

長周期波の河川遡上に関する基礎的考察

FUNDAMENTAL CONSIDERATION ON STORM SURGES RUNNING UP THE RIVER

神田 徹*・浜村吉昭**

By Tohru KANDA and Yoshiaki HAMAMURA

In order to clarify the mechanism of interaction between flood flow and storm surge in a river channel, the authors make the theoretical investigations on the water waves with very long period running up the river. Sinusoidal waves are given at the downstream end of the river as substitute for storm surges, and the analytical solutions are presented for the water levels and the flow velocities at various locations along the river channel. From those solutions, the approximate solution for the highest water level is derived, and can make clear its relations to the amplitude and the period of waves and the river discharge. The other basic characteristics of propagation of the waves are also revealed based on the obtained analytical solutions.

1. ま え が き

台風に伴う高潮によって河川下流部、特に低平地河川は大きな影響を受けるので、従来各種の治水対策が講ぜられている。しかし、台風は高潮とともにしばしば降雨をも伴うので、近年の出水特性の変化を考慮するとき今後の治水対策・河川管理においては洪水と高潮の同時生起性についても十分の配慮がなされるべきである¹⁾。そのためには、河道内での両者の相互干渉機構に関して実験や数値計算法とともに、理論的考察をもとにその一般的特性を把握しておくことが必要である。

高潮の河川遡上に関しては、実際河川を対象とした実験的研究が過去にかなり集中的に行われた²⁾。理論的研究としては市栄³⁾、矢野ら⁴⁾の研究があるが、以後は基礎式の非線形性のゆえに計算機による数値解析が多い⁵⁾。一方、潮汐の河川遡上に関して、岡本⁶⁾は平均水面が等流水面に一致するような波を河川下流端で与え、河川水位変動に関する解析解を得ている。また宇野木⁷⁾は不等流を対象として理論的検討を行っている。

本研究では高潮の河川遡上を対象とすることから、河

川下流端で最低水位が等流水面に一致するような長周期の波を与え、解析解を求めた。さらに、解の構造を調べ、遡上波の基本的な伝播特性を明らかにした。

2. 基礎方程式とその解

(1) 基礎方程式および境界条件

河川下流端において長周期の水位変動を与える。これは高潮による河口潮位の上昇を想定しているので、当然河道内への海水侵入があるが、本研究では密度流の影響は考慮に入れていない。そして、河道の流れを一次元流れとして扱えば、基礎方程式は次式で与えられる。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} - i + I_f = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(vh)}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 h ：水深、 v ：断面平均流速、 i ：河床勾配 ($i < 0$)、 I_f ：摩擦勾配； $I_f = n^2 v |v| / h^{4/3}$ 。

ただし、水路は一様な広幅長方形断面水路とし、河川下流端（河口）を原点として上流へ向かって x 軸をとる。

式(1)において慣性項を省略すれば

$$v = \pm \frac{h^{2/3}}{n} \left(\pm i \mp \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (3)$$

また、等流状態では

* 正会員 工博 神戸大学助教授 工学部土木工学科
(〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)

** 学生会員 神戸大学大学院工学研究科(同上)

$$v_0 = -\frac{1}{n} h_0^{2/3} (-i)^{1/2} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 v_0 ：等流流速、 h_0 ：等流水深
 慣性項省略の近似をすれば、式(2)、(3)から、水位変動に関する基礎式が次のように得られる。

$$v \geq 0 \text{ に対して}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} \pm \frac{5h^{2/3}}{3n} \left(\pm i \mp \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{1/2} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{h^{5/3}}{2n} \left(\pm i \mp \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{-1/2} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \text{ (複号同順)} \dots\dots\dots (5)$$

境界条件として、河川下流端 ($x=0$) および無限上流 ($x \rightarrow \infty$) の水深を次のように与える。

$$h(0, t) = \frac{A_0}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} t \right) + h_0 \left. \dots\dots\dots (6) \right\}$$

$$h(\infty, t) = h_0$$

ここに、 A_0 ：河口における変動水位の振幅、 $\gamma = 2\pi/T$ ：角周波数、 T ：波の周期

高潮は周期性の波ではないが、trough 付近を除けばこの正弦波で高潮の基本的な遡上特性が再現できると考えられる。

(2) 近似解の誘導

式(5)(ただし、 $v < 0$)に摂動法を適用して近似解を求める。まず、 h を次のように展開する。

$$h = h_0(1 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $\varepsilon = A_0/(2h_0)$

式(7)の第3項までをとって式(5)に代入し、 ε および ε^2 の係数を集めれば、それぞれ以下の方程式が得られる。

第一次近似項 y_1 に関する方程式：

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} + \omega \frac{\partial y_1}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

第二次近似項 y_2 に関する方程式：

$$\frac{\partial y_2}{\partial t} + \omega \frac{\partial y_2}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \Gamma(x, t) \dots\dots\dots (9)$$

$$\Gamma(x, t) \equiv \frac{5}{3} \mu \left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x} \right)^2 + y_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \right] - \frac{2}{3} \omega y_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{5}{3} \frac{\mu^2}{\omega} \frac{\partial y_1}{\partial x} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$\omega = \frac{5}{3} v_0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\mu = \frac{h_0 v_0}{2i} \dots\dots\dots (12)$$

境界条件式(6)は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} y_1(0, t) = 1 - \cos \gamma t, \quad y_2(0, t) = 0 \\ y_1(\infty, t) = y_2(\infty, t) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

式(8)および式(9)を式(13)の境界条件のもとで解けば、 y_1 、 y_2 が次のように与えられる。

$$y_1 = \exp\left(\frac{\omega}{\mu} x\right) - \exp\left[\left(\frac{\omega}{2\mu} - p_1\right)x\right] \cos(\gamma t - q_1 x) \dots\dots\dots (14)$$

$$y_2 = \frac{13}{6} \left\{ \exp\left(\frac{\omega}{\mu} x\right) - \exp\left(\frac{2\omega}{\mu} x\right) \right\} + D_0 \left[\exp\left(\frac{\omega}{\mu} x\right) - \exp\left[2\left(\frac{\omega}{2\mu} - p_1\right)x\right] \right] + D_1 \left[\exp\left[\left(\frac{3\omega}{2\mu} - p_1\right)x\right] - \exp\left[\left(\frac{\omega}{2\mu} - p_1\right)x\right] \right] \cos(\gamma t - q_1 x + \theta_1) + D_2 \left[\exp\left[\left(\frac{\omega}{2\mu} - p_2\right)x\right] \cos(2\gamma t - q_2 x + \theta_2) - \exp\left[2\left(\frac{\omega}{2\mu} - p_1\right)x\right] \cos(2\gamma t - 2q_1 x + \theta_2) \right] \dots\dots\dots (15)$$

ここに、

$$\left(\begin{matrix} p_1 \\ q_1 \end{matrix} \right) = \left[\left\{ \sqrt{\left(\frac{\omega}{2\mu}\right)^4 + \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2} \pm \left(\frac{\omega}{2\mu}\right)^2 \right\} / 2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots (16)$$

$$\left(\begin{matrix} p_2 \\ q_2 \end{matrix} \right) = \left[\left\{ \sqrt{\left(\frac{\omega}{2\mu}\right)^4 + \left(\frac{2\gamma}{\mu}\right)^2} \pm \left(\frac{\omega}{2\mu}\right)^2 \right\} / 2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots (17)$$

$$D_0 = -\frac{1}{4p_1} \left(\frac{\omega}{2\mu} - 5p_1 + \frac{5}{3} \frac{\mu}{\omega} p_1^2 \right) \dots\dots\dots (18)$$

$$D_1 = \sqrt{M_1^2 + N_1^2} \dots\dots\dots (19)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(-\frac{N_1}{M_1} \right) \dots\dots\dots (20)$$

$$D_2 = \sqrt{M_2^2 + N_2^2} \dots\dots\dots (21)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(-\frac{N_2}{M_2} \right) \dots\dots\dots (22)$$

$$M_1 = -\frac{1}{12p_1} \left(\frac{3\omega}{\mu} - 36p_1 + 20 \frac{\mu}{\omega} p_1^2 \right) \dots\dots\dots (23)$$

$$N_1 = \frac{q_1}{12p_1} \left(\frac{3\omega}{\mu} + 10p_1 - 20 \frac{\mu}{\omega} p_1^2 \right) / \left(\frac{\omega}{2\mu} - p_1 \right) \dots\dots\dots (24)$$

$$M_2 = -\frac{1}{24p_1} \left(\frac{2\omega}{\mu} + 25p_1 - 10 \frac{\mu}{\omega} p_1^2 \right) \dots\dots\dots (25)$$

$$N_2 = \frac{q_1}{24p_1} \left(\frac{2\omega}{\mu} - 5p_1 + 10 \frac{\mu}{\omega} p_1^2 \right) / \left(\frac{\omega}{2\mu} - p_1 \right) \dots\dots\dots (26)$$

よって、式(7)から水深 h は次のように得られる。

$$h = h_0 + \frac{A_0}{2} y_1 + \frac{A_0^2}{4h_0} y_2 = h_0 + \Delta H \dots\dots\dots (27)$$

$$\Delta H \equiv \frac{A_0}{2} y_1 + \frac{A_0^2}{4h_0} y_2 \dots\dots\dots (28)$$

流速 v は、式(3)から次のように与えられる。

$$v = -\frac{1}{n} \left(h_0 + \frac{A_0}{2} y_1 + \frac{A_0^2}{4h_0} y_2 \right)^{2/3} \cdot \left[-i + \frac{A_0}{2} \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{A_0^2}{4h_0} \frac{\partial y_2}{\partial x} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (29)$$

3. 解の精度について

式(27)は式(5)に対する近似解である。この解の精度を調べるために、河川流と河口水位変動の条件をある範囲で与えて厳密解とこの近似解を比較した。また、

式(5)は式(1)における慣性項を省略して得た式であり、この省略は高潮のようなきわめて緩慢な水位変動では許される場合が多い。ここでは式(1)、(2)の厳密解と式(5)の厳密解を比べ、その検証も行った。なお、厳密解とここによぶものはもちろん、解析解として得られないから、式(1)、(2)については有限差分法—水理公式集、河川編、式(4.26)、(4.27)—による数値解、また式(5)についてもこれと同じ4点陰型スキームによる解を厳密解に代わるものとした。以下、これらを差分解とよぶ。

一例として、河床勾配 $i = -1/10\,000$ 、粗度係数 $n = 0.025$ の河道において、河川単位幅流量 $q_0 = 5 \text{ (m}^2/\text{s)}$ 、波の振幅 $A_0 = 1 \text{ (m)}$ 、周期 $T = 4 \text{ (h)}$ の場合の式(1)の各項の値を Fig. 1 に、また各地点での水位および流速の時間変化を Fig. 2 に示す。解析解(式(27)、(29))の精度に関しては、河口付近の流速を除いて差分解との一致はきわめてよい。慣性項省略の影響については、位

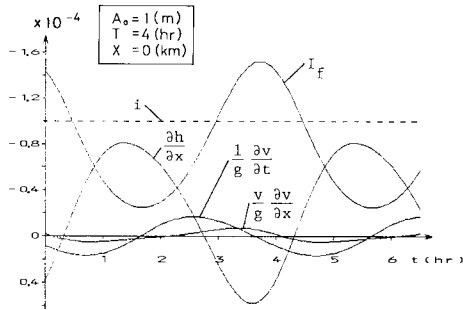


Fig. 1 Comparison of magnitude of terms in Eq. (1).

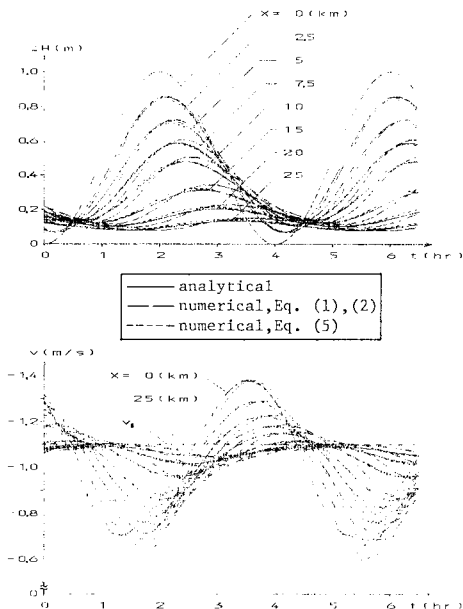


Fig. 2 Variations of water level and velocity with time.

相に若干のずれが生じるが、水位および流速のピーク値はほぼ一致しており、省略の影響は小さい。他の条件での計算結果を合わせると、 A_0 が 1 (m) 以下、 T が 4 (h) 以上の場合、式(27)は式(1)、(2)に対する高精度の近似解であるといえる。

4. 長周期波の伝播特性

(1) 解の構造

式(14)の y_1 の第1項は平均水位、第2項はそれからの変動水位で、前者は河川流量、後者は河川流量と河口で与える波の周期の関数である。式(15)の y_2 の第1項および第2項は非振動項、第3項は基本振動項、第4項は倍振動項である。Fig. 3の上図は式(27)における第一次近似項 $(A_0/2)y_1$ 、第二次近似項 $(A_0^2/4h_0)y_2$ および両者の和 ΔH を示す。下図は第二次近似項の値であり、基本振動項が最も大きい倍振動項も無視できない。また、第二次近似項の波は第一次近似項の波より速く進み、これが前面が急に、後面が緩やかになるという波形の変化をもたらしている。

Fig. 4は、河口における波のピーク時を基準とした各項のピークの遅れ角を示す。ここに、 $\delta_0 = q_1 x$ 、 $\delta_1 = q_1 x - \theta_1$ 、 $\delta_2 = (q_2 x - \theta_2)/2$ 、 $\delta_3 = q_1 x - \theta_2/2$ である。倍振動項の遅れ角 δ_2 のみが他の δ に比べて小さく、河口からの距離とともにその差は大きくなる。これが、上述のような波の変形をもたらすと考えられる。

(2) 河道に沿う最高水位

式(27)において各項の位相のずれを無視すれば、河道に沿う最高水位、すなわち等流水面を基準にした水位上昇量 ΔH_{\max} は次式で与えられる。

$$\frac{\Delta H_{\max}}{A_0} = \frac{1}{2} y_{1,\max} + \frac{A_0}{4h_0} y_{2,\max} \dots \dots \dots (30)$$

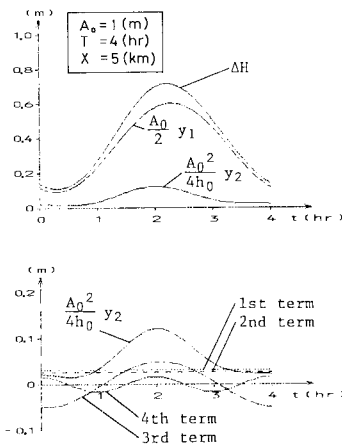


Fig. 3 Magnitude of terms in Eq. (27) and that in Eq. (15).

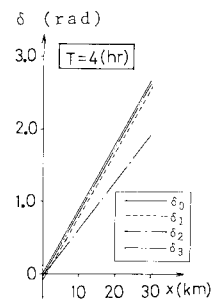


Fig. 4 Phase lags.

$$y_{1,max} = \exp\left(\frac{\omega}{\mu}x\right) + \exp\left[\left(\frac{\omega}{2\mu} - p_1\right)x\right] \dots\dots\dots(31)$$

$$y_{2,max} = \frac{13}{6} \left\{ \exp\left(\frac{\omega}{\mu}x\right) - \exp\left(\frac{2\omega}{\mu}x\right) \right\} + D_0 \left[\exp\left(\frac{\omega}{\mu}x\right) - \exp\left[2\left(\frac{\omega}{2\mu} - p_1\right)x\right] \right] + D_1 \left[\exp\left[\left(\frac{\omega}{2\mu} - p_1\right)x\right] - \exp\left[\left(\frac{3\omega}{2\mu} - p_1\right)x\right] \right] + D_2 \left[\exp\left[\left(\frac{\omega}{2\mu} - p_2\right)x\right] - \exp\left[2\left(\frac{\omega}{2\mu} - p_1\right)x\right] \right] \dots\dots\dots(32)$$

Fig. 5 は、式 (5) の差分解、式 (27) のおのおのから求まる最高水位と式 (30) を比較したものである。図から、最高水位は式 (30) で近似できるといえる。

式 (30) において、河川流量 (単位幅) q_0 および波の周期 T が一定の場合は $y_{1,max}$ および $y_{2,max}$ が一定値をとるため、相対波高 (A_0/h_0) が大きいほど ($\Delta H_{max}/A_0$) は大きい。また、 A_0 を一定としたときの最高水位に及ぼす周期の影響については、周期の短い波ほど遡上に伴う最高水位の減衰は大きい。式 (30) で $T \rightarrow \infty$ とすれば、次式が得られる。

$$\frac{\Delta H_{max}}{A_0} = \exp\left(\frac{\omega}{\mu}x\right) + \frac{13A_0}{6h_0} \left\{ \exp\left(\frac{\omega}{\mu}x\right) - \exp\left(\frac{2\omega}{\mu}x\right) \right\} \dots\dots\dots(33)$$

上式は、高精度で定常不等流の水面形を与える。

河川流量との関係については、流量が少ないほど遡上に伴う減衰が大きい。これは式 (31)、(32) の各項の減衰係数が大きくなることによる。

(3) 最高水位の伝播速度

Fig. 6 は、最高水位が生じた時刻と地点の関係を式

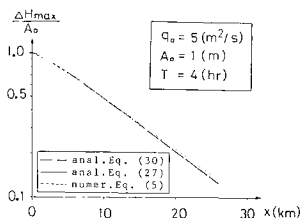


Fig. 5 Maximum water level along river channel.

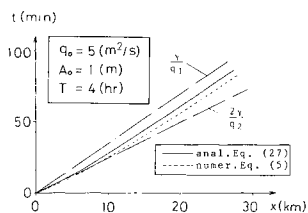


Fig. 6 Propagation of maximum water level.

(5) の差分解と式 (27) について示す。ここに、河口での最高水位の生起時刻を $t = 0$ としている。一点鎖線は、一定波速 (γ/q_1) および ($2\gamma/q_2$) をもつ波を表わす。図のように、式 (27) による伝播速度は遡上とともに (γ/q_1) に近づいていく。これは、遡上とともに倍振動項が減衰し、波速 (γ/q_1) の基本振動項が支配的となるためである。この (γ/q_1) は周期 T と流量 q_0 の関数 (ただし、 i, n は一定) である。

5. 結 語

高潮の水位変動は前後に小さい振幅の波が付随するが、主部は1つのピークをもつ水面の盛り上がりである。一方、上記の解は連続波を対象とし、しかも時間を経て収束するところの定常解である。そこで、この解を高潮に適用し得るかどうかにについて検討を行った。河口において trough から始まる1波のみを与え、その遡上波形を定常解と比較してみると、波先と尾の部分を除いて両者の波形はほぼ完全に一致した。したがって、この1波を高潮波形とみなせば、連続波について得られた上述の結果、特に波のピーク付近の伝播特性は高潮のそれと基本的に差異がないものと考えられる。

式 (27) の適用範囲については、河口で与える波の振幅が大きく、また周期が短くなれば式 (1) の慣性項は無視することはできず、基礎式 (5) 自体が妥当性を失う。よって、慣性項の影響度合に関して、河道条件および河口で与える波形との関係を明確にしておく必要があり、この点は今後の課題としたい。

本文は文部省科学研究費自然災害特別研究 (代表者: 早大 吉川秀夫教授) の補助による研究成果の一部であり、記して謝意を表す。本研究において有益なご助言を頂いた神戸大 笹 源亮教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 端野道夫・神田 徹・北澤聖司・横山真至: 台風性降雨と高潮の同時生起性に関する研究, 土木学会論文集, 第357号/II-3, 1985.
- 2) たとえば, 岩垣雄一・中村重久: 大阪市内河川の高潮遡上に関する実験, 第14回海岸工学講演会講演集, 1967.
- 3) Ichiye, T. : On the abnormal high waters in river, The Oceanographical Magazine, Vol. 5, No. 1, 1953.
- 4) 矢野勝正・足立昭平・奥田節夫・樋口明生・大同淳之: 寝屋川模型実験—鴻池堰操作の基本方式, 京大防災研究所創立5周年記念論文集, 1956.
- 5) 小西達男・木下武雄: 高潮の河川遡上に関する研究 (II), 国立防災科学技術センター研究報告, 第34号, 1985.
- 6) 岡本元治郎: 河川に於ける潮汐, 地球物理, 4-1, 1940.
- 7) 宇野木早苗: 河川潮汐の研究 (第2報), 第16回海岸工学講演会講演集, 1969.