

## 最適化手法を用いた大規模管網系の定常流解析

## OPTIMIZATION TECHNIQUE FOR SOLVING STEADY FLOWS IN LARGE NETWORK PIPE SYSTEMS

島田 正志\*

By Masashi SHIMADA

This paper deals with the loop analysis for efficiently solving the steady flow in large pipe network system. ① The analysis having not flow rates through co-trees but around loops (or meshes) as independent variables is graph-theoretically formulated. ② The calculation algorithm using the conjugate gradient method is shown to solve the non-linear optimization problem based on the principle of minimum dissipative energy. ③ For practical and efficient calculations of sparse matrices how to number nodes, trees, and fundamental loops is made clear. And ④ the method due to the minimization is compared with other excellent methods based on the Newton-Raphson algorithm.

## 1. ま え が き

パイプラインの設計には、設計流量を対象とした最適設計とその定常流解析が不可欠である。システムの制御管理上、設計流量より少ない種々の流量に対する解析も同様である<sup>1)</sup>。本論文では、大規模管網系を対象として、流量法による定常流解析を取り扱う。流量法は、独立な各閉路に対応する補木流量<sup>2)</sup>、あるいは、Mesh 流量<sup>3)</sup>(閉路の代表流量<sup>4)</sup>)のいずれを独立変数とするかで、補木流量法、Mesh 流量法に区分できる。システムの有向グラフ中で閉路の取り方は数多くある。基本閉路として、内部に木および補木を全く有しない閉路(自然な閉路<sup>5)</sup>)をとれば、Mesh 流量法の場合、Newton-Raphson 法(NRM)のヤコビ係数行列は正定値対称・対角優位な疎行列となり、優れた解法(SOR, 還元解法<sup>5),6)</sup>, 対称・疎行列性を利用したガウス法<sup>3),9)</sup>等)がある。

一方、閉路エネルギーベクトルの2乗和を目的関数とする最小化原理に基づく解法<sup>9)</sup>も、否定的に知られている<sup>7)</sup>。また、管網系では、より自然な変分原理が存在し、計算手法への適用が試みられている。この変分原理の定式化は、線形電気回路における“Minimum Heat

Theorem”の発見に始まり<sup>10)</sup>、非線形回路でキルヒホフ則の成立時には“Content”あるいは“Co-content”なる量が定常状態で停留値となることが示された<sup>11)</sup>。Birkhoffらは、定常流解析をポテンシャル境界値問題との類似より、① Dirichle 問題(節点エネルギーが既知)、② Neumann 問題(節点境界流入流量が既知)、③ 混合型問題、と分類し、各タイプに対して変分問題として定式化を行ったうえで、きわめて一般的条件下で解の存在と一意性を証明した<sup>12)</sup>。さらに、BraytonとMoserは、非線形電気回路系の非定常問題で、“Mixed Potential”が停留値をとるとき定常状態となることを示し<sup>13)</sup>、鬼塚は水理的非線形系へその考え方を適用した<sup>14),15)</sup>。以上の定常流に関する変分原理を数値解法として応用したのは、CollinsとCooperである<sup>16)</sup>。しかし、疎行列性の利用、ベクトル演算による必要配列数の削減等の工夫により、計算効率を高めたうえで実用上の解法として評価がなされたとはいいがたい。

本論文では、① 補木流量法からMesh 流量法への変換をグラフ理論で明確な定式化を行い、② 散逸エネルギーの最小化原理を利用し、共役勾配法による計算アルゴリズムを示す。③ さらに、効率的疎行列演算を行うために、グラフ作成手順とデータの与え方を整理し、具体例に基づいて実際の計算の指針を与え、④ 最後に、

\* 正会員 農博 研究員 農業土木試験場  
(〒305 茨城県筑波郡谷田部町観音台2-1-2)

提示した解法と既存の解法の数値例による比較を行う。

## 2. Neumann 問題に対する閉路解析

### (1) 基礎方程式

大規模管網系を対象とする定常流解析を系統的に取り扱うために、系の有向グラフを定義し、木 (Tree), 補木 (Co-tree), および、補木に対応する基本閉路を定める。グラフ理論の定式化により<sup>17), 18)</sup>, 節点で流量式, 基本閉路の水頭エネルギー連続式, および、節点水頭を定める式は、

$$Aq = Q \dots\dots\dots(1)$$

$$BH = O \dots\dots\dots(2)$$

$$A^*\Phi = H \dots\dots\dots(3)$$

ここで、 $A(NS, NP)$  = 既約接続行列,  $B(NG, NP)$  = 基本閉路行列,  $H(NP)$  = 管路に対する損失水頭ベクトル (m),  $q(NP)$  = 管路の流量ベクトル (m<sup>3</sup>/s),  $Q(NS)$  = 節点での境界流入ベクトル (m<sup>3</sup>/s),  $\Phi(NS)$  = 基準節点に相対的な節点水頭ベクトル (m),  $A^* = A$  の転置行列,  $NP$  = 管路総数,  $NS$  = 節点総数 - 1,  $NG$  = 独立基本閉路の個数で、

$$NG = NP - NS \dots\dots\dots(4)$$

基準節点の流量式は、他の節点の流量式と一次従属関係にあるので、基準節点 ( $NS + 1$  番目の節点で水頭をゼロとする) を除外した既約接続行列  $A = |a_{ij}|$  は、

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 : \text{管路 } j \text{ が節点 } i \text{ を始点とするとき} \\ -1 : \text{管路 } j \text{ が節点 } i \text{ を終点とするとき} \\ 0 : \text{管路 } j \text{ が節点 } i \text{ と接続しないとき} \end{cases}$$

$B = |b_{il}|$  は

$$b_{il} = \begin{cases} +1 : \text{管路 } j \text{ が閉路 } l \text{ に同一方向に含まれるとき} \\ -1 : \text{管路 } j \text{ が閉路 } l \text{ に逆向きに含まれるとき} \\ 0 : \text{管路 } j \text{ が閉路 } l \text{ に含まれないとき} \end{cases}$$

管路番号は、木 (1, 2, ...,  $NS$ ) および補木 ( $NS + 1, NS + 2, \dots, NP$ ) とする。節点、管路、および、閉路の番号づけの方法は、疎行列  $A, B$  を非ゼロ要素表で表現し、計算効率を高めるうえで重要となるので、後節で詳述する。

### (2) 補木流量法, Mesh 流量法

$A, B, q$ , および、 $H$  の木・補木に対応する表現を ( $A_T, A_C$ ), ( $B_T, B_C$ ), ( $q^*, q_c^*$ ), および、( $H^*, H_c^*$ ) とする。式 (1), (2) は、

$$A_T q_T + A_C q_C = Q \dots\dots\dots(5)$$

$$B_T H_T + B_C H_C = O \dots\dots\dots(6)$$

補木流量法では  $B_C = I_C$  ( $NG$  次元単位行列) となるよう閉路をとるが、一般には、 $A$  と  $B^*$  の直交性より

$$B^* = -A_T^{-1} A_C B^*$$

ここで、 $A_T^{-1} = A_T$  の逆行列

Mesh 流量法では、基本閉路を“自然な閉路”にとり、

補木流量  $q_c$  に代わり Mesh 流量  $q'_c$  を次式で導入する。

$$q_c = B^* q'_c \dots\dots\dots(7)$$

ここで、 $q'_c$  = 高桑が“要素閉管路の代表流量”とした量で<sup>4), 6)</sup>, 本解析で独立変数の役割を果たす。

以上の式より、木流量は次式で与えられる。

$$q_T = B^* q'_c + R \dots\dots\dots(8)$$

$$R = A_T^{-1} Q \dots\dots\dots(9)$$

損失水頭ベクトルは、経験公式を一般化して

$$H = |H_i| = |F_i q_i| |q_i|^m \dots\dots\dots(10)$$

ここで、 $F_i$  = 管径, 抵抗係数を含む一般化した抵抗係数,  $m$  = 指数。

$q'_c$  は、式 (6), (7), (8), (10) の非線形連立方程式の解となる。 $\Phi$  は、式 (7), (8) より  $q_c, q_T$ , 式 (10) より  $H$  を求め、次式で定まる。

$$\Phi = (A^*)^{-1} H_T \dots\dots\dots(11)$$

### (3) 散逸エネルギーの最小化原理

定常解が変分最小化問題と等価であることを平易に示す。

$$\int (BH)^* dq'_c = 0^{(12), (16)}$$

すなわち、成分表示で和の順序を交換すると、

$$\int \sum_{j=1}^{NS} F_j |q_j| |q_j|^m \left( \sum_{i=NS+1}^{NP} b_{ij} dq'_i \right) + \sum_{i=NS+1}^{NP} F_i |q_i| |q_i|^m \left( \sum_{i=NS+1}^{NP} b_{ii} dq'_i \right) = 0$$

$dq_T = B^* dq'_c, dq_c = B^* dq'_c$  であるので、上式を積分してポテンシャル  $P$  を得る。

$$P = \frac{1}{(m+2)} \sum_{i=1}^{NP} F_i |q_i| |q_i|^{m+2} = \text{const} \dots\dots\dots(12)$$

$P$  を  $q'_c$  で偏微分したポテンシャル勾配は、

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial q'_c} = BH = O \dots\dots\dots(13)$$

式 (13) は  $P$  の停留性を示す。次に、 $\nabla^2 P$  の正定値性を示す。

$$\nabla^2 P = \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial q'_{i+NS} \partial q'_{i+NS}} \right] = (m+1) \sum_{j=1}^{NP} b_{ij} b_{Tj} F_j |q_j|^m \dots\dots\dots(14)$$

ゆえに

$$(dq'_c)^* \nabla^2 P (dq'_c) = \sum_{j=1}^{NP} F_j |q_j|^m (dq_j)^2 > 0$$

$P$  は power の次元を有し、誘導した関係式は、単位時間当たりの管路の散逸エネルギーが最小となるときに定常状態が実現するという意味で、自然界の目的原理を反映する。

### (4) 非線形最適化問題の数値解法

前節までの議論より、定常流解析を線形制約つき非線形最小化問題に変換する。

$$\text{minimize}(P(q'_c)) : q_c = B^* q'_c \dots\dots\dots(15) \\ q_T = B^* q'_c + R$$

以下に、共役勾配法 (Conjugate gradient method) を利用した計算方法について述べる。

a) 初期値設定

NRM では、適切な初期値の設定が本質的に重要である。ここでも、抵抗項を線形近似して<sup>19)</sup>

$$H = |F_i q_i| \dots \dots \dots (16)$$

第一近似解を次式より求める。

$$S X = b \dots \dots \dots (17)$$

$$S = B F B^*, \quad F = \text{diag}(F_1, F_2, \dots, F_{NP}), \quad b = -B_T F_T R, \\ F_T = \text{diag}(F_1, F_2, \dots, F_{NS})$$

行列 S は、NRM のヤコビ係数行列と同一の性質を有し、正定値対称疎行列であり、非ゼロ要素表を作成すれば、Hestenes-Stiefel 法で効率的に計算できる<sup>20)</sup>。R は、節点、木の番号づけを工夫して代数的に求め得る(後述)。

計算アルゴリズム (CG1)

```

k=0
X1 is assumed
r1 = b - S X1
p1 = r1
k = k + 1
αk = (rk}, pk}) / (pk}, S pk})
Xk+1 = Xk + αk pk
rk+1 = rk - αk (S pk}) (残差ベクトル)
βk = (rk+1} rk+1}) / (rk} rk})
pk+1 = rk+1 + βk pk
No ||rk+1||∞ < ε1 (収束判定)
↓ Yes
(CG2) → q'c1 = Xk+1}, qc1 = B* q'c1}, qr1 = B* q'c1 + R
H1 = (H*r1}, H*c1})*
↓
最小化計算へ接続 ..... (18)
    
```

収束判定は、残差ベクトル  $r_{k+1}$  のノルムで行うが、制御変数  $\epsilon_1$  を小さくとりすぎないように注意すべきである。

b) 最小化計算アルゴリズム

$q_c(q'_c), q_r(q'_r)$  であるので簡約勾配法が適用でき<sup>21)</sup>, P の値を降下させる  $q'_c$  の方向ベクトルを  $p$ , 同様に  $q_r, q_c$  の方向ベクトル  $p_r, p_c$  を求め、Fletcher-Reeves 法で収束条件が満足されるまで降下を繰り返す。P の値を最小とする方向ベクトルの長さ  $\alpha$  は、三次多項式補間を利用した一次元探索で決定する<sup>21), 22)</sup>。なお、初期値を式 (18) で行う解法を (CG1)、任意の初期値より最小化計算する解法を (CG2) と略記する。

計算アルゴリズム

```

k=0
g1 = B H1 = (E1}) (誤差ベクトル)
β1 = 0
    
```

```

k = k + 1
pk+1 = -gk + βk pk}
pTK+1 = B*T pk+1}
pCK+1 = B*C pk+1}
minimize P(q'CK + α pk+1})
αk = α (方向 pk+1 で P を最小化する α)
(q'CK+1 = q'CK + αk pk+1})
(qCK+1 = qCK + αk pCK+1})
(qTK+1 = qTK + αk pTK+1}) } 前のステップで計算済
maxi |Δqi/qi}| < ε2 (収束判定) (i=1, NP)
↓ No
Hk+1 = (H*TK+1}, H*CK+1})*
gk+1 = B Hk+1} = Ek+1}
βk+1 = (gk+1} gk+1}) / (gk} gk})
PRINT
STOP
END ..... (19)
    
```

誤差ベクトル  $E = BH$  の 2 乗ノルムを目的関数とする最小化法 (CRM) も知られている<sup>8)</sup>。

$$\bar{P} = (BH)^*(BH) \dots \dots \dots (20)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial q'_c} = 2 S' B H \dots \dots \dots (21)$$

ここで、 $S' = B \tilde{F} B^*$ ,  $\tilde{F} = \text{diag}(F_1 |q_1|^m, F_2 |q_2|^m, \dots, F_{NP} |q_{NP}|^m)$ ,  $S'$  は NRM のヤコビ係数行列である。定常解は、 $\bar{P} = 0$  を満足する。この解法は、綾により実用上の価値がないと評価された<sup>7)</sup>。

(5) 疎行列性利用による計算の効率化とグラフ作成手順

ここでは、2.(1) で述べた視点より、グラフ作成手順を整理し明確にしたうえで、Fig.1 のシステム 1 ( $NP = 18, NS = 12, NG = 6$ , 基準節点は節点 13, 木 (1~12), 補木 (13~18)), 基本閉路は節点番号を閉路の方向に沿って記すと、閉路 1 (①→②→⑧→⑨), 閉路 2 (②→③→⑦→⑧, ..., 閉路 6 (⑤→⑥→⑫→⑬)) を例にして、必要となるデータの非ゼロ要素表を作成する。

a) 既約接続行列 A

$A_T^{-1}, (A^*)^{-1}$  が、R, Φ を知るうえで既知でなければならない。一般に、逆行列を計算すれば、計算精度、効率に影響する。そこで、節点・木の番号づけを工夫して、この労力を軽減する。基準節点より、すべての木と節点を順次通る 1 本の経路を“1 筆書き”の要領で作成する。次に、節点番号を基準節点より、順次 ( $NS, NS - 1,$

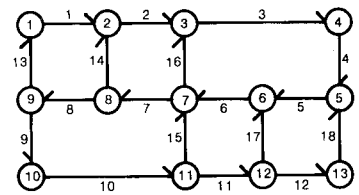


Fig.1 System 1.

..., 2, 1) で与え、木番号は、節点  $i$  から節点  $(i+1)$  へ向かう経路を木番号  $i$  とする。この方法により、 $A_T$  は、式 (22) のように、対角成分が +1、その 1 段下が -1、およびそれ以外はすべてゼロ要素となる。 $A_T^{-1}$  も一般性を失うことなく、式 (23) で与えられる。

$$A_T \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & & & NS \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 0 & 0 \\ NS \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \dots (22)$$

$$A_T^{-1} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & & & NS \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 1 & 1 \\ NS \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \dots (23)$$

式 (23) より  $R$ ,  $\Phi$  は、行列計算するまでもなく、代数計算で容易に求め得る。高桑は、 $q_c$  より  $q_T$  を求める際に、“管路  $l$  の流量=(その下流側にあるすべての節点流出水量の和)-(その下流側にある節点への連結管路流量の和)” と定式化した<sup>6)</sup>。式 (23) は、節点流出水量の総和はゼロであるので、高桑の定式化 (上三角行列  $(A_T^{-1})^*$  と一致) の相補的表現に対応する。結論的に  $A_T$ ,  $A_c$  のデータは不必要である。

b) 基本閉路行列  $B$

基本閉路は、自然な閉路と定めた。閉路の番号づけは木または補木を境界として接する閉路どうしの番号の差がヤコビ係数行列の帯幅に影響するので、この差を小さくすべきである<sup>5)</sup>。基本閉路行列  $B$  の非ゼロ要素表の作成法は、任意の木または補木は多くても 2 つの基本閉路に属するのみであるから、列番号を木または補木の番号にとり、列ベクトルに 2 個の帰属する閉路番号を記憶させて行う。 $B_T$ ,  $B_c$  に対応する非ゼロ要素表を  $NBT(2, NS)$ ,  $NBC(2, NG)$  で与えれば、Fig.1 のシステムの場合、

NBT

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	(Tree)
1	1	1	4	4	4	4	2	1	3	3	5	6	(Loop)
2	0	0	0	0	6	5	3	3	0	0	0	0	(Loop)

NBC

	13	14	15	16	17	18	(Co-tree)
1	1	2	3	4	5	6	(Loop)
2	0	-1	-5	-2	-6	0	(Loop)

負値は、閉路と木または補木の向きが逆であることを示す。なお、閉路と対応する補木の向きは、同一方向に定める。NBT により、 $y = B^* X$  を非ゼロ要素を基本とした演算で、次のようにサブ・ルーチン化できる。

```
FÖR J=1 TO NS : W=0 : FÖR L=1 TÖ 2 : W=
W + SGN(NBT(L, J))*X(ABS(NBT(L, J))) :
NEXT L : Y(J)=W : NEXT J
```

$B_T^*$ ,  $B_c^*$  の非ゼロ要素表  $NBTT(LM, NG)$ ,  $NBCT(2, NG)$  (列番号=閉路番号, 列ベクトルに帰属する木または補木の番号を記憶) から、 $B_T X$ ,  $B_c X$  の効率的演算が可能である。LM は、1 つの閉路に帰属する木の最大個数である。NBTT, NBCT は、システム 1 に対して、

NBTT

	1	2	3	4	5	6	(Loop)
1	1	2	7	3	6	5	(Tree)
2	8	7	8	4	11	12	(Tree)
3	0	0	9	5	0	0	(Tree)
4	0	0	10	6	0	0	(Tree)

(LM)

NBCT

	1	2	3	4	5	6	(Loop)
1	13	14	15	16	17	18	(Co-tree)
2	-14	-16	0	0	-15	-17	(Co-tree)

表中のゼロは、ゼロ要素を意味するが、 $SGN(NBT(L, J))=0$  となるので、 $X(0)$  が許容されれば便利な表現である。

(6) Newton-Raphson 法の計算アルゴリズム

最小化原理に基づく解法 (CG1, CG2) を評価するために、比較対象となる NRM による諸解法について述べる<sup>23)</sup>。

初期値設定は、式 (17) で行う。これにより、その後の求解過程は、木・補木の選択に依存せず理論上同一となる<sup>24)</sup>。

計算アルゴリズム

```

k=k+1
F_k = diag(F_1 | q_{1k}|^m, F_2 | q_{2k}|^m, ..., F_{NP} | q_{NP}|^m)
H_k, E_k = BH_k
S'_k = BF_k B^* (ヤコビ係数行列)
Δq'_ck = -S'_k^{-1} E_k / (m+1)
q'_{ck+1} = q'_{ck} + Δq'_ck
q_{ck+1} = B_c^* q'_{ck+1}, q_{Tk+1} = B_T^* q'_{ck+1} + R
No - max_i |Δq_i / g_i| < ε_2
    ↓ Yes
PRINT → STÖP → END
```

$k$  回目の補正值  $\Delta q'_{ck}$  の解法として、① 対称性を利用したガウス消去法 (SYG)<sup>25)</sup>, ② 還元解法 (RDM)<sup>6)</sup>, ③ 対称疎行列性を利用したガウス法 (SPG)<sup>3), 9)</sup>, ④ SOR による反復解法 (SOR)<sup>6)</sup>, 等がある。どの解法であれ、 $S'$  の非ゼロ要素表を作成すべきである。 $S'$  の非

ゼロ要素は、閉路  $i$  を  $i$  行に対応づけ、この閉路に木または補木を共通境界として接する閉路を  $j$  とすれば ( $i, j$ ) 成分は非ゼロとなる。ある閉路が自身を含めて最大 IN 個の閉路と接するとすれば、NJACO (NG, IN) で非ゼロ要素が表現できる。システム 1 では、IN=4 で次表となる。計算アルゴリズムの中に対称性を生かせれば、1/2 の要素数の計算で済む。本論文の計算結果は、SOR のみ対称性を利用していない。

NJACO

	1	2	3	4 (IN)
1	1	2	3	0
2	1	2	3	4
3	1	2	3	5
4	2	4	5	6
5	3	4	5	6
(NG) 6	4	5	6	0

(7) 解法の比較

Fig. 2 に示すシステム (NP=157, NS=87, NG=70) に対して、境界流入ベクトル  $Q(Q(4)=2.8, Q(41)=2.4, Q(48)=2.5, Q(84)=2.3, \text{その他}$  の節点で  $Q=-10/84$ ) を与え、定常流解析を行い解法の比較・検討をする。

各管路の一般抵抗係数は、Table 1 に示す。左から右、上から下へ ( $J=1\sim 157$ ) に対応する。

Table 2 に流量ベクトル  $q$  の真値を示す。(SPG で  $\varepsilon_2=10^{-5}$  とした解)。

Table 3 には、NRM の各解法で  $\varepsilon_2=10^{-3}$  とした各計算過程の時刻 (T)、ポテンシャル (P)、ポテンシャル勾配 (G) を示す。

Table 1 Friction Coefficients.

F(J) (4 1, NP)

30.5#, 80.5#, 56.2#, 76.9#, 49.6#, 28.7#, 59.3#, 87.5#, 99.8#, 58.8#
82.4#, 74.5#, 55.6#, 38.4#, 57.8#, 30.6#, 48.4#, 63.4#, 78.5#, 67.5#
34.5#, 75.4#, 86.5#, 54.8#, 45.8#, 43.2#, 87.5#, 47.5#, 56.6#, 78.4#
67.5#, 89.7#, 89.6#, 66.8#, 75.4#, 45.3#, 46.4#, 73.3#, 98.5#, 83.5#
29.8#, 38.5#, 58.5#, 45.7#, 68.9#, 76.9#, 55.8#, 68.4#, 79.8#, 63.4#
45.8#, 48.5#, 83.4#, 79.3#, 59.1#, 39.7#, 81.6#, 76.4#, 53.2#, 91.2#
34.8#, 49.2#, 77.2#, 48.9#, 45.6#, 77.1#, 28.4#, 82.8#, 54.9#, 66.7#
49.5#, 44.9#, 52.7#, 69.6#, 39.7#, 75.3#, 54.7#, 69.3#, 77.6#, 74.7#
88.6#, 76.5#, 69.6#, 54.8#, 76.2#, 46.9#, 38.7#, 30.7#, 87.4#, 52.7#
98.6#, 109.3#, 89.7#, 45.6#, 45.8#, 47.8#, 82.4#, 70.5#, 67.3#, 45.7#
55.7#, 87.4#, 65.8#, 88.9#, 37.8#, 73.6#, 38.5#, 88.2#, 86.4#, 76.4#
154.6#, 56.7#, 65.7#, 81.9#, 74.4#, 65.9#, 82.4#, 57.5#, 28.4#, 65.4#
47.9#, 55.9#, 76.6#, 65.5#, 49.9#, 56.7#, 74.8#, 47.4#, 76.9#, 49.6#
56.9#, 38.5#, 59.2#, 87.4#, 65.5#, 87.5#, 59.6#, 58.9#, 59.2#, 63.4#
87.4#, 56.4#, 73.5#, 76.5#, 59.6#, 45.7#, 123.8#, 38.7#, 75.4#, 83.6#
58.9#, 66.8#, 49.3#, 54.6#, 74.5#, 79.6#, 39.6#

Table 2 True Solution for Flow Rate Vector.

0.204	-0.422	1.031	0.921	0.500	0.289	0.101	-0.018	0.068	0.133
-0.209	-0.243	0.173	0.256	0.106	0.072	0.052	0.076	0.118	0.131
6.141	0.092	0.054	0.135	0.042	0.027	0.041	0.101	0.124	0.158
-0.120	0.338	0.320	0.244	0.128	0.038	0.085	-0.179	-0.222	0.636
1.078	0.398	0.109	0.034	0.135	-0.315	0.903	0.819	0.291	0.219
0.125	0.061	-0.053	-0.183	0.204	0.383	0.084	0.020	0.066	-0.076
0.119	0.117	0.115	0.176	0.005	0.022	0.079	0.089	0.121	0.107
0.059	0.099	-0.062	0.154	0.249	0.251	0.247	0.174	0.078	0.020
-0.099	-0.296	0.686	0.779	0.330	-0.173	0.077	0.065	0.099	0.490
0.847	0.352	0.113	0.049	0.069	0.006	0.070	0.117	0.312	0.289
0.129	0.099	0.014	0.128	0.181	0.088	0.000	-0.087	-0.295	-0.191
0.051	0.029	0.085	0.037	0.166	-0.778	0.208	0.035	0.055	0.034
-0.077	-0.267	0.260	0.096	0.036	0.058	0.093	0.294	0.686	0.409
0.213	0.072	0.019	0.053	0.104	0.196	0.091	-0.050	-0.088	0.062
0.070	0.141	0.160	0.062	-0.055	-0.226	0.217	-0.213	-0.034	0.076
0.078	-0.272	0.835	0.330	0.038	0.023	0.042			

SOR の場合、加速パラメーター  $\omega_c$  により収束性が異なるが、Table 4 にその相異を示す。補木流量法の場合と異なり、Mesh 流量法では、SOR は優れた収束性を示す。最適加速パラメーターの決定を除けば、手法の容易さ、配列容量、等の点でも有利な手法<sup>26)</sup>である。

SPG も非ゼロ要素のみの計算で効率的であるが、複雑なプログラムであるのでヤコビ係数を計算した後、既成のサブルーチンに接続するとよい<sup>27)</sup>。RDM では、70 次を 7 次方程式に還元した連立方程式を解いたが、残り

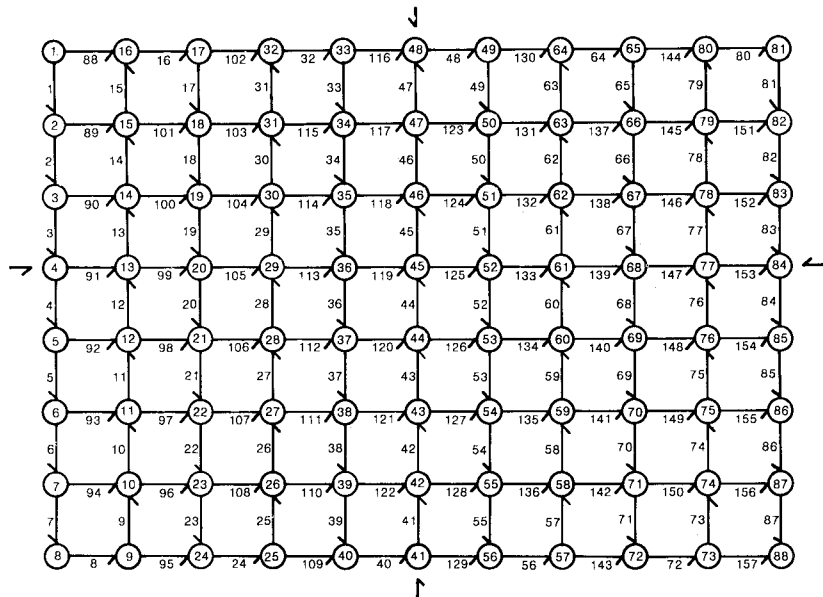


Fig. 2 System 2.

**Table 3** Comparison between Numerical Results with Newton-Raphson Algorithm.

		SPG	SOR	RDM	SYG
1-0	T	2 M 55 S	3 M 17 S	6 M 50 S	10 M 0 8
	P	182.156995	182.156995	182.156995	182.156995
1-1	T	5 M 40 S	5 M 56 S	9 M 49 S	20 M 8 S
	P	176.573151	176.573152	176.573151	176.574007
	G	29.47079	29.47080	29.47079	29.47079
1-2	T	8 M 25 S	8 M 25 S	12 M 48 S	30 M 8 S
	P	176.497991	176.497991	176.497990	176.498011
	G	1.733102	1.733119	1.733102	1.736636
1-3	T	11 M 10 S	10 M 33 S	15 M 47 S	40 M 8 S
	P	176.497575	176.497575	176.497576	175.497575
	G	0.111809	0.111814	0.111809	0.113975
1-4	T	13 M 55 S	12 M 3 S	18 M 46 S	50 M 7 S
	P	176.497575	176.497575	176.497575	175.497575
	G	2.317D-3	2.320D-3	2.317D-3	2.394D-3
1-5	T	16 M 40 S	13 M 11 S	21 M 45 S	60 M 7 S
	P	176.497575	176.497575	176.497575	176.497575
	G	1.003D-6	9.760D-5	1.003D-6	6.351D-6
1-6	T		(ω=1.5)		70 M 7 S
	P				176.497575
	G				1.8088D-7

**Table 4** Numerical result with SOR.

Acceleration Parameter	Calculation time
1.0 (Gauss-Seidel)	24 M 30 S
1.1	21 M 48 S
1.2	19 M 5 S
1.4	14 M 3 S
1.5	13 M 11 S
1.6	15 M 51 S
1.8	26 M 8 S
2.0	No Convergence

**Table 5** Non-linear Optimization problem.

		CG1 (With initial)	CG2 (No initial)	CRM (With initial)
1-0	T	4 M 40 S		4 M 40 S
	P	182.156995	(All $q_c = 0.5$ )	185.156995
1-10	T	12 M 15 S	11 M 46 S	25 M 59 S
	P	176.52170	178.12935	177.33028 (44.58)
1-20	T	21 M 37 S	20 M 03 S	46 M 15 S
	P	176.49773	176.56469	176.57852 (15.63)
1-30	T	30 M 51 S	28 M 52 S	64 M 54 S
	P	176.49758	176.49802	176.68506 (6.176)
1-40	T	39 M 57 S	37 M 37 S	83 M 33 S
	P	176.49758	176.49759	176.62837 (3.213)
1-48	T	47 M 1 S	55 M 36 S	611 M 12 30 S
	P	176.49758	176.49758	176.49845 (0.011)
		(1.2612D-6)	((1.7748D-6))	No convergence

の解を求めるときに、2次元配列を用いているのでゼロ要素の計算を完全には排除しきれていないので、より効率化し得る。SYG (No pivot) は他の3つの解法より、見劣りする。Table 5 に非線形最小化問題の各解法 (CG1, CG2, CRM) の計算結果を示す。CRM は、2 NG (140) 回の繰返し計算でも収束せず、綾の指摘を裏づけている。CG1 は、配列数の節減とベクトル演算

**Table 6**

	Number of Array	Example (System 2)
SPG	6 NP + 9.5 NG + 3 NE + 3 LW	4100 (NE=316, LW=517)
SOR	6 NP + 7 NG + 3 NE	2580 (NE=316)
CG1	11 NP + NS	1310

に特徴があるが、計算時間では、SYGよりは収束性がよいが他のSPG, SOR, RDMの数倍の時間を必要とする。CG2は、任意な初期値 ( $q_{c1}$  のすべての成分を0.5とした) より最小化計算した。初期値設定は有効といえる。Table中の(( ))内は、流量ベクトルの真値に対する誤差ノルムである。

Table 6には、1次元配列を基本とする解法の必要配列数の目安を示す。

NE=ヤコビ係数行列の非ゼロ要素の総数、LW=ガウス法で消去に用いる行列のある列ベクトルの非ゼロ要素数の総和<sup>27)</sup>。

### 3. 結 論

(1) 補木流量法と Mesh 流量法の関係をグラフ理論で定式化できた。

(2) 管網の有向グラフで節点・経路・閉路の番号づけの合理的方法を与え、既約接続行列のデータ入力の不要性、基本閉路行列の非ゼロ要素表の作成法と具体例を示し、疎行列演算の効率化を計り、実用上の指針を与えることができた。

(3) 管路の散逸エネルギーの最小化原理に基づく非線形最小化問題として、定常流解析の計算アルゴリズムを明示し、Newton-Raphson法の諸解法 (SOR, 還元解法, 対称疎行列性を利用したガウス法等) との比較を大規模管網の計算例を通して行い、次の点が明らかとなった。

- a) 最小の必要配列総数で計算可能である。
- b) 計算時間は、最良と評価し得る諸解法の2~4倍程度である。
- c) 最小化による解法としては、閉路エネルギーの誤差ベクトルの2乗ノルムを目的関数とする方法より、かなり優れている。

以上より、提示した最小化計算アルゴリズムは十分実用上の価値がある。

なお、計算はすべて PC 9801 で倍精度計算した。

### 参 考 文 献

- 1) 三野 徹：パイプラインの水力設計 (その3, 4), 農業土木学会誌, 49 (11), pp. 43~48, (12), pp. 69~78, 1981.
- 2) 常松芳昭：管路水輸送システムのグラフ理論的解析, 土木学会論文報告集, No.229, pp. 21~31, 1974.

- 3) 西川禎一・宇土顕彦：大規模管網計算の高速化と管路取出しモデルによる高精度化，水道協会雑誌，No. 603，pp. 2~16，1984.
- 4) 高桑哲男：閉管路方程式法による配水管網の解析，水道協会雑誌，No. 485，pp. 16~26，1975.
- 5) Epp, R. and Fowler, A. G. : Efficient Code For Steady-State Flows In Networks, J. of the Hydraulics Div. ASCE, Vol. 96, HY 1, pp. 43~56, 1970.
- 6) 高桑哲男：配水管網の解析と設計，森北出版，1978.
- 7) 綾日出教：配水施設のシミュレーションⅡ，水道協会雑誌，No. 568，pp. 29~44，1979.
- 8) Lemieux, P. F. : Efficient Algorithm For Distribution Networks, J. of the Hydraulics Div., ASCE, Vol. 98, HY 11, pp. 1911~1920, 1972.
- 9) Chandrashekar, M. and Stewart, K. H. : Sparsity Oriented Analysis of Large Pipe Network, Jour. of the Hydraulics Div., ASCE, Vol. 101, No. HY 4, pp. 341~355, 1974.
- 10) Maxwell, J. C. : Treatise on electricity and Magnetism, Vol. I, 3rd ed., p. 407, 1873.
- 11) Millar, W. : Some General Theorems for Nonlinear Systems Possesing Resistance, Phil. Mag., ( 7 ) 42, pp. 1150~1160, 1951.
- 12) Birkoff, G. and Diaz, J. B. : Non-linear Network Problems, Quart. Appl. Math., Vol. Ⅲ, No. 4, pp. 431~443, 1956.
- 13) Brayton, R. K. and Moser, J. K. : A Theory of Non-linear Networks I and II , Quart. Appl. Math., Vol. ⅡⅡ, No. 1 and No. 2, pp. 1~33 and pp. 81~104, 1964.
- 14) Onizuka, K. : Potential Function and Stability of Non-linear Water Distribution Systems, Theoretical and Appl. Mech., Tokyo Univ. Press, Vol. 23, pp. 375~399, 1975.
- 15) 鬼塚宏太郎：状態空間解析による枝わかれ管路のサージング減衰特性の評価，土木学会論文報告集，第 262 号，pp. 79~89，1977.
- 16) Collins, M., Cooper, L. et al. : Solving the Pipe Network Analysis Problem Using Optimization Techniques, Management Science, Vol. 24, No. 7, pp. 747~760, 1978.
- 17) Kesavan, H. K. and Chandrashekar, M. : Graphtheoretic Models for Pipe Network Analysis, Jour. of the Hydraulics Div., ASCE, Vol. 98, No. HY 2, pp. 345~364, 1972.
- 18) 前田 渡・伊東正安：現代グラフ理論の基礎，オーム社，1978.
- 19) Wood, D. J. and Charles, Carl, Q. A. : Hydraulic Network Analysis Using Linear Theory, Jour. of the Hydraulics Div., ASCE, Vol. 98, No. HY 7, pp. 1157~1170, 1972.
- 20) 戸川隼人：共役勾配法，教育出版，1977.
- 21) 今野 浩・山下 浩：非線型計画法，日科技連，1978.
- 22) 町出東一・小島紀男：パソコン BASIC 数値計算Ⅱ，東海大学出版会，1984.
- 23) Shamir, Uri. and Howard, Charles, D. D. : Water Distribution System Analysis, Jour. of the Hydraulics Div., ASCE, Vol. 94, No. HY 1, pp. 19~234, 1968.
- 24) 島田正志：管網系定常流解析の直接解法の問題点について，農業土木学会論文集，No. 116，pp. 41~47，1985.
- 25) 戸川隼人：マトリクスの数値計算，オーム社，1971.
- 26) 高桑哲男：配水管網流量計算法に関する研究Ⅱ，水道協会雑誌，No. 422，pp. 27~36，1969.
- 27) 村田健郎：小国 力・唐木幸比古：スーパーコンピューター（科学技術計算への適用），丸善，1985.

(1984. 9. 20・受付)