

微小振幅波による小口径柱体の振動に関する理論解

A THEORETICAL SOLUTION ABOUT VIBRATIONS OF A SMALL DIAMETER PILE DUE TO SMALL AMPLITUDE WAVES

石田 啓*

By Hajime ISHIDA

As a basic study to establish an analytical method about dynamic behaviours of various kind of pile structures and to clarify their characteristics of dynamic response to waves, a theoretical solution has been derived about the vibrations of a small diameter pile due to small amplitude waves. The solution presented here is more concise than the methods of numerical analysis, whereas the integral constants contained in this solution must be determined to satisfy the boundary conditions according to each situation. This paper treats the vertical pile both elongated from the bottom to the water surface and pierced the water surface. For the latter case, the validity of this solution has been verified by comparing the experimental data of the displacement.

1. 序 論

社会における消費活動の活発化に伴い、陸上の天然資源は急激に減少し、現在では、石油に代表される種々の鉱物資源の枯渇が危惧されるまでに至っている。このような状況を打開するための一方法として、海洋の資源・エネルギーの開発が考えられており、海底油田の開発のように、一部ではすでに実行に移されている。こういった海洋開発をさらに推進するためには、解明すべき問題点が多数あると考えられるが、土木工学的見地からすれば、海洋構造物を安全かつ合理的に設計・施工することが、1つの重要な課題である。

海洋構造物には種々さまざまなものがあるが、これを動力学的に分類すると、固定式石油掘削装置などの柱状構造物、浮遊式プラットフォームなどの浮体構造物、および防波堤などの重力式構造物に大別される¹⁾。ここでは、柱状構造物を対象とし、その基礎的研究として、単柱の振動変位の理論解を提示する。

柱状構造物の動的解析に関する研究は、1960年代に活発になったが、この頃のものに、プラットフォームを一自由度のばね・質点系モデルに置き換える解析法を提

示した Harleman ら²⁾の研究や、多自由度のばね・質点系にモデル化した構造物を、伝達マトリックス法で解析した Gaither ら³⁾の研究がある。次いで、Shubinshi ら⁴⁾は、一般化座標に変換した多質点構造物の変位を、マトリックス・モード解析法により算出するとともに、波と柱体との相互作用を考慮するため、水粒子速度から柱体の変位速度を差し引いたいわゆる相対水粒子速度を用いたモリソン公式を使用すべきであると述べたが、このときの慣性力項は、相対水粒子加速度のみによって表現されており、後述するような圧力勾配による力と付加質量による慣性力との和として表現したものではなかった。

Penzien ら⁵⁾も、当初は Shubinshi らと同じ波力式を用いたが、地震力と波力による沖浜構造物の振動解析法を提示した論文⁶⁾では、後者の波力式を用いている。

Taylor⁷⁾は、マトリックス・モード解析法により、構造物と流体および構造物と地盤との相互作用によるプラットフォームの振動解析を行い、付加質量係数は振動周期により変化し、従来用いられてきた1.0よりも、0.6程度の値が妥当であると述べている。Fish ら⁸⁾は、構造物と流体との相互作用の効果を、付加質量係数と減衰係数に含めた後、これらの係数を変位の関数として繰り返し計算を行ったが、これらの係数は、実用的には適当な定数で近似してよいと述べている。

* 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木建設工学科
(〒920 金沢市小立野 2-40-20)

国内におけるこれらの研究は、1970年代に入って盛んになったが、実際の構造物を対象としたものに、多質点系にモデル化したプラットフォームをモード解析により検討した中川ら⁹⁾の研究や、不規則波によるジャケットの波浪応答を取り扱った花村ら¹⁰⁾の研究があり、また単円柱の振動特性を、主に実験的に考察したものに、本多・光易¹¹⁾の研究や、櫛木・中村らの一連の研究がある^{12)~14)}。特に櫛木らは、波の進行方向の振動とともに、揚力による振動を考究し、円柱の固有振動周期の整数倍の周期をもつ波によって共振が発生する現象を見出している。

著者は、Gaither らの提案した伝達マトリックス法³⁾を実際の波浪応答解析に利用し、柱体¹⁵⁾やプラットフォームの振動特性¹⁶⁾を考究するとともに、構造特性マトリックス法¹⁷⁾を用いた不規則波による振動変位の計算法を提示し¹⁸⁾、いずれも、付加質量係数と減衰定数の値を適当に選定するならば、振動変位の計算値は、実験値とよく一致することを実証している。

椎貝ら¹⁹⁾は、下端部がヒンジ構造である柱体と球とが組み合わさった構造物の波浪応答について実験を行い、回転に関する一自由度の振動方程式の解と比較した結果、付加質量係数や抵抗係数などは、特異な値を用いる必要はなく、実際の設計には、従来の実験値などから推定した値を用いてよいと結論付けている。

Nagaya²⁰⁾は、伝達マトリックス法とラプラス変換およびフーリエ変換を用い、断面の変化する柱体の振動変位を計算したが、このときの波の諸量に、クノイド波理論を用いた点が特徴的である。このような、有限振幅波理論を用いる手法は、著者によっても実行されているが、ストークス波理論を用いる場合は、構造解析法としては、伝達マトリックス法が便利であり、クノイド波などのようにフーリエ級数展開が容易でない波は、構造特性マトリックス法が適しているといえる^{21)~24)}。

このような柱体の動的解析に関する研究は、上記以外にも多数あるが、考究すべき課題を要約すると、次のようにまとめることができるであろう。

- 1) 主に流体力学的観点から、付加質量係数、減衰係数、抗力係数および慣性係数の変化特性を解明する。
- 2) 実験により、構造物の動力学特性を検討するとともに、海洋に適したより簡潔な構造解析法を確立する。
- 3) 外力の不規則性や材料強度のばらつきなどを考慮した信頼性設計の考え方を導入し、安全性と経済性の両面を満足する設計法を確立する。

本研究は、2)の範ちゅうに属するものであるが、波力式としてモリソン公式が適用される小口径柱体を対象とし、微小振幅波による柱体の振動変位の理論解を誘導

する。この解の妥当性は、模型実験による測定値と比較することにより検証する。

2. 柱体の振動の理論

(1) 理論式の無次元化

図-1に示すように、水平床の上に x 軸をとり、鉛直上向きに z 軸をとる。 x 軸方向の柱の変位を ξ 、 x 軸方向の水粒子速度を u 、その加速度を \dot{u} で示す。柱に働く x 軸方向の波力を、柱の変位速度に対する相対的な水粒子速度を用いたモリソン公式で与えると、柱の横振動の方程式は、

$$A\rho\xi_{tt} + c_0\xi_t + EI\xi_{zzzz} = \frac{1}{2}C_D\rho_w D(u - \xi_t)|u - \xi_t| + A\rho_w\dot{u} + (C_M - 1)A\rho_w(\dot{u} - \xi_{tt}) \dots \dots \dots (1)$$

と表わすことができる。ここに、 t は時間、 ρ および ρ_w は柱および水の密度、 c_0 は減衰定数、 D は柱の幅（円柱の場合は直径）、 A は柱の断面積、 EI は柱の曲げ剛性、 C_M は慣性係数、 C_D は抗力係数であり、 ξ の右下添字の t および z は、それぞれの変数による偏微分を示す。

式(1)右辺の波力は、Penzienらが参考文献6)で用いたものと同一であり、第1項は相対的な水粒子速度により生じる抗力、第2項は圧力勾配による慣性力、第3項は付加質量力である。

式(1)は、 $u - \xi_t > 0$ のとき、

$$(A\rho + C_a A\rho_w)\xi_{tt} + \left\{ c_0 + C_D\rho_w D\left(u - \frac{1}{2}\xi_t\right) \right\} \xi_t + EI\xi_{zzzz} = \frac{1}{2}C_D\rho_w D u^2 + C_M\rho_w A\dot{u}$$

となり、 $u - \xi_t < 0$ のとき、

$$(A\rho + C_a A\rho_w)\xi_{tt} + \left\{ c_0 - C_D\rho_w D\left(u - \frac{1}{2}\xi_t\right) \right\} \xi_t + EI\xi_{zzzz} = -\frac{1}{2}C_D\rho_w D u^2 + C_M\rho_w A\dot{u}$$

となるが、左辺第2項の減衰係数に含まれる ξ_t を、 u に比べて小さいと仮定する、すなわち $u \gg \xi_t$ と仮定すると、結局式(1)は、

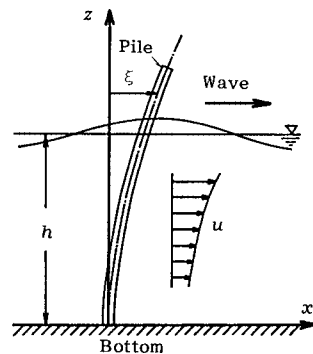


図-1 座標系

$$(A\rho + C_a A \rho_w) \xi_{tz} + (c_0 + C_D \rho_w D |u|) \xi_t + EI \xi_{zzzz} = \frac{1}{2} C_D \rho_w D u |u| + C_M \rho_w A \dot{u} \dots \dots \dots (2)$$

のように近似化され、方程式は、 ξ に関して線形となる。ここに、 C_a は付加質量係数であり、 $C_a = C_M - 1$ である。また式 (2) 右辺は、静止した柱体に対するモリソン公式と同一になる。なお、 $u \gg \xi_t$ の仮定は、常に妥当なものとは限らず、たとえば共振時の変位がきわめて大きくなるような場合には、やはり ξ_t を含む非線形減衰力項を含めた取り扱いが必要と考えられるが²⁰⁾、本論では、このような場合は除外し、式 (2) で表わされる振動のみを扱うこととする。

次に、微小振幅波理論を用い、 $x=0$ での水面変動を、
 $\eta = a \cos \sigma t \dots \dots \dots (3)$

で与えると、 u および \dot{u} は、

$$u = a\sigma(\cosh kz / \sinh kh) \cos \sigma t \dots \dots \dots (4)$$

$$\dot{u} = -a\sigma^2(\cosh kz / \sinh kh) \sin \sigma t \dots \dots \dots (5)$$

となる。ここに a は波の振幅、 σ は角周波数、 k は波数、 h は水深である。

式 (4) および式 (5) の u および \dot{u} を、式 (2) に代入し、 σ 、 k および D を用いて、 t 、 z 、 h および ξ を、
 $t' = \sigma t$ 、 $z' = kz$ 、 $h' = kh$ 、 $\xi' = \xi / D \dots \dots \dots (6)$

と無次元化すると、式 (2) は、

$$m \xi'_{t't'} + c \xi'_{t'} + \xi'_{z'z'z'z'} = -c_m \cosh z' \sin t' + c_a (\cosh 2z' + 1) \cos t' |\cos t'| \dots \dots \dots (7)$$

となる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\sigma^2}{k^4 EI} (A\rho + C_a A \rho_w) \\ c &= \frac{\sigma}{k^4 EI} (c_0 + C_D \rho_w D |u|) \\ c_m &= \frac{a\sigma^2}{k^4 EID \sinh h'} C_M \rho_w A \\ c_a &= \frac{a^2 \sigma^2}{k^4 EID 2 \sinh^2 h'} \frac{1}{2} C_D \rho_w D \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

であり、これらはすべて無次元量である。

式 (7) は、 ξ' に関して線形であるため、右辺の波力による変位は、慣性力および抗力によるそれぞれの変位を重ね合わせたものになる。以下、各外力項ごとに方程式を解くが、この場合、式 (8) よりわかるように、 c は、定数 c_0 のほかに $|u|$ を含んでおり、 t' および z' の関数となる。しかし、本来 c_0 そのものも便宜的に定数とみなしたものであり、 $|u|$ の部分のみを変数として厳密に取り扱う必要はないと考えられる。したがって、ここでは、 $|u|$ の代わりに、 $|u|$ の 1 周期 T にわたる鉛直方向の平均値

$$|\bar{u}| = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{h} \int_0^h |u| dz dt = \frac{2a\sigma}{\pi h'} \dots \dots \dots (9)$$

を用い、 c を定数として扱う。

(2) 理論解の誘導

慣性力項による振動方程式は、

$$m \xi'_{t't'} + c \xi'_{t'} + \xi'_{z'z'z'z'} = -c_m \cosh z' \sin t' \dots \dots (10)$$

となる。ここでは、過渡的な解は対象とせず、定常状態になった後の周期解のみを扱うが、式 (10) 右辺の $\sin t'$ は $e^{it'}$ に置き換えると、解は、 z' と t' との変数分離形である

$$\xi'(z', t') = Z_M(z') e^{it'} \dots \dots \dots (11)$$

の形に仮定することができる。式 (11) を式 (10) に代入すると、 $Z_M(z')$ に関して、

$$Z_{Mz'z'z'z'} - (m - ic)Z_M = -c_m \cosh z' \dots \dots \dots (12)$$

が得られる。

式 (12) の特解 Z_{Ms} および同次解 Z_{M0} は、

$$Z_{Ms}(z') = \frac{(m-1) + ic}{(m-1)^2 + c^2} c_m \cosh z' \dots \dots \dots (13)$$

$$Z_{M0}(z') = f_1 e^{i\mu - i\nu z'} + f_2 e^{-(\mu + i\nu)z'} + f_3 e^{(\nu + i\mu)z'} + f_4 e^{-(\nu - i\mu)z'} \dots \dots \dots (14)$$

となる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \sqrt{m} \sqrt{\sqrt{\lambda} + \sqrt{(\lambda+1)/2}} / 2 \\ \nu &= \sqrt{m} \sqrt{\sqrt{\lambda} - \sqrt{(\lambda+1)/2}} / 2 \\ \lambda &= \sqrt{1 + (c/m)^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

であり、 $f_1 \sim f_4$ は複素数の積分定数である。

以上より、慣性力項による解は、式 (13) および式 (14) を用いて、

$$\xi'(z', t') = Z_M(z') e^{it'} = [Z_{M0}(z') + Z_{Ms}(z')] e^{it'} \dots \dots (16)$$

で与えられる。ただし、式 (10) 右辺の位相は $\sin t'$ であるため、これに対する変位は、式 (16) の虚部となる。

抗力項による振動方程式は、式 (7) 右辺の $\cos t' |\cos t'|$ の部分を、

$$\cos t' |\cos t'| = \frac{8}{3\pi} \cos t' + \frac{8}{15\pi} \cos 3t' - \frac{8}{105\pi} \cos 5t' + \dots \dots \dots (17)$$

のようにフーリエ級数に展開し、その第 3 項までを用いると、

$$m \xi'_{t't'} + c \xi'_{t'} + \xi'_{z'z'z'z'} = \sum_{n=1,3,5} Q_n (\cosh 2z' + 1) \cos n t' \dots \dots \dots (18)$$

と表わすことができる。ここに、 $n=1, 3, 5$ であり、

$$Q_1 = \frac{8}{3\pi} c_a, Q_3 = \frac{8}{15\pi} c_a, Q_5 = -\frac{8}{105\pi} c_a \dots \dots (19)$$

である。

式 (18) の右辺が、一般項 $Q_n (\cosh 2z' + 1) \cos n t'$ の場合の解を求めるが、慣性力項の場合と同様、解を

$$\xi'_n(z', t') = Z_{Dn}(z') e^{in t'} \dots \dots \dots (20)$$

の形に仮定すると、 $Z_{Dn}(z')$ に関して、

$$-n^2 m Z_{Dn} + in c Z_{Dn} + Z_{Dnz'z'z'z'} = Q_n (\cosh 2z' + 1) \dots \dots \dots (21)$$

が得られる。式 (21) の特解 Z_{Dns} および同次解 Z_{Dn0} は、

$$Z_{Dns}(z') = \frac{(2^4 - n^2 m) - inc}{(2^4 - n^2 m)^2 + (nc)^2} Q_n \cosh 2z' - \frac{n^2 m + inc}{n^4 m^2 + n^2 c^2} Q_n \dots\dots\dots (22)$$

$$Z_{Dn0}(z') = f_{n1} e^{(\mu_n - i\nu_n)z'} + f_{n2} e^{(-\mu_n + i\nu_n)z'} + f_{n3} e^{(\nu_n + i\mu_n)z'} + f_{n4} e^{(-\nu_n - i\mu_n)z'} \dots\dots\dots (23)$$

となる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \mu_n &= \sqrt[4]{n^2 m} \sqrt{\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{(\lambda_n + 1)/2}} / 2 \\ \nu_n &= \sqrt[4]{n^2 m} \sqrt{\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{(\lambda_n + 1)/2}} / 2 \\ \lambda_n &= \sqrt{1 + |c/(nm)|^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

であり、 $f_{n1} \sim f_{n4}$ は複素数の積分定数である。

以上より、式 (18) で与えられる抗力項による解は、式 (22) および (23) を用いて、

$$\xi'(z', t) = \sum_{n=1,3,5} Z_{Dn}(z') e^{int'} = \sum_{n=1,3,5} [Z_{Dn0}(z') + Z_{Dns}(z')] e^{int'} \dots\dots\dots (25)$$

で与えられる。ただし、式 (18) の右辺の位相は、 $\cos nt'$ であるため、これらに対する変位は、式 (25) の実部となる。

以上より、式 (7) の解は、式 (16) および式 (25) の和として、次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \xi'(z', t) &= \text{Im} \{ Z_M(z') e^{it'} \} + \text{Re} \left\{ \sum_{n=1,3,5} Z_{Dn}(z') e^{int'} \right\} \\ &= \text{Im} \left[f_1 e^{(\mu - i\nu)z'} + f_2 e^{(-\mu + i\nu)z'} + f_3 e^{(\nu + i\mu)z'} + f_4 e^{(-\nu - i\mu)z'} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m-1) + ic}{(m-1)^2 + c^2} c_m \cosh z' \right] e^{it'} \\ &\quad + \text{Re} \left\{ \sum_{n=1,3,5} \left[f_{n1} e^{(\mu_n - i\nu_n)z'} + f_{n2} e^{(-\mu_n + i\nu_n)z'} + f_{n3} e^{(\nu_n + i\mu_n)z'} + f_{n4} e^{(-\nu_n - i\mu_n)z'} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(2^4 - n^2 m) - inc}{(2^4 - n^2 m)^2 + (nc)^2} Q_n \cosh 2z' - \frac{n^2 m + inc}{n^4 m^2 + n^2 c^2} Q_n \right] e^{int'} \right\} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ここに、 m, c, c_m および c_a は式 (8) に、 μ, ν および λ は式 (15) に、 Q_n は式 (19) に、 μ_n, ν_n および λ_n は式 (24) に示したとおりであり、 $f_1 \sim f_4$ および $f_{n1} \sim f_{n4}$ は境界条件から定められる積分定数である。

(3) 柱体の上端が静水面に一致する場合の積分定数

図-2 に示すように、まず、柱体の上端が静水面に一致する鉛直柱体を対象とし、この場合の積分定数 $f_1 \sim f_4$ および $f_{n1} \sim f_{n4}$ を求める。この際、水面の上下動に伴い、波力の作用範囲が変動する効果は無視し、波力は、常に静水面の高さまで作用すると仮定する。

柱体の境界条件は、水底 $z'=0$ において、変位および変位角がゼロ、および水面 $z'=h'$ において、曲げモーメントおよびせん断力がゼロである。すなわち、式 (26)

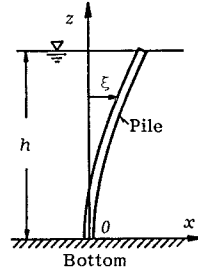


図-2 柱体の上端が静水面に一致する場合

の $\xi'(z', t)$ を用いると、

$$\left. \begin{aligned} \xi'(z', t) &= 0, \quad \xi'_z(z', t) = 0 \quad ; z'=0 \\ \xi'_{zz}(z', t) &= 0, \quad \xi'_{zzz}(z', t) = 0 \quad ; z'=h' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

で与えられる。これらの境界条件は、時間 t' にかかわらず成立しなければならないため、式 (26) の慣性力による変位および抗力による変位の各項ごとに式 (27) が成立しなければならない。すなわち、慣性力による変位の部分に対して、

$$\left. \begin{aligned} Z_M(0) &= 0, \quad Z_{Mz}(0) = 0 \\ Z_{Mzz}(h') &= 0, \quad Z_{Mzzz}(h') = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

が、また抗力の各成分による変位の部分に対して、

$$\left. \begin{aligned} Z_{Dn}(0) &= 0, \quad Z_{Dnz}(0) = 0 \\ Z_{Dnzz}(h') &= 0, \quad Z_{Dnzzz}(h') = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

が成立する。特に、抗力による変位に対しては、 n を 1, 3, 5 とした各場合ごとに、式 (29) が成立する。

式 (28) を行列表示すると、

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_1^2 e^{s_1 h'} & s_2^2 e^{s_2 h'} & s_3^2 e^{s_3 h'} & s_4^2 e^{s_4 h'} \\ s_1^3 e^{s_1 h'} & s_2^3 e^{s_2 h'} & s_3^3 e^{s_3 h'} & s_4^3 e^{s_4 h'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ P \cosh h' \\ P \sinh h' \end{bmatrix} \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $s_1 \sim s_4$ および P は、

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \mu - i\nu, \quad s_2 = -\mu + i\nu \\ s_3 &= \nu + i\mu, \quad s_4 = -\nu - i\mu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

$$P = \frac{(1-m) - ic}{(1-m)^2 + c^2} c_m \dots\dots\dots (32)$$

である。式 (30) 左辺の行列を、以下 A と表わすと、 $f_1 \sim f_4$ は、式 (30) の両辺に、 A の逆行列を左から乗ずることにより求めることができるといえるが、 A および式 (32) の P が複素数であるため、実計算に際しては、式 (30) をそれぞれ実部および虚部に対して成立する式に書き改めた後、 $f_1 \sim f_4$ の実部と虚部を求めなければならない。すなわち、 $f_j (j=1 \sim 4)$ の実部および虚部をそれぞれ \hat{f}_j および \check{f}_j で示すと、これらは、 A の実部 \hat{A}

と虚部 \check{A} および P の実部 \hat{P} と虚部 \check{P} を用いることにより、式 (33) から求めることができる。

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \text{実部} \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \text{虚部} \\ \downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \\ \hat{f}_4 \\ \check{f}_1 \\ \check{f}_2 \\ \check{f}_3 \\ \check{f}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A} & -\check{A} \\ \check{A} & \hat{A} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{P} \\ 0 \\ \hat{P} \cosh h' \\ \hat{P} \sinh h' \\ \check{P} \\ 0 \\ \check{P} \cosh h' \\ \check{P} \sinh h' \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \text{実部} \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \text{虚部} \\ \downarrow \end{matrix} \quad (33)$$

次に、 $f_n \sim f_{n4}$ ($n=1, 3, 5$) を求めるため、式 (29) を行列表示すると、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ s_{n1} & s_{n2} & s_{n3} & s_{n4} \\ s_{n1}^2 e^{s_{n1}h'} & s_{n2}^2 e^{s_{n2}h'} & s_{n3}^2 e^{s_{n3}h'} & s_{n4}^2 e^{s_{n4}h'} \\ s_{n1}^3 e^{s_{n1}h'} & s_{n2}^3 e^{s_{n2}h'} & s_{n3}^3 e^{s_{n3}h'} & s_{n4}^3 e^{s_{n4}h'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n1} \\ f_{n2} \\ f_{n3} \\ f_{n4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_n + R_n \\ 0 \\ 2^2 P_n \cosh 2h' \\ 2^3 P_n \sinh 2h' \end{bmatrix} \quad (34)$$

となる。ここに、

$$\left. \begin{matrix} s_{n1} = \mu_n - i\nu_n, & s_{n2} = -\mu_n + i\nu_n \\ s_{n3} = \nu_n + i\mu_n, & s_{n4} = -\nu_n - i\mu_n \end{matrix} \right\} \quad (35)$$

$$P_n = \frac{(n^2 m - 2)^2 + inc}{(n^2 m - 2)^2 + (nc)^2} Q_n, \quad R_n = \frac{n^2 m + inc}{(n^2 m)^2 + (nc)^2} Q_n \quad (36)$$

である。 $f_m \sim f_{m4}$ は、式 (34) 左辺の行列を A_n と表わすと、 $f_1 \sim f_4$ の場合と同様、

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \text{実部} \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \text{虚部} \\ \downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_{n1} \\ \hat{f}_{n2} \\ \hat{f}_{n3} \\ \hat{f}_{n4} \\ \check{f}_{n1} \\ \check{f}_{n2} \\ \check{f}_{n3} \\ \check{f}_{n4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_n & -\check{A}_n \\ \check{A}_n & \hat{A}_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{P}_n + \hat{R}_n \\ 0 \\ 2^2 \hat{P}_n \cosh 2h' \\ 2^3 \hat{P}_n \sinh 2h' \\ \check{P}_n + \check{R}_n \\ 0 \\ 2^2 \check{P}_n \cosh 2h' \\ 2^3 \check{P}_n \sinh 2h' \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \text{実部} \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \text{虚部} \\ \downarrow \end{matrix} \quad (37)$$

から求めることができる。ここに、 \hat{A} および \check{A} は、それぞれ、実部および虚部を示すことはいうまでもない。

以上より、上端が静水面に一致する柱体の振動変位は、式 (33) の $f_1 \sim f_4$ および式 (37) の $f_m \sim f_{m4}$ を式 (26) に適用することにより、算定することができる。

(4) 柱体の上部が静水面上に出る場合の積分定数

次に、柱体の上部が静水面上に出る場合を取り扱うが、図-3に示すように、水底から柱体の固定端までの高さおよび柱体上端までの高さを、それぞれ b および l と

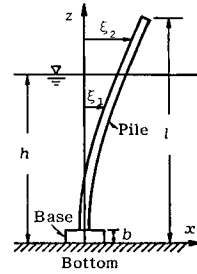


図-3 柱体の上部が静水面上に出る場合

し、これらを、波数 k を用いて、 $b' = kb$ 、 $l' = kl$ のように無次元化する。

水中部分の柱体の振動変位は、式(26)で与えられるが、以下、この変位 ξ' を ξ'_1 と記し、空中部分の振動変位を ξ'_2 で示すと、 ξ'_2 は、式 (1) 右辺の外力をゼロとしたときの解であり、

$$\begin{aligned} \xi'_2(z', t') = & \text{Im} \{ f_5 e^{s_5 z'} + f_6 e^{s_6 z'} + f_7 e^{s_7 z'} + f_8 e^{s_8 z'} \} e^{it'} \\ & + \text{Re} \left\{ \sum_{n=1,3,5} (f_{n5} e^{s_{n5} z'} + f_{n6} e^{s_{n6} z'} + f_{n7} e^{s_{n7} z'} \right. \\ & \left. + f_{n8} e^{s_{n8} z'} \right\} e^{int'} \quad (38) \end{aligned}$$

で与えられる。ここに、 $s_5 \sim s_8$ および $s_{n5} \sim s_{n8}$ は、それぞれ式 (31) の $s_1 \sim s_4$ および式 (35) の $s_{n1} \sim s_{n4}$ と全く同じ形になるが、空中部分の柱では、付加質量は存在せず、また減衰力の $|u|$ を含む部分は生じない。したがって、空中部分の柱に対しては、式(15)および式(24)に含まれる m および c は、式 (8) の m および c において、それぞれ、 $C_a = 0$ および $|u| = 0$ とした値を用いなければならない。なお、水中部分の柱に対し、 c の中に含まれる式 (9) の $|u|$ は、固定端の高さが b' の場合、

$$|u| = \frac{2 a \sigma (\sinh h' - \sinh b')}{\pi (h' - b') \sinh h'} \quad (39)$$

となる。

境界条件は、埋め込み端 $z' = b'$ において、変位と変位角がゼロ、 ξ'_1 と ξ'_2 の接続部 $z' = h'$ において、変位、変位角、曲げモーメントおよびせん断力が連続すること、および、自由端 $z' = l'$ において、曲げモーメントとせん断力がゼロという8つの条件となり、これらは、式(26)の ξ'_1 と式 (38) の ξ'_2 を用いると、

$$\left. \begin{matrix} \xi'_1(b', t') = 0, & \xi'_{1z}(b', t') = 0, & \xi'_1(h', t') = \xi'_2(h', t') \\ \xi'_{1z}(h', t') = \xi'_{2z}(h', t'), & \xi'_{1zz}(h', t') = \xi'_{2zz}(h', t') \\ \xi'_{1zzz}(h', t') = \xi'_{2zzz}(h', t'), & \xi'_{1zz}(l', t') = 0 \\ \xi'_{2zzz}(l', t') = 0 \end{matrix} \right\} \quad (40)$$

となる。式 (40) は、2.(3) の場合と同様、慣性力による変位に対して、式 (41) のように行列表示される。式中の $f_1 \sim f_8$ は、2.(3) において、式 (30) から式 (33)

を求めた方法と全く同様にして、式 (41) から求めることができる。

抗力による変位に対しては、式 (40) は、式 (42) のように行列表示される。式中の $f_{n1} \sim f_{n8} (n=1, 3, 5)$ は、2. (3) において、式 (34) から式 (37) を求めた方法

と全く同様にして、式 (42) から求めることができる。

以上より、上部が静水面上に出る柱体の振動変位は、式 (41) から算出される $f_1 \sim f_8$ および式 (42) から算出される $f_{n1} \sim f_{n8}$ を、式 (26) の $f_1 \sim f_4$ と $f_{n1} \sim f_{n4}$ および式 (38) の $f_5 \sim f_8$ と $f_{n5} \sim f_{n8}$ に代入することにより、算定することができる。

$$\begin{pmatrix} e^{s_1 b'} & e^{s_2 b'} & e^{s_3 b'} & e^{s_4 b'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 e^{s_1 b'} & s_2 e^{s_2 b'} & s_3 e^{s_3 b'} & s_4 e^{s_4 b'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{s_1 h'} & e^{s_2 h'} & e^{s_3 h'} & e^{s_4 h'} & -e^{s_5 h'} & -e^{s_6 h'} & -e^{s_7 h'} & -e^{s_8 h'} \\ s_1 e^{s_1 h'} & s_2 e^{s_2 h'} & s_3 e^{s_3 h'} & s_4 e^{s_4 h'} & -s_5 e^{s_5 h'} & -s_6 e^{s_6 h'} & -s_7 e^{s_7 h'} & -s_8 e^{s_8 h'} \\ s_1^2 e^{s_1 h'} & s_2^2 e^{s_2 h'} & s_3^2 e^{s_3 h'} & s_4^2 e^{s_4 h'} & -s_5^2 e^{s_5 h'} & -s_6^2 e^{s_6 h'} & -s_7^2 e^{s_7 h'} & -s_8^2 e^{s_8 h'} \\ s_1^3 e^{s_1 h'} & s_2^3 e^{s_2 h'} & s_3^3 e^{s_3 h'} & s_4^3 e^{s_4 h'} & -s_5^3 e^{s_5 h'} & -s_6^3 e^{s_6 h'} & -s_7^3 e^{s_7 h'} & -s_8^3 e^{s_8 h'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_5^2 e^{s_5 l'} & s_6^2 e^{s_6 l'} & s_7^2 e^{s_7 l'} & s_8^2 e^{s_8 l'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_5^3 e^{s_5 l'} & s_6^3 e^{s_6 l'} & s_7^3 e^{s_7 l'} & s_8^3 e^{s_8 l'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \cosh b' \\ P \sinh b' \\ P \cosh h' \\ P \sinh h' \\ P \cosh h' \\ P \sinh h' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\begin{pmatrix} e^{s_{n1} b'} & e^{s_{n2} b'} & e^{s_{n3} b'} & e^{s_{n4} b'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{n1} e^{s_{n1} b'} & s_{n2} e^{s_{n2} b'} & s_{n3} e^{s_{n3} b'} & s_{n4} e^{s_{n4} b'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{s_{n1} h'} & e^{s_{n2} h'} & e^{s_{n3} h'} & e^{s_{n4} h'} & -e^{s_{n5} h'} & -e^{s_{n6} h'} & -e^{s_{n7} h'} & -e^{s_{n8} h'} \\ s_{n1} e^{s_{n1} h'} & s_{n2} e^{s_{n2} h'} & s_{n3} e^{s_{n3} h'} & s_{n4} e^{s_{n4} h'} & -s_{n5} e^{s_{n5} h'} & -s_{n6} e^{s_{n6} h'} & -s_{n7} e^{s_{n7} h'} & -s_{n8} e^{s_{n8} h'} \\ s_{n1}^2 e^{s_{n1} h'} & s_{n2}^2 e^{s_{n2} h'} & s_{n3}^2 e^{s_{n3} h'} & s_{n4}^2 e^{s_{n4} h'} & -s_{n5}^2 e^{s_{n5} h'} & -s_{n6}^2 e^{s_{n6} h'} & -s_{n7}^2 e^{s_{n7} h'} & -s_{n8}^2 e^{s_{n8} h'} \\ s_{n1}^3 e^{s_{n1} h'} & s_{n2}^3 e^{s_{n2} h'} & s_{n3}^3 e^{s_{n3} h'} & s_{n4}^3 e^{s_{n4} h'} & -s_{n5}^3 e^{s_{n5} h'} & -s_{n6}^3 e^{s_{n6} h'} & -s_{n7}^3 e^{s_{n7} h'} & -s_{n8}^3 e^{s_{n8} h'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{n5}^2 e^{s_{n5} l'} & s_{n6}^2 e^{s_{n6} l'} & s_{n7}^2 e^{s_{n7} l'} & s_{n8}^2 e^{s_{n8} l'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{n5}^3 e^{s_{n5} l'} & s_{n6}^3 e^{s_{n6} l'} & s_{n7}^3 e^{s_{n7} l'} & s_{n8}^3 e^{s_{n8} l'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n1} \\ f_{n2} \\ f_{n3} \\ f_{n4} \\ f_{n5} \\ f_{n6} \\ f_{n7} \\ f_{n8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n \cosh 2 b' + R_n \\ 2 P_n \sinh 2 b' \\ P_n \cosh 2 h' + R_n \\ 2 P_n \sinh 2 h' \\ 2^2 P_n \cosh 2 h' \\ 2^3 P_n \sinh 2 h' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

3. 上部が静水面上に出る円柱の振動変位の結果

(1) 係数の選定

振動変位を算定するために、抗力係数 C_D 、慣性係数 C_M 、付加質量係数 C_a および減衰係数 c の値を与える必要があるが、これらについては、1. 序論で述べたように、今後さらに検討すべき点が残されている。たとえば、 C_D および C_M は、振動流を用いた Sarpkaya²⁶⁾ の実験結果が参考になるが、水粒子の運動がさらに複雑な波動場では、これらの値は、常に Reynolds 数と Heulegan-Carpenter 数のみによって決定されるとは限らないであろう²⁷⁾。付加質量は、静水中で振動する円柱の場合の値⁷⁾ および波による共振時の実験値²⁵⁾ から推察すると、振動

変位の増加に伴って減少する傾向があり、剛体円柱に対するポテンシャル流理論の値である $C_a=1.0$ が常に妥当であるとはいえない。減衰力は、構造物内部の粘性減衰、基礎地盤へのエネルギー流出による逸散減衰²⁸⁾、流体と構造物との相互作用による減衰および振動方程式の線型化に伴う誤差の影響^{8), 29)} などが含まれるため、 c の値を予測することは困難であり、実用上は、変位などの計算値と実験値とがよりよく一致するように、試行錯誤により決定せざるを得ないであろう。

このように、各係数の値は、対象とする状況に応じて、適宜変える必要があるが、ここでは、最も広く使用されている値である $C_D=1.0$ 、 $C_M=2.0$ 、 $C_a=1.0$ を用いた結果を示すこととする。また、 c は、本研究では式 (8)

を使用するが、式中の $|\mathbf{u}|$ は式 (39) の $|\bar{\mathbf{u}}|$ を、また c_0 は、実験に用いる模型円柱を空中で自由振動させたときの減衰曲線から求めた値 $c_0 = 2.93 \times 10^{-3} \text{ gf} \cdot \text{s}/\text{cm}^2$ ($2.87 \times 10^{-2} \text{ mN} \cdot \text{s}/\text{cm}^2$) を用いた。

(2) 理論計算の一例

上部が静水面上に出る場合の円柱の振動変位の計算例を示すが、計算条件は、模型実験の条件と同一とした。

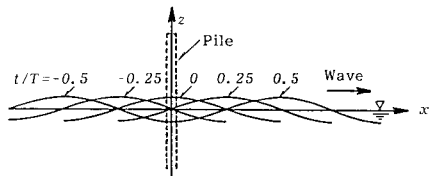


図-4 波の位相 t/T のとり方

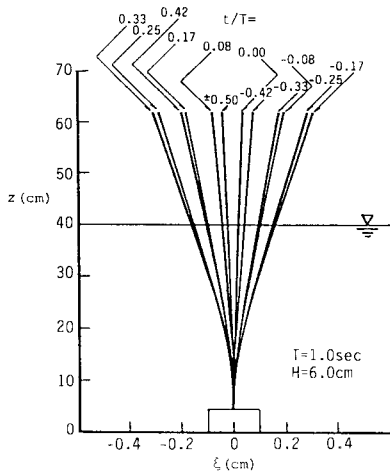


図-5 円柱のたわみ曲線

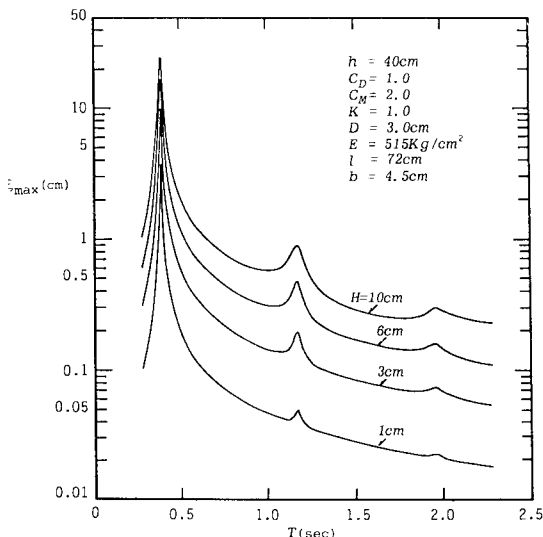


図-6 円柱の共振特性

すなわち、水深 h が 40 cm、水底から円柱上端までの高さ l が 62 cm、固定端の高さ b が 4.5 cm、円柱の直径 D が 3 cm、円柱の比重が 1.12、円柱の曲げ剛性 EI が $2.05 \times 10^3 \text{ kgf} \cdot \text{cm}^2$ (20.1 kNcm^2) である。

図-4に、位相 t/T のとり方を示す。図-5には、周期 T が 1.0 s で波高 H が 6 cm のときの、各位相ごとの柱のたわみ曲線を示すが、常に柱の上端の変位が最大となることがわかる。

図-6は、横軸に波の周期 T をとり、縦軸に円柱上端の変位の1周期内の最大値 ξ_{max} をとることにより、各波高ごとの共振特性を示したものであるが、 $T = 0.39 \text{ s}$ の波で共振が発生するとともに、その3倍の周期の $T = 1.17 \text{ s}$ および5倍の周期の $T = 1.96 \text{ s}$ の波によっても一種の共振が生じる。これは、式 (26) に含まれる項が、 $e^{i\omega t}$ とともに、 $e^{i3\omega t}$ および $e^{i5\omega t}$ の時間項をもつためである。このように、モリソン公式の水粒子速度に微小振幅波理論を適用し、かつ波力の作用領域を静水面までとした場合は、柱体の共振は、固有振動周期の奇数倍の周期の波によって発生するが^{[12],[13]}、実験によると、偶数倍の周期の波によっても共振が生じる。この現象は、本理論から説明することはできないが、波力の作用領域を変動水面までとするか^[13]、あるいは、ストークス波理論を用いる方法^[24]により、説明できる。

図-7は、波高 6 cm の波の周期を順次変化させた場合、円柱上端の変位 ξ の位相変化がどのように変わる

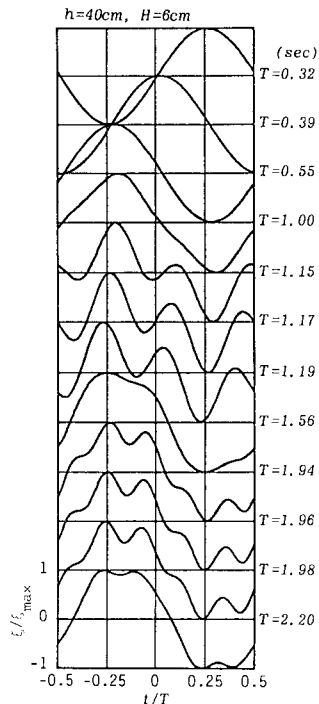
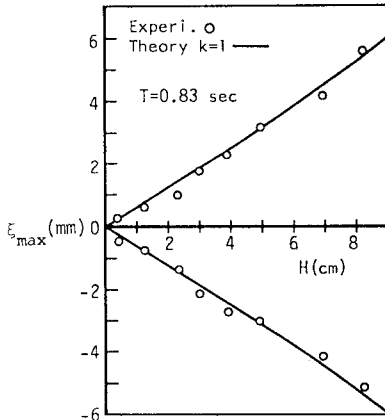


図-7 円柱上端の変位の位相変化

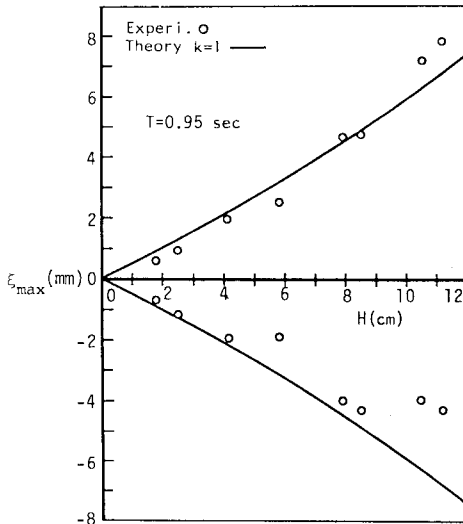
ていくかを示したものである。ただし、変位の値は、1周期内の最大変位 ξ_{\max} で割って示している。図より、固有振動周期の3倍の $T=1.17$ s および5倍の $T=1.96$ s 付近の振動には、抗力項に含まれる高周波数成分外力による振動が強く混入していることがわかる。

(3) 実験値と理論値との比較

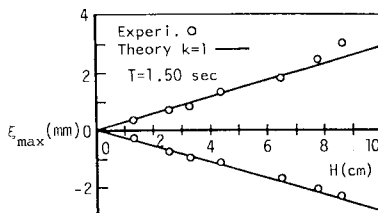
理論解の妥当性を検討するため、円柱上端の1周期内の最大変位 ξ_{\max} について、計算値と実験値との比較を行うが、実験値は、参考文献(15)に示した著者の論文



(a) $T=0.83$ s

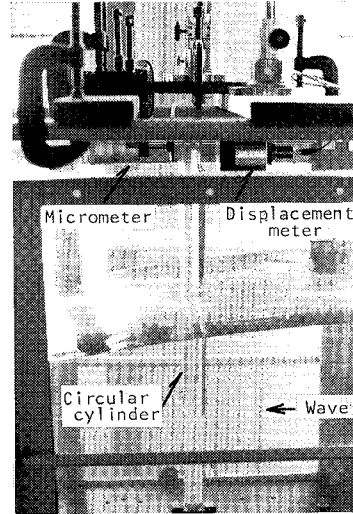


(b) $T=0.95$ s



(c) $T=1.50$ s

図—8 最大変位の実験値と理論値の比較



写真—1 実験状況

から引用したものを示す。すなわち、長さ 14 m、幅 50 cm、高さ 64 cm の造波水槽中に、写真—1 に示すように、下端部を固定したウレタンゴム製円柱を設置し、円柱上端の変位を、非接触型電磁変位計を用いて測定したデータである。なお、実験条件は、3.(2)に示したとおりである。

図—8(a), (b) および (c) は、それぞれ、周期 T が 0.83 s, 0.95 s および 1.50 s の場合の結果である。各図の横軸は、使用した波の波高 H であるが、縦軸の ξ_{\max} の符号は、波の進行方向への変位を正、逆方向への変位を負とした。図よりわかるように、実線で示した理論値は、丸印で示した実験値とよく一致しており、理論解の妥当性がある程度実証されたといえる。ただし、波高が 10 cm 程度にまで増大すると、 ξ_{\max} の正側では、理論値は実験値よりやや小さくなり、 ξ_{\max} の負側では、逆の傾向が生じる。これは、理論計算では、水面の上下動に伴う波力の作用範囲の増減を無視するため、波峰が来ているときの変位はやや過小に、また波谷が来ているときの变位はやや過大に算定されるためである。しかし、この誤差は、たとえば、浅海域における有限振幅波を対象とするのでなければ、通常は問題にする必要はないと思われる。

なお、共振時の振動変位については、ここでは議論しなかったが、共振点は、付加質量係数の値により変化するとともに、そのときの最大変位は、減衰定数により大きく変動するため、今後、より精密な実験データを用いた検討が必要となるであろう。

4. 結 語

本論は、柱状構造物の動力学的な解析法を確立すると

ともに、波に対する動的応答特性を解明するための基礎的研究として、微小振幅波による柱体の振動に関する理論解を、新たに提示した。

求めた解は、数値解法などに比べると、比較的簡潔であるが、解に含まれる積分定数は、対象とする状況に応じた境界条件を満足するように決定する必要がある、ここでは、柱体の上端が静水面に一致する場合および柱体上部が水面上に出る場合を取り扱った。特に後者については、実験値と比較することにより、解の妥当性を実証した。

今後の課題として、本理論解を用いて柱体の共振特性を考究すること、減衰項の非線形性を考慮した解を示すこと、ストークス波による柱体の振動解を誘導することあるいは、プラットフォーム型構造物への応用を行うことなどが考えられる。

最後に、本研究を行うに際し、助力を惜しまなかった加島 卓君（現在愛知県、当時大学院生）および上野 彰君（現在大学院生）に厚く謝意を表する。

参考文献

- 1) 岩垣雄一：1971年度水工学に関する夏期研修会講義集，Bコース，波浪に対する構造物の動的応答，土木学会水理委員会，pp. B-2-1～B-2-21，1971.
- 2) Harleman, Donald R. F., Nolan, William C. and Honsinger Vernon C. : Dynamic Analysis of Offshore Structures, Proc. of 8th Confer. on Coastal Engg., Chapt. 28, pp. 482～499, 1962.
- 3) Gaither William S. and Billington David P. : The Dynamic Response of Offshore Structures to Time-Dependent Forces, Proc. of 9th Confer. on Coastal Engg., Chapt. 29, pp. 453～471, 1964.
- 4) Shubinski, R. P., Wilson, E. H. and Selna, L. G. : Dynamic Response of Deepwater Structures, Proc. of Confer. on Civil Engg. in the Oceans, pp. 123～146, 1967.
- 5) Malhotra, Anil K. and Penzien J. : Non-deterministic Analysis of Offshore Structures, Proc. of ASCE, Vol. 96, No. EM6, pp. 985～1003, Dec., 1970.
- 6) Penzien, J. : Structural Dynamics of Fixed Offshore Structures, BOSS '76, pp. 581～592, 1976.
- 7) Taylor, R. E. : A Linear Analysis of Interaction Problems in Offshore Platforms, BOSS '79, pp. 61～86, 1979.
- 8) Fish, P. and Rainey, R. : The Importance of Structural Motion in the Calculation of Wave Loads on an Offshore Structure, BOSS '79, pp. 43～59, 1979.
- 9) 中川良隆・高畑市三：杭状構造物の波浪による応答解析，第19回海岸工学講演会論文集，pp. 407～417，1972.
- 10) 花村哲也・田中良弘・大阪 一：柱状構造物の波浪応答解析と現地観測，第23回海岸工学講演会論文集，pp. 74～79，1976.
- 11) 本多忠夫・光易 恒：波の周期に近い固有周期を有する円柱と波との相互作用に関する研究，第23回海岸工学講演会論文集，pp. 58～63，1976.
- 12) 榎木 亨・中村孝幸・三木秀樹：波動場の円柱後流渦による振動応答の実態とその予測について，第23回海岸工学講演会論文集，pp. 33～38，1976.
- 13) 榎木 亨・中村孝幸・三木秀樹：単円柱構造物の波による振動挙動について，第24回海岸工学講演会論文集，pp. 367～371，1976.
- 14) Sawaragi, T. and Nakamura, T. : Dynamic Behavior of Vertical Cylinder Due to Wave Force, Proc. of 16th Confer. on Coastal Engg., Chapt. 143, pp. 2378～2396, 1978.
- 15) Ishida, H. : Dynamic Response of Vertical Pile to Periodic Waves by Transfer Matrix Method, SEME, pp. 2.105～2.114, 1982.
- 16) 石田 啓・沢木 一：波によるプラットフォームの振動解析に関する研究，第28回海岸工学講演会論文集，pp. 599～603，1981.
- 17) Clough, R. W. and Penzien, J. : Dynamics of Structures, McGraw-Hill, pp. 1～175, 1975.
- 18) 石田 啓・細貝隆司：構造特性マトリックスによる柱体の波浪応答解析—不規則波への応用—，第30回海岸工学講演会論文集，pp. 371～375，1983.
- 19) 椎貝博美・関口定男・星野久雄：ヒンジで支えられた柱状海洋構造物の振動特性，土木学会論文報告集，第342号，pp. 153～160，1984.
- 20) Nagaya, K. : Response of Variable Cross-Sectional Members to Waves, Proc. of ASCE, Vol. 111, No. WW2, pp. 337～353, Mar., 1985.
- 21) 石田 啓：1984年度水工学に関する夏期研修会講義集，Bコース，波による柱状構造物の動的応答について，土木学会水理委員会，pp. B-4-1～B-4-15，1984.
- 22) Ishida, H. and Konda, Y. : Dynamic Analysis of Pile Structures to Periodic Waves, Proc. of 19th Confer. on Coastal Engg., Chapt. 197, pp. 2952～2968, 1984.
- 23) Ishida, H. : Dynamic Response of Offshore Structures to Ocean Waves, Proc. of ICOSSAR '85, Vol. II, pp. II-602～II-606, May, 1985.
- 24) 石田 啓・近田美則：有限振幅波による柱体の振動特性，第32回海岸工学講演会論文集，pp. 628～632，1985.
- 25) 石田 啓・黒崎弘司：非線型減衰力を考慮した場合の円柱の波浪振動について，金沢大学工学部紀要，第16巻，2号，pp. 121～127，1983.
- 26) Sarpkaya, T. and Isaacson, M. : Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures, Van Nostrand Reinhold Company, pp. 52～149, 1981.
- 27) 石田 啓：円柱に働く波力に関する実験的研究，日本海学会誌，No. 3, pp. 117～131，1979.
- 28) 山田善一・河野健二：動的応答解析に及ぼす減衰マトリックスの影響に関する研究，土木学会論文報告集，第334号，pp. 43～51，1983.

(1985. 8. 1・受付)