が、最大主応力方向へ卓越して生ずることを考えると、硬化は異方的であり主応力軸の回転時の塑性変形にも、構造変化による成分が大きく寄与するものと考えられる。

以上、提案したすべりモデルの物理モデルとしての妥当性をどちらかといえば、否定的観点から論じた。実際の粒状体の変形挙動は、すべり運動以外の微視的運動、たとえば、粒子の回転等にも大きく左右されるものと思われる。単一の微視的変形モデルが砂のような粒状体の複雑な変形挙動のすべてを、正しく、表現し得ると思えない。重要なことは、モデルの適用性と限界を、明確に認識して、より合理的なモデルを求め、巨視的変形特性の理解を深めることにあると思われる。

7. 結 論

砂のような粒状体の構成則として、多重すべりモデルを提案し、微小変形理論の範囲内で一般的定式化を行った。最も簡単な場合である等方粒状体に対し、平面変形状態で具体的な構成式を与えた。

この多重すべりモデルは、Double Slip モデルの2つの速度特性曲線に異方的硬化特性を与えることにより、数学的に単純化できることを示した。

多重すべりモデル、Double Slip モデルの両者について、数値計算例を示し、実験結果との比較を行った。

提案したすべりモデルは、物理的妥当性には乏しいものの、数学的簡便性および表現できる現象の多様性を考えると、砂のような粒状体の構成則として、重要なものであることが理解できる。

参 考 文 献

- 1) Newland, P. L. and Allely, B. H. : Volume changes in drained triaxial test on granular materials, *Geotechnique*, Vol. 7, pp. 17~34, 1957.
- 2) Murayama, S. : Constitutive equations of particulate material in the plastic state, 'Constitutive Equations of

Soils', Proc. of Speciality Session 9 9th ICSMF, Tokyo, pp. 175~190, 1977.

- 3) Matsuoka, H. : A microscopic study on shear mechanism of granular materials, *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 1, pp. 29~43, 1974.
- 4) Matsuoka, H. : Stress strain relationships of sands based on the mobilized plane, *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 2, pp. 47~61, 1974.
- 5) Matsuoka, H. and Nakai, T. : Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, *Proc. of JSCE*, Vol. 16, No. 232, pp. 59~70, 1974.
- 6) Spencer, A. J. M. : Deformation of ideal granular materials, *Mechanics of Solids*, The Rodney Hill 60th Anniversary Volume, ed. Hopkins and Sewell M. J. Pergamon Press, Oxford, pp. 607~652, 1982.
- 7) Mehrabadi, M. M. and Cowin, S. C. : Initial planar deformation of dilatant granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 26, pp. 269~284, 1978.
- 8) Anand, L. : Plane deformation of ideal granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 31, pp. 105~122, 1983.
- 9) Lin, T. H. : Physical theory of plasticity, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 11, pp. 255~311, 1971.
- 10) Asaro, R. J. : Micromechanics of crystals and polycrystals, *Advances in Applied Mechanics* Vol. 23, pp. 1~115, 1983.
- 11) Nemat Nasser, S. : On finite plastic flow of crystalline solids and geomaterials, *J. of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 1114~1126, 1983.
- 12) Nemat Nasser, S. and Tobita, Y. : Influence of fabric on liquefaction and densification potential of cohesionless sand, *Mechanics of Materials*, Vol. 1, No. 1, pp. 43~62, 1982.
- 13) 東畑：砂の繰り返しせん断変形特性に及ぼす主応力軸回転の影響，東京大学学位論文，1981.
- 14) Tatsuoka, F. and Ishihara, K. : Drained deformation of sand under cyclic stresses reversing direction, *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 3, pp. 51~65, 1974.
- 15) 飛田・柳澤：砂のような粒状体の構造、応力、運動則に関する準巨視的考察，土木学会論文報告集（投稿中）
- 16) 大南・塩沢：多結晶体の強度と破壊，破壊力学と材料強度講座 14，培風館，1976.
- 17) Oda, M. : A micromechanical and statistical model of granular material, *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 1, pp. 13~27, 1974.
- 18) 小西：砂の様な粒状体の変形強度挙動に関する微視的考察，信州大学工学部，1978.
- 19) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L. : Modeling of microscopic mechanisms in granular materials, *Mechanics of Granular Materials ; New Models and Constitutive Relations*, edited by J. T. Jenkins and M. Satake, pp. 137~149, 1984.

(1985. 5. 9・受付)