

任意断面柱体列による波の反射率および透過率の境界値問題解析*

BOUNDARY-VALUE ANALYSIS ON THE INTERACTION OF CYLINDER ARRAYS OF ARBITRARY CROSS-SECTION WITH A TRAIN OF UNIFORM WAVES

角野昇八**・小田一紀***

By Shohachi KAKUNO and Kazuki ODA

Wave reflection and transmission by an infinite array of cylinders of arbitrary cross-section and water particle velocities through the slits of the array are analyzed as a boundary-value problem. The method of matched asymptotic expansions is employed. For the case of flat plates, calculation were done for two different types of the inner solution, and the difference of the final solutions is discussed. The comparison of the results with experimental data shows that the present linear theory, which does not account for the quadratic energy loss effect at slits, predicts well the reflection and the water particle velocities, while it overestimates the transmission due to not taking the energy loss effect into account. In the case of flat plates and the case of circular cylinders, the results coincide with existing theoretical results.

1. 緒 言

海岸にはスリット（隙間）を有する構造物が数多くみられる。鋼管防波堤やスリット式直立消波構造はその代表的なものである。また、開口部を有する防波堤や離岸堤もその一種とみなすこともできる。それゆえ、この種の構造物の構成要素である無限の平板列や円柱列、角柱列などの柱体列と波浪との干渉の問題（図-1参照）は、従来より多くの物理学者や工学者の研究の対象となってきた。

このような問題に対する過去の研究例としては、平板列の場合については Lamb³⁾と Miles⁴⁾によるものがある。一方、柱体列を対象とする例は比較的最近にみられるようになったが、その断面形は円形あるいは楕円形に限られていた^{5), 6)}。これらの研究において対象とする波はいずれも音波あるいは電磁波であったが、平面二次元の問題に帰着させた水の波と支配方程式および境界条件

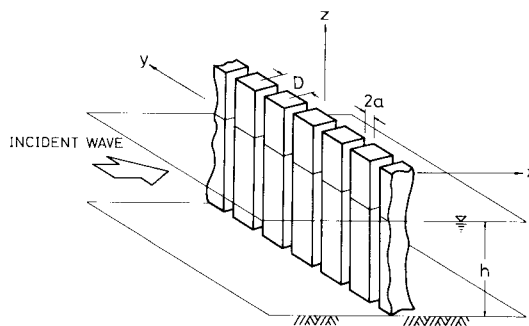


図-1 波浪中の多柱構造

式が同じであることから、対象とする波が異なっても解は一致する。また、水の波と柱体列の干渉の問題を扱ったものとしては、大楠⁷⁾や Spring & Monkmeyer⁸⁾, Massel⁹⁾によるものを挙げることができるが、いずれも円柱列のみを対象としたものであった。

このほかにも、透過性鋼管防波堤やスリット式直立消波構造の問題と関連して多くの研究がなされており、なかでも林・服部ほか^{10)~13)}は一連の系統だった研究を行っている。最近になっても、浦島ほか¹⁴⁾による研究、あるいは背後に不透過壁がある構造を対象としてではあるが、堀口ほか¹⁵⁾や谷本ほか¹⁶⁾、あるいは萩原¹⁷⁾による

* 本論文の内容の一部は既発表のもの^{1), 2)}であるが、本稿はそれらを取りまとめて再構成し、かつ内容の一部に訂正を加えたものである。

** 正会員 工修 大阪市立大学助手 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)

*** 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科 (同上)

角柱列を対象とした研究例がある。しかるにいずれの研究においても、柱体列の断面形状の影響は実験定数の形でしか考慮されておらず、それゆえにそれらは厳密な意味での境界値問題解析とはいいがたいために、構造物周辺の波動現象のポテンシャル流としての挙動が十分に明らかにされたとはいえないくらいがあった。

本研究は、以上の研究に対して任意の断面形の柱体列を対象とし、しかもこの問題を近似的にはあるが境界値問題として純理論的に解析して、現象の基本特性を決定づけていると考えられるポテンシャル流としての挙動を明らかにしようとするものである。考察の対象とするのは、柱体列による波の反射率と透過率、ならびにスリット部流入水粒子速度の水平成分であり、柱体列に波が直角に入射する場合のみを取り扱う。

解析には、深海域の鉛直壁中に設けられた1つの水平スリットからの波の透過の問題に Tuck¹⁸⁾が適用して成功を収めた Matched Asymptotic Expansions (MAE)法を用いた。その概念を本研究対象に則して考えれば、スリットからの流れを遠方から眺めた場合の画像を表わす外的解 (outer solution) およびそれを近傍で眺めた場合の画像に相当する内的解 (inner solution) をそれぞれ独立に求め、前者の inner limit と後者の outer limit とを接合 (matching) させることによりすべての領域で一意的に成立する解を求めようとする手法である。双方の解の有する上述の特性より、外的解には流れの細かい特性量は含まれず、ただ波動特性を表わす量がみられるにすぎない。逆に、内的解には、流れの詳細を表わす特性量は含まれるものの、スリットから離れた点の波動現象を表わす量は含まれない。したがって数学的には、外的解自身は物体表面における境界条件を詳細に満足する必要がなく、これに対して、内的解自身は無限遠点での境界条件を満足する必要がないことを意味するので、全境界条件を同時に満足するように解を見出す努力が軽減されることになる。

なお、以下の理論展開においては非粘性かつ非圧縮性の流体を考え、柱体表面は不透過であるとする仮定を設けている。また、スリット幅および柱体の断面寸法は波長に比べて小さいものとし、対象領域の水深は一定 (h) で、波は微小振幅波である。特に、流体は非粘性と考えるので、スリット部を通過する際の粘性による非線形損失エネルギーは考察の対象には含まれていない。

また、紙面の都合で本稿では無数のスリットを有する柱体列のみを対象としたが、全く同様の方法により、1つの鉛直スリット (開口部) を有する無限長の薄壁からの波の反射および回折の問題も解くことができる¹⁹⁾。

2. 境界値問題としての定式化

いまここで考える問題は、いずれの場合にも以下のように境界値問題として定式化することができる。まず支配方程式として、よく知られているように速度ポテンシャル $\Phi(x, y, z, t)$ に関する三次元ラプラスの方程式、
 $\nabla^2 \Phi = 0$(1)

が流体領域全体で満足されなければならない。また境界条件としては、

$$g \partial \Phi / \partial z + \partial^2 \Phi / \partial t^2 = 0 \quad (z=0) \dots\dots\dots (2)$$

$$\partial \Phi / \partial z = 0 \quad (z=-h) \dots\dots\dots (3)$$

$$\partial \Phi / \partial \mu = 0 \quad (\text{on } \Gamma) \dots\dots\dots (4)$$

ただしここに、 g は重力加速度、 h は水深、 Γ は構造物表面であり、 x は波の進行方向への座標軸、 y は波の進行方向に直角な方向への座標軸、 z は鉛直上向きへの座標軸を表わし、また μ は構造物表面からの外向き法線を表わす (図-1 参照)。以上の境界条件のほかさらに、入射側 ($x < 0$) の無限遠点においては入射波と反射波のみが、また透過側 ($x > 0$) の無限遠点においては透過波のみが存在するという放射条件を無限遠点における境界条件として課すことができる。すなわち、

$$\Phi \rightarrow \Phi_i + \Phi_r \quad (x \rightarrow -\infty) \dots\dots\dots (5)$$

$$\Phi \rightarrow \Phi_t \quad (x \rightarrow +\infty) \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 Φ_i と Φ_r 、 Φ_t はそれぞれ入射波、反射波、透過波に相当する速度ポテンシャルである。

しばしば行われるように、ここで速度ポテンシャルを以下のように変数分離形で表わして式 (3) の境界条件を満足させるようにする。

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= \phi(x, y, z) e^{-i\sigma t} \\ \phi(x, y, z) &= F(x, y) \cosh k(h+z) / \cosh kh \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 σ は角振動数 ($=2\pi/T$, T は周期) であり、 k は波数 ($=2\pi/L$, L は波長)、 $i = \sqrt{-1}$ である。式 (2) と式 (7) からは、よく知られた分散の関係式、

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \dots\dots\dots (8)$$

が、また式 (7) を式 (1) に代入すればヘルムホルツの方程式、

$$\partial^2 F / \partial x^2 + \partial^2 F / \partial y^2 + k^2 F = 0 \dots\dots\dots (9)$$

が誘導される。同時に、式 (4) の境界条件は、
 $\partial F / \partial \mu = 0$(10)

のように変形される。また式 (5) および式 (6) も、
 $F(x, y) \rightarrow F_i(x, y) + F_r(x, y)$
 $= A_i e^{ikx} + \rho A_i e^{-ikx} \quad (x \rightarrow -\infty) \dots\dots\dots (11)$

$$F(x, y) \rightarrow F_t(x, y) = \tau A_i e^{ikx} \quad (x \rightarrow +\infty) \dots\dots\dots (12)$$

のように書きかえることができる。ただし、ここに、

A_1 は入射波の振幅に相当する複素定数 (未知) であり, ρ および τ は反射率および透過率に相当する複素定数 (未知) である.

結局, 問題は, 式 (10) の構造物表面での境界条件および式 (11) と式 (12) の無限遠点での境界条件, さらに式 (8) の分散の関係式のもとに式 (9) のヘルムホルツの式を満足する関数 $F(x, y)$ を求める二次元問題に帰着され, 当初の三次元問題を二次元空間で考察できることとなる.

3. 平板列による波の反射と透過²⁾

まず, 柱体列としては最も簡単な断面形をもつ平板列 (厚さは無限小) を取り上げ, それによる波の反射と透過の問題を考える. このときのスリットの位置は $y = nD$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) にあり, その幅は $2a$ とする. すなわち, D は隣接するスリットもしくは柱体の中心間距離であり, $2a/D$ は開口率を示している.

(1) 外的問題

既述の外的解の概念をさらに具体的に述べれば, 「スリットから遠く離れた観測者がスリットからの流れを眺めるとき, もしその幅が十分に狭ければスリット近傍の流れの詳細はみえず, 時間とともに強さが調和的に変動するよう単なるわき出しからの流れ, あるいは吸い込みへの流れをみるにすぎない」ということになろう. いま, 速度ポテンシャルの時間項を式 (7) におけるように $e^{-i\omega t}$ と表わすときには, $y = nD$ に置かれた強さが $m=1$ のわき出しからの流れ, あるいは吸い込みへの流れは, 周知のように, 0 次の第 1 種ハンケル関数を用いて,

$$F(x, y) = \mp i/4 \cdot H_0^{(1)} [k\sqrt{x^2 + (y - nD)^2}] \dots\dots\dots (13)$$

のように表わされる. ここに, 負, 正符号はそれぞれわき出し, 吸い込みに対応している.

したがって, 外的解としては, 無数のスリットに対応して上式の無限和を考慮し (図-2 参照),

$$F(x, y) = \frac{i}{4} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(1)} [k\sqrt{x^2 + (y - nD)^2}] + A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad (x < 0) \dots\dots\dots (14)$$

$$F(x, y) = -\frac{i}{4} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(1)} [k\sqrt{x^2 + (y - nD)^2}] \quad (x > 0) \dots\dots\dots (15)$$

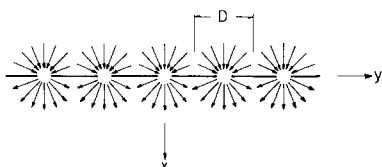


図-2 外的解

のように置くことができる. ここに, A と B とは未知の複素定数であり, 式 (14) の右辺第 1 項 (吸い込み) はスリットから入射側 ($x < 0$) に伝播する波を, また第 2 項は入射波を, 第 3 項はスリット以外の不透過部から反射される波をそれぞれ表わしている. 同様にして, 式 (15) (わき出し) はスリットから透過側 ($x > 0$) に伝播する波を表わしている. 外的解である両式には, スリット幅 ($2a$) はまだ含まれていないことに注意しておきたい.

式 (14) および式 (15) は, スリットを挟む入射側と透過側において, 流量が連続していること, および不透過部を貫通する流れは存在しないとの 2 つの条件を満足していなくてはならないが, このうちの最初の条件は, 式 (14) 右辺第 1 項のわき出しと式 (15) 右辺の吸い込みを一对に設けることにより満足されている. また 2 番目の条件を満足するためには,

$$A = B \dots\dots\dots (16)$$

でなくてはならない. なお, 両式においてはわき出し (吸い込み) の強さを一定 ($m=1$) とし, 式 (11) や式 (12) の入射波の振幅 A_1 を従来の研究のように一定としていないが, このようにしても最終結果には何ら影響を与えるものではない. ただしこの場合, 各物理量は, 基準値 ($m=1$) に基づく量に対して相対的量として表わされることになる.

a) 外的解の outer limit における挙動

式 (11) や式 (12) 中の ρ や τ の形を決定するためには, 外的解の無限遠点での挙動, すなわち outer limit における挙動を知る必要がある. このためには, $D/L < 1$ の条件にあるときには, 式 (15) は平面波として,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{-i}{2kD} e^{ikx} - \frac{1}{kD} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi\nu y/D) \\ &\quad \times \frac{\exp[-k|x|\sqrt{(2\pi\nu/kD)^2 - 1}]}{\sqrt{(2\pi\nu/kD)^2 - 1}} \\ &= \frac{-i}{2kD} e^{ikx} - \frac{1}{kD} \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(2\pi\nu y/D) \\ &\quad \times \frac{\exp[-k|x|\sqrt{(2\pi\nu/kD)^2 - 1}]}{\sqrt{(2\pi\nu/kD)^2 - 1}} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

のように, ただ 1 つの進行波モードと無数の減衰波モードとの和として表わされることを利用する²⁾.

上式の outer limit ($x \rightarrow \pm\infty$) における挙動は, 容易に証明されるように,

$$F(x, y) \rightarrow -i/2kD \cdot e^{ikx} \dots\dots\dots (18)$$

であるので, outer limit における外的解として次式のようにおくことができる.

$$F(x, y) \rightarrow i/2kD \cdot e^{-ikx} + A(e^{ikx} + e^{-ikx}) \quad (x \rightarrow -\infty) \dots\dots\dots (19)$$

$$F(x, y) \rightarrow -i/2kD \cdot e^{ikx} \quad (x \rightarrow +\infty) \dots\dots\dots (20)$$

式 (19) と式 (11), さらに式 (20) と式 (12) とを等置すれば, 反射率と透過率, ならびに A として以下の各式を得ることができる。

$$\rho = i/(2kDA_1) + 1, \quad \tau = -i/(2kDA_1) \dots\dots\dots (21)$$

$$A = A_1 \dots\dots\dots (22)$$

b) 外的解の inner limit における挙動

式 (14) および式 (15) の外的解を後述の内的解と接合させるためには, その $x=0$ 近傍での挙動, すなわち inner limit における挙動を知っておかねばならない。いま, このために, 式 (14) および式 (15) において, $x \rightarrow 0_+(y=0)$ の極限操作を施せば, 外的解の inner limit では,

$$F(x, 0) \rightarrow -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{-kx}{2}\right) - \frac{\gamma}{2\pi} + \frac{i}{4} + \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(n)}(nkD) + 2A \quad (x \rightarrow 0_+) \dots\dots\dots (23)$$

$$F(x, 0) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{kx}{2}\right) + \frac{\gamma}{2\pi} - \frac{i}{4} - \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(n)}(nkD) \quad (x \rightarrow 0_+) \dots\dots\dots (24)$$

を得る。ただし, γ はオイラーの定数 ($=0.5772\dots$) であり, このとき, 原点付近ではハンケル関数は次式のように近似できることを利用している。

$$H_0^{(n)}[k\sqrt{x^2+(y-nD)^2}] \rightarrow 1 + i2\gamma/\pi + i2/\pi \cdot \ln(kx/2) \quad (x \rightarrow 0, y=n \cdot 0) \dots\dots\dots (25)$$

(2) 内的問題

スリット近傍の観察者が視点をスリットに限りなく近づけてゆくと, 波動運動は視野の外に遠ざかり, ついにはスリットを通過する流れの詳細な流況のみを目にすることであろう。さらにまた, スリット幅が隣接スリット間隔に比べて十分に小さいときには ($2a/D \ll 1$), 隣接のスリットからの流れの影響は無視でき, 無限長壁中の単一のスリットからの流れと同じ流況を目にするに違いない。このような流れは, 図-3 に示すように, 波の周期とともにその向きを変えるような, 壁中のスリットを通過するポテンシャル流であり, 数式の形としては以下の Joukowski 変換の式を介して容易に得ることができる¹⁸⁾。

$$z^* = -1/2 \cdot ia(\zeta + \zeta^{-1}) \dots\dots\dots (26)$$

上式は $z^*(=x+iy)$ 平面の全体を $\zeta(=\xi+i\eta)$ 平面

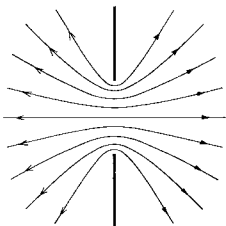


図-3 壁中のスリットを通る流れ

の上半分に写像する関係を表わしており, z^* 平面における図-3 に示すような流れは, ζ 平面の原点におかれたわき出しからの流れに対応する。すなわち,

$$f = m/2\pi \cdot \ln \zeta + C_0 \dots\dots\dots (27)$$

ここに, m はわき出しの強さで, C_0 は未知の複素定数である。

式 (26) において, $|\zeta| \rightarrow 0$ とすれば z^* 平面における $x \rightarrow -\infty$ での挙動を得ることができるので, 式 (26) において $|\zeta| \rightarrow 0$ とした,

$$z^* = -1/2 \cdot ia\zeta^{-1}$$

を式 (27) に代入することにより, 内的解の $x \rightarrow -\infty$ での outer limit における $F(x, 0)$ として次式を得ることができる。

$$F(x, 0) \rightarrow -m/2\pi \cdot \ln|x| + |C_0 + m/2\pi \cdot \ln(1/2 \cdot ia)| \dots\dots\dots (28)$$

同様に, $|\zeta| \rightarrow \infty$ とすれば, $x \rightarrow \infty$ での挙動として次式を得る。

$$F(x, 0) \rightarrow m/2\pi \cdot \ln x + |C_0 - m/2\pi \cdot \ln(-1/2 \cdot ia)| \dots\dots\dots (29)$$

外的解において含まれていなかったスリット幅 ($2a$) が, これら内的解において初めて現われることに注意したい。

(3) matching

式 (23) と式 (24) とは外的解の inner limit における, また式 (28) と式 (29) とは内的解の outer limit における挙動を表わしている。これらの挙動を接合させることにより, 全領域を満足する解が得られることになる。具体的には, 式 (23) と式 (28) と, また式 (24) と式 (29) とをそれぞれ等置し, それらの各項を比較することにより以下のように未知定数を定めることができる。

$$m = 1 \dots\dots\dots (30)$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{-ika}{4}\right) + \frac{\gamma}{2\pi} - \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(n)}(nkD) - \frac{i}{4} \dots\dots\dots (31)$$

$$A (=A_1) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{ka}{4}\right) + \frac{\gamma}{2\pi} - \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(n)}(nkD) - \frac{i}{4} \dots\dots\dots (32)$$

(4) 反射率と透過率

以上のようにしてすべての未知定数が決定されたので, 式 (21) および式 (32) より, 反射率 (γ_r) および透過率 (γ_t) を次式のように得ることができる。

$$\gamma_r = |\rho| = \left[1 + \frac{1+4kDA_2}{4k^2D^2(A_1^2+A_2^2)}\right]^{1/2} \dots\dots\dots (33)$$

$$\gamma_t = |\tau| = \left[\frac{1}{4k^2D^2(A_1^2+A_2^2)}\right]^{1/2} \dots\dots\dots (34)$$

ここに, A_1 および A_2 はそれぞれ A_1 の実部と虚部を表

わし、

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{ka}{4}\right) + \gamma + \pi \sum_{n=1}^{\infty} N_0(nkD) \right\} \\ A_2 &= -\frac{1}{4} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_0(nkD) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

ここに、 N_0 と J_0 とはそれぞれ 0 次のノイマン関数とベッセル関数を示す。なお、上式の実際の計算においては、式中の級数はきわめて収束性が悪いいため、それらと等価であつてかつ収束性の良好な表現^{21,20)}を用いる必要があり、その結果を代入すれば A_1 および A_2 は以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{\pi}{2} \frac{2a}{D}\right) - \sum_{\epsilon=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi^2 \epsilon^2 - k^2 D^2}} - \frac{1}{2\pi \epsilon} \right) \\ A_2 &= -1/2kD \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

ただし、 $0 < D/L < 1$ 。

ここで式 (36) の関係を式 (33) および式 (34) に代入すれば、 $\gamma_k + \gamma_k^* = 1$ の関係が容易に導かれ、エネルギーの保存が保証されている。

(5) スリット通過水粒子速度

波がスリット部を通過する際のエネルギー損失の程度を評価するためには、スリット部通過の水粒子速度を正確に算定する必要がある。

すでに記したように、本解析の外的解においては強さが $m=1$ のわき出し (あるいは吸い込み) をスリットの位置に配置している。すなわち時間項をも考慮すれば、このことはわき出しの最大強さが $m=1$ ということと等価である。一方、周知のように、わき出しの強さはわき出しからの流量を意味しているので、スリット通過の際の最大流量 (深さ方向の単位長さ当たり) も単位流量であることになる。ただ注意したいのは、この流量はスリットの沖、岸両側へ流れ出る流量であるので、片側にはその半分の $1/2$ となる。それゆえ、スリット通過の流速の最大値 V_{max} は、流量を通過断面積 ($2a \times 1$) で除して、

$$V_{max} = 1/4a \dots\dots\dots (37)$$

しかしこの量は基本量 ($m=1$) に対応する量であり、他の流速との比の形に表わして初めて有意な量となる。ここでは入射波の水粒子速度の水平成分の最大値 u_{max} との比で表わすことにする。

式 (11) より、入射波の速度ポテンシャルの平面座標の項 $F(x, y)$ は、

$$\begin{aligned} F(x, y) &= A_1 e^{ikx} = (A_1 + iA_2) e^{ikx} \\ \text{ゆえに、水粒子速度の水平成分は、} \\ u &= \Re(\partial F / \partial x) = -k(A_1 \sin kx + A_2 \cos kx) \\ &= -k\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cdot \sin |kx + \tan^{-1}(A_2/A_1)| \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

ただし、ここに \Re は実部をとることを意味する。

上式の最大値は、

$$\begin{aligned} u_{max} &= k\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \\ \text{であるので、結局、流速比 } V_{max}/u_{max} \text{ は、} \\ V_{max}/u_{max} &= 1/4ka\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

のように表わされる。

4. 任意断面形状柱体列による波の反射と透過¹⁾

前章までの取扱いにおける内的解では、視点は柱体間スリットに限りなく近づけられ、スリットからの流れをいわばまのあたりにみた流況を用いた。したがってその流況には柱体断面の詳細な情報が含まれている。しかしながら、このような手法では、柱体断面形状が異なればそれに応じて変化する流況を内的解として用いる必要があり、したがって、内的解を求めることのみにも多大の労力を費やすことになってしまう。そこでここでは、スリットを通過した局所流れがスリットからある程度離れば柱体列の断面形状によらず一樣流を回復することに着目し、その地点の流れを内的解として採用することにする (図-4 参照)。

(1) 内的問題

上述のような流れの速度ポテンシャルは、Lamb³⁾ (Sec. 306, 307) に基づけば、

$$F(x, y) = (x - C)U + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu} \cos\left(\frac{2\nu y}{D}\right) e^{2\nu x/D} + C_0 \quad (x < 0) \dots\dots\dots (40)$$

$$F(x, y) = (x + C)U - \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu} \cos\left(\frac{2\nu y}{D}\right) e^{-2\nu x/D} + C_0 \quad (x > 0) \dots\dots\dots (41)$$

ここに、 U は一樣流部分の流速、 C_{ν} および C_0 は定数である。また C は、最近になって“blockage coefficient” (閉塞係数)^{21,22)} と名づけられた、柱体列による流れの阻害の程度を表わす理論定数 (長さの次元をもつ) であり、この定数により上式に表わされる流れに柱体列断面形状の情報もたらされている。また柱体列の付加質量とも密接な関係を有している。この C は、所与の柱体列断面形状のみによって一意的に決定されるが、障害物が全くない場合には $C=0$ 、逆に柱体列が完全に閉塞される場合には $C=\infty$ の値をとる。この定数は柱体列断面形状のみによって決定される量であるために、式 (10) の柱体表面における境界条件は、式 (40) および式 (41) を採用することにより、結果的に満足されている。断面

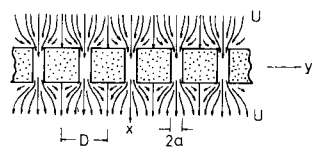


図-4 多柱列を通る流れ

形状が簡単な平板列と角柱列の C についてはすでに解が得られているが、円柱列に対してはまだ完全な解は示されていない。以下には、平板列ならびに角柱列に対する既往の解とともに、本論文において新たに誘導された円柱列に対するこの C を示す。なお、後述のように、この手法によれば円柱列のみならず任意断面柱体列についても C の算定が可能である。また、式 (40), (41) は厳密には式 (9) のヘルムホルツの方程式を満足しないが、構造物の断面寸法は波長に比べて小さいという現在の仮定のもとでは近似的に満足する。

a) 平板列

厚さのない平板の列に対して、Sedov²³⁾は、複葉飛行機の翼列周りのポテンシャル流の問題に関連して次式のように C を求めた。

$$C = -D/\pi \cdot \ln \sin(\pi/2 \cdot 2a/D) \dots \dots \dots (42)$$

上式は、Mei²⁴⁾によって音響学より導入され、その後わが国の直立消波工に関する研究においてしばしば引用されている「見掛けのオリフィス長さ」あるいは「有効慣性長」とよばれるものと全く同一のものである。

b) 角柱列

Taylor²⁵⁾によれば、角柱列に対する C は、

$$C = \frac{b}{2} \left(\frac{D}{2a} - 1 \right) + \frac{D}{\pi} \left[1 - \ln 4 \frac{2a}{D} + \frac{1}{3} \left(\frac{2a}{D} \right)^2 + \frac{281}{180} \left(\frac{2a}{D} \right)^4 \right] \dots \dots \dots (43)$$

ただし、ここに b は列方向に直角な方向の矩形断面の辺長を表わし、また上式は $2a/D \ll 1$ の条件のもとに成立する。

c) 円柱列

一般に、柱体列の blockage coef. C と付加質量 λ (単位長さ当たり) との間には次式に示される関係があることが知られている²³⁾。

$$\lambda = -\rho S + 2\rho DC \dots \dots \dots (44)$$

ここに、 ρ は流体密度、 S は柱体断面積である。したがって、 $\lambda (= \rho SC_M, C_M$ は質量係数) が知られば、柱体列の場合の C は上式より、

$$C = \pi/8 \cdot D(1 - 2a/D)^2(1 + C_M) \dots \dots \dots (45)$$

のように求めることができる。

式中の柱体列の質量係数は、柱体列周囲の速度ポテンシャルが知られば容易に求めることができるが、そのような速度ポテンシャルの解析的な求め方を示した研究例として Samoilovich²⁶⁾によるものを挙げる事ができる。その論文においては、解である速度ポテンシャルには無限組の連立方程式の解が係数として含まれているので、最も厳密な値を求めるためには無限組の連立方程式を解く必要がある。しかしながら、その近似値は、 p 元連立方程式を解くことにより、第 p 次近似値として求

めることができる (付録参照)。

なお、この Samoilovich の論文には、任意断面柱体列周囲の速度ポテンシャルの求め方についても述べられているので、その方法を用いれば任意断面柱体列に対する C の算定も可能である。

(2) 外的問題

a) 外的解の outer limit における挙動

前章と取扱いは同様であり、式 (18)~(22) をそのまま本章においても用いることができる。

b) 外的解の inner limit における挙動

いまの場合、matching を行う点はスリットから比較的離れた、一様流を回復する地点であるので、外的解の inner limit としても、平面波によって表現される形を採用することにする。したがって、式 (14), (15) 中のハンケル関数の級数和对して式 (17) の平面波表現を用いれば、

$$F(x, y) = \frac{i}{2kD} e^{-ikx} + \frac{1}{D} \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi\nu}{D}y\right) \times \frac{\exp[x\sqrt{(2\pi\nu/D)^2 - k^2}]}{\sqrt{(2\pi\nu/D)^2 - k^2}} + Ae^{ikx} + Ae^{-ikx} \quad (x < 0) \dots \dots \dots (46)$$

$$F(x, y) = \frac{-i}{2kD} e^{ikx} - \frac{1}{D} \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi\nu}{D}y\right) \times \frac{\exp[-x\sqrt{(2\pi\nu/D)^2 - k^2}]}{\sqrt{(2\pi\nu/D)^2 - k^2}} \quad (x > 0) \dots \dots \dots (47)$$

上式の $x \rightarrow 0_+$ における極限值、すなわち外的解の inner limit における挙動は、

$$F(x, y) \rightarrow \frac{i}{2kD} (1 - ikx) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{D\sqrt{(2\pi\nu/D)^2 - k^2}} \times \cos\left(\frac{2\pi\nu}{D}y\right) \exp[x\sqrt{(2\pi\nu/D)^2 - k^2}] + 2A \quad (x \rightarrow 0) \dots \dots \dots (48)$$

$$F(x, y) \rightarrow \frac{-i}{2kD} (1 + ikx) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{D\sqrt{(2\pi\nu/D)^2 - k^2}} \times \cos\left(\frac{2\pi\nu}{D}y\right) \exp[-x\sqrt{(2\pi\nu/D)^2 - k^2}] \quad (x \rightarrow 0) \dots \dots \dots (49)$$

(3) matching

外的解の inner limit における挙動である式 (48) および式 (49) と、内的解の outer limit における挙動の式 (40) および式 (41) とをそれぞれ等置することにより matching がなされ、その結果、未知の複素定数 $A (= A_1), C'_0$ と実定数 (流速) U とが以下のように決定される。

$$A = A_1 = C'_0 = -C/2D - i/2kD \dots \dots \dots (50)$$

$$U = 1/2D \dots \dots \dots (51)$$

$$C_v = 1/D\sqrt{(2\pi\nu/D)^2 - k^2} \dots\dots\dots(52)$$

ただしこのとき, matching を厳密に行うためには, 式 (40) および式 (41) と式 (48) および式 (49) 中の指数関数項が等しく, すなわち,

$$2\pi\nu/D = \sqrt{(2\pi\nu/D)^2 - k^2} \\ = 2\pi\nu/D \cdot \sqrt{1 - (kD/2\pi\nu)^2}$$

であることが要求されるが, これは $(kD/2\pi)^2 = (D/L) \ll 1$ の仮定のもとでは近似的に満足される.

(4) 反射率と透過率

式 (21), (22) および式 (50) より, 複素形の反射率と透過率はただちに,

$$\rho = 1 - i/(kC + i), \quad \tau = i/(kC + i) \dots\dots\dots(53)$$

と表わされる. 上式は, 波長に比べて幅の狭い単一透過堤の有する特徴²⁷⁾である $\rho + \tau = 1$ の関係を満足している.

したがって反射率と透過率は, k と C のみの関数としてきわめて簡単な形で,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_R &= |\rho| = \sqrt{k^2 C^2 / (k^2 C^2 + 1)} \\ \gamma_T &= |\tau| = \sqrt{1 / (k^2 C^2 + 1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(54)$$

のように与えられる. 前章におけると同様にこの場合にも両式は $\gamma_R^2 + \gamma_T^2 = 1$ の関係を満たしている.

なお, 式 (42) を式 (54) に代入することによって求められる平板列の場合の γ_R および γ_T の値は, Lamb³⁾ (Sec. 306) および Miles⁴⁾ の得た音波についての同種の問題の解に一致することを容易に確認することができる.

(5) スリット通過水粒子速度

この場合にも, これまでと同様の方法でスリット部通過水粒子速度を求めることができ, 流速比は,

$$V_{\max} / u_{\max} = 1/4ka\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \dots\dots\dots(55)$$

である. より具体的には, 式 (50) の関係を上式に代入し,

$$V_{\max} / u_{\max} = (2a/D \cdot \sqrt{k^2 C^2 + 1})^{-1} \\ = \gamma_T / (2a/D) \dots\dots\dots(56)$$

のようになる. なお, いまの場合, 一樣流部分の流速に開口率を考慮して,

$$V_{\max} = U \div (2a/D) = 1/4a \dots\dots\dots(57)$$

のようにしても V_{\max} を求めることができる.

5. 実験の設備および方法

理論を検証するために, 柱体列からの反射率と透過率, スリット通過水粒子速度を測定するための実験を実施した. 実験には長さ 50 m, 幅 1.0 m, 高さ 1.75 m の造波水槽を用い, そのほぼ中央部に正方形あるいは円形断面の柱体列を設置した. その一辺長あるいは直径は, $D/L \leq 0.04$ の条件に対しては 5.0 cm (正方形) あるいは 5.1 cm (円形) で, $D/L \geq 0.05$ の条件に対しては 15.0 cm (正方形) あるいは 15.3 cm (円形) である. 水深

は全実験を通じて一定で, $h = 50$ cm とした.

波高は容量式波高計で測定し, 透過波高測定地点 (柱体列の位置より約 2 m 岸寄り) の通過波高 (柱体列を設置しない状態で測定した波高) を入射波高とした. 入射波の波形勾配は全ケースを通じて $H/L \approx 0.01$ (一定) である. 反射率はいわゆる Healy の方法によって算定した. 水粒子速度の測定には超小型流速計 (プロベラ径 3 mm) を使用し, その受感部を常に静水面下 15 cm の深さに設置して測定した.

6. 結果および実験値との比較

(1) 反射率, 透過率

村上・越智²⁸⁾は, 中央にただ 1 つの鉛直スリットを設けた平板を造波水槽中に設置し, それによる波の反射率および透過率を実験的に求めた. 水槽幅を D とし, 水槽の側壁を反射鏡面と考えれば, この問題は本研究における平板列の問題に等価になる. 図-5 は, その実験結果を同じ D/L の条件のもとにある理論値とともに $2a/D$ の関数として示したものである. このうち, 太実線および点線はそれぞれ 4. に示したような blockage coef. を用いた理論 (以下, C-手法と略記) による反射率 (γ_R) および透過率 (γ_T) を示し, 細実線および点線はそれぞれ 3. に示したような, 1 つのスリットからの流れの詳細流況に着目する理論 (以下, S-手法と略記) による値を示している. この図によれば, 全般に理論と実験の γ_R の値はよく一致していることが認められ, 特に C-手法による理論値と実験値との対応のよさが注目される. 図中, S-手法による理論曲線を $2a/D \approx 0.7$ 以上の範囲においては示していないのは, その条件下, すなわち, スリット幅が隣接スリット間隔と同程度となる条件のもとでは, 理論中の内的解に用いた「1 つのスリットからの流れはその隣り合うスリットからの流れの影響を受けない」という仮定がくずれ, その結果, 解が breakdown するためである. このように, S-手法は $2a/D \ll 1$ の条件下で有効であるのに対して, C-手法にはそのような開口率の制限はないが, この場合には, 4. (3) にも記したように $D/L \ll 1$ であることが必要条件となる. 図-6 にはこれらの両手法による γ_R の値の比較を, $2a/D$ をパラメーターとし, D/L の関数として

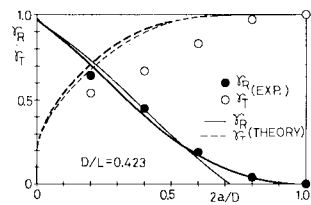


図-5 反射率と透過率 (平板列)

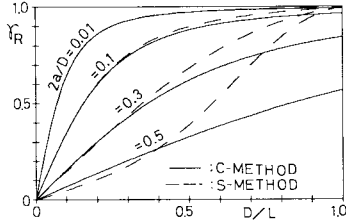


図-6 C-手法とS-手法による γ_R の比較

示した。当然のことながら、両者は、 $2a/D$ および D/L の両パラメーターの値が小さい領域においては一致することが認められる。また同時に、 $2a/D \leq 0.5$ で、かつ $D/L \leq 0.5$ の範囲内にあれば両手法による値の差はわずかであることも明らかである。

次に、図-7および図-8は、それぞれ円柱列および正方形断面角柱列 $[(D-2a)/b=1]$ の場合の γ_R と γ_T の理論曲線を実験値とともに示したものである。この場合の理論値はいずれも前記C-手法によっている。また円柱列の場合の理論値の近似次数は、小数点以下2桁までの値の反射率および透過率を十分な精度で表わすことのできる第7次近似の blockage coef. の値を用いた。

これらの図によれば、平板列の場合と同様に、円柱列、角柱列の場合にも γ_R の理論値と実験値との対応がきわめてよいことが注目される。これらの結果は本理論の妥当性を示しているとともに、柱体列からの波の反射のメカニズムへの開口部におけるエネルギー損失の関与の程

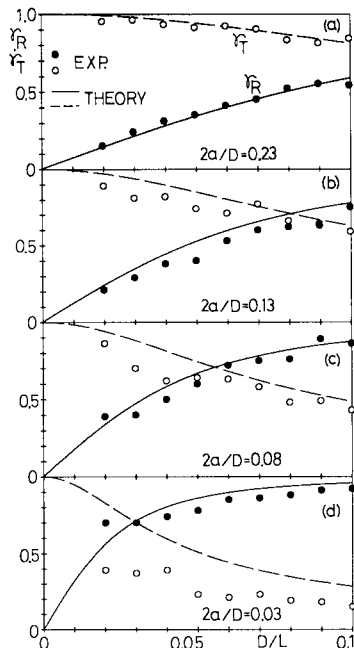


図-7 反射率と透過率（円柱列）

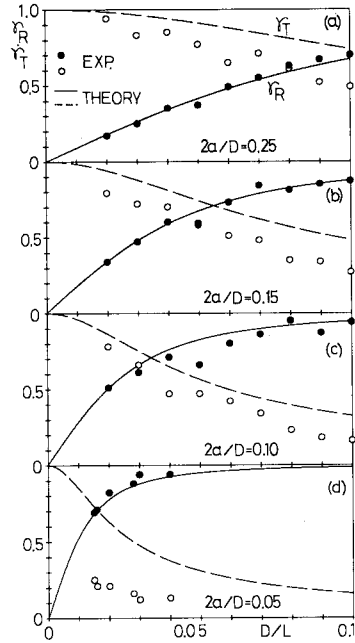


図-8 反射率と透過率（角柱列）

度は、透過のそれに比べてきわめて小さいことを示すものであり、従来より海岸工学分野で一般に認識されてきた両者の関連を指摘する結論とは異なった結果を示してきわめて興味深い。一方、 γ_T に関しては、平板列、円柱列、角柱列のいずれの場合にも実験値の方が理論値よりも下回っているが、これは当然のことながら開口部におけるエネルギー損失によるものである。実用上の観点からは、実際の透過率を算定できることが必要であるが、そのためには線形理論である本理論にエネルギー損失による非線形効果を盛り込む必要があり、今後の課題である。なお、ここに得られた円柱列の場合の反射率、透過率の値は、Twersky⁵⁾が電磁波と通電円柱列との干渉の問題に対して得た解と一致する。

(2) スリット通過水粒子速度

図-9および図-10に、それぞれ円柱列および角柱列

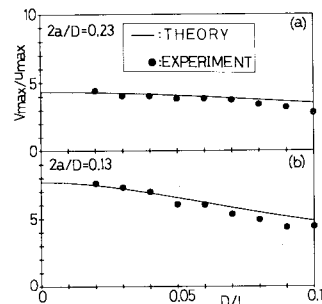


図-9 スリット通過水粒子速度（円柱列）

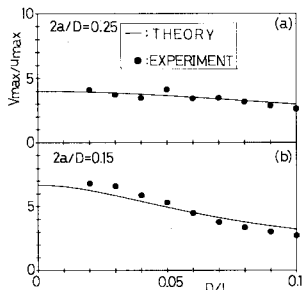


図-10 スリット通過水粒子速度 (角柱列)

の場合のスリット部通過水粒子速度の理論値と実験値との比較を示す。これらの図によれば、反射率の場合と同様にスリット部通過水粒子速度についても両者の対応はきわめてよく、本理論の妥当性が示されている。また同時に、水粒子速度についてもスリット部におけるエネルギー損失の影響はきわめて小さいことが示されている。なお、流速比の実験値の u_{max} の値は、その値が小さくて流速計に精度上の不安が持たれたため、すべて微小振幅波理論による値を用いた。

7. 結 語

平板列や円柱列、角柱列などの任意断面柱体列の波の反射率と透過率、スリット通過水粒子速度の諸量を MAE 法を適用することにより、境界値問題として解析した。このうち、平板列については、内的解に 2 つの異なる解を用いて解析できることを示した。また得られた理論値は、既往の理論値や実験値と比較し、その妥当性を確認した。

ここで得られた理論値は $2a/D$ (開口率) および D/L の関数として表わされる (角柱列の場合、さらに b/L の関数でもある) が、この D/L のパラメーターは従来の海岸工学分野におけるこの種の研究では着目されていなかった量である。

理論値と実験値との比較の結果、反射率およびスリット通過水粒子速度は線形理論である本理論のみによって精度よく算定でき、同時にそれらはスリットにおけるエネルギー損失の影響をほとんど受けないことも明らかにしたが、これは従来より一般に認識されてきた結論とは異なった結果を示していて興味深い。

最後に、本研究にかかわる費用の一部は実吉奨学会研究助成金によった。また本研究の遂行にあたっては、当時大阪市立大学院生 伊庭智生氏 (現・パシフィックコンサルタンツ(株)) に協力頂いた。ここに記して感謝の意を表します。

付録 無限流体中における円柱列の付加質量

無限流体流の中の固定物体に関する付加質量は、周知のように、物体周囲の速度ポテンシャルを知り、それより誘導される圧力を物体周囲にわたって積分することにより得ることができる。また、この固定物体周囲の流れの速度ポテンシャルは、その物体を無限静止流体中で振動させた場合の速度ポテンシャルを知ることができれば、それより容易に誘導される。Samoilovich²⁶⁾は、この後者に相当する場合の、無限流体中において振動する任意断面柱体列周囲の速度ポテンシャルの算定法を示した。原論文には例題も示されており、条件さえ決定されれば速度ポテンシャルを容易に求めることができる。以下にその手法により求められる柱体列の付加質量を示すが、柱体断面は円形 (半径 $r=1$) とし、また記号はすべて原論文に従うものとする。

いま、円柱列をその列の方向と直角に、

$$U = U_0 \cdot \cos \omega \tau \dots \dots \dots (A \cdot 1)$$

の速度で振動させる場合を考えよう。ただし、式中の ω は角振動数、 τ は時間座標である。この場合の円柱周囲上の速度ポテンシャルは、原論文の式 (3.7) より、

$$\begin{aligned} \varphi &= \cos \omega \tau \sum_{n=1}^{\infty} [2(-1)^{n-1}(n-1)!A_n + \gamma_n] \cos n\theta \\ &= \cos \omega \tau [2A_1 + U_0] \cos \theta + 2 \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)!A_n \cos n\theta \dots \dots \dots (A \cdot 2) \end{aligned}$$

と表わされる。ただし、式中の γ_n は、

$$\gamma_1 = U_0, \gamma_n = 0 \quad (n=3, 5, 7, \dots) \dots \dots \dots (A \cdot 3)$$

であり、また A_n (n : 奇数) の値は、原論文の式 (3.4)、

$$-(n-1)!A_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!q^{2k}C_k}{n!2^{2k-1}} A_{2k-n} = \gamma_n \dots \dots \dots (A \cdot 4)$$

を解くことによって求められる。ただし、式中の q は縮切り率 (=1-開口率) を表わし、 C_k は、

$$C_k = (-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k} / (2k)! \dots \dots \dots (A \cdot 5)$$

より求められる。式中、 B_{2k} はベルヌーイ数を表わす。

結局、式 (A・4) を解いて A_n を求め、求めた A_n の値を式 (A・2) に代入することにより柱体周囲の速度ポテンシャルが確定されることになる。

式 (A・4) は未知数 A_n に関する n 元連立方程式であるので、 A_n の最も厳密な形を求めるためには無限組の連立方程式を解く必要があるが、実際問題としては n 元の連立方程式を解き、第 n 次近似値を求めることになる。たとえば、第一次近似値 ($n=1$) としては、

$$-A_1 + q^2 C_1 A_1 / 2 = U_0 \dots \dots \dots (A \cdot 6)$$

の解として、

$$A_1 = 12 / (\pi^2 q^2 - 12) \cdot U_0 \dots \dots \dots (A \cdot 7)$$

が得られる。表-1 には、このようにして式 (A・4) を

表一 A_1 の値の次数 n による変化

n	q	0.97	0.90	0.75	0.50
1		-4.422	-2.996	-1.861	-1.259
3		-5.966	-3.275	-1.881	"
5		-6.530	-3.311	-1.882	"
7		-6.715	-3.315	"	"
9		-6.776	-3.316	"	"
11		-6.796	"	"	"
13		-6.802	"	"	"

解いて求めた A_1 の縮切り率 q および次数 n による値の違いを示した。表によれば、縮切り率が大きく（開口率が小さく）なればなるほど、正確な値を求めるためには高次の連立方程式の解を求める必要がある。しかしながら $q=0.9$ 程度になれば第7次の近似値でも十分な精度が期待でき、さらに $q=0.5$ 程度では第一次近似値で十分である。

このようにして、振動円柱列周囲の速度ポテンシャル ϕ が定められれば、振動流中の固定円柱列周囲の速度ポテンシャル ϕ' は

$$\phi' = \phi - U_0 \cos \theta \cos \omega t$$

$$= \cos \omega t \{ 2A_1 \cos \theta + 2 \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)! A_n \cos n\theta \}$$

($A_{2n}=0$)..... (A・8)

のように求めることができる。上式からベルヌーイの定理を介して求められる圧力より、質量係数は、結局、

$$C_M = -2A_1 / U_0 \dots\dots\dots (A・9)$$

となる。すなわち、質量係数には式 (A・2) 中の A_1 のみしか寄与していないことを知る。

参 考 文 献

- 1) 角野昇八・小田一紀・伊庭智生：細い多柱構造からの波の反射と透過現象の境界値問題解析，第30回海岸工学講演会論文集，1983。
- 2) Kakuno, S. : Water-wave reflection and transmission by an infinite array of vertical flat plates, Theoretical & Applied Mech., Vol.32, 1984.
- 3) Lamb, H. : Hydrodynamics, 6th ed., Dover, 1932.
- 4) Miles, J. W. : The diffraction of a plane wave through a grating, Quarterly Applied Math., Vol.7, 1949.
- 5) Twersky, V. : On scattering of waves by the infinite grating of circular cylinders, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Vol.10, 1962.
- 6) Burke, J. E. and Twersky, V. : On scattering of waves by the infinite grating of elliptic cylinders, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Vol.14, 1966.
- 7) 大楠 丹：多数の浮体で支持された海洋構造物に作用する波力について，西部造船会会報，Vol.51, 1976.

- 8) Spring, B. H. and Monkmeier, P. L. : Interaction of plane waves with vertical cylinders, Proc. 14th ICCE., 1974.
- 9) Massel, S. R. : Interaction of water waves with cylinder barrier, Proc. ASCE, Vol.102, WW2, 1976.
- 10) 林 泰造・服部昌太郎ほか：筒型透過性防波堤の水利特性について，第12回海岸工学講演会論文集，1965。
- 11) 林 泰造・服部昌太郎ほか：透過性鋼管防波堤の水利，第13回海岸工学講演会論文集，1966。
- 12) 林 泰造・服部昌太郎ほか：透過性鋼管防波堤と底質の移動について，第14回海岸工学講演会論文集，1967。
- 13) 林 泰造・服部昌太郎ほか：透管性鋼管防波堤と基部沈掘，第15回海岸工学講演会論文集，1968。
- 14) 浦島三朗ほか：縦スリット壁に作用する波力に関する基礎的研究，第30回海岸工学講演会論文集，1983。
- 15) 堀口孝男ほか：スリット壁式消波構造の水利解析，第27回海岸工学講演会論文集，1980。
- 16) 谷本勝利ほか：スリットケーソンの反射率に及ぼす諸要因の影響，第29回海岸工学講演会論文集，1982。
- 17) 萩原運弘：積分方程式法による両面透過型防波堤の消波特性の解析，第30回海岸工学講演会論文集，1983。
- 18) Tuck, E. O. : Transmission of water waves through small apertures, JFM, Vol.49, 1971.
- 19) Kakuno, S. : Water-wave transmission and reflection by a vertical aperture in a plane screen, Memoirs of the Faculty of Engng., Osaka City Univ., Vol.23, 1982.
- 20) Ryzhik, I. M. et al. : Tables of Integrals, Series and Products, Academic Press, 1965.
- 21) Tuck, E. O. : Matching problems involving flow through small holes, in Advances in Applied Mech., Vol.15, Academic Press, 1975.
- 22) Newman, J.N. : Lateral motion of a slender body between two parallel walls, JFM, Vol.39, 1969.
- 23) Sedov, L. I. : Two Dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics, Wiley, 1965.
- 24) Mei, C. C. et al. : Quadratic head loss and scattering of long waves, Proc. ASCE, Vol.100, WW3, 1974.
- 25) Taylor, P. J. : The blockage coefficient for flow about an arbitrary body immersed in a channel, J. Ship Research, Vol.17, 1973.
- 26) Samoilovich, G. S. : Calculating the nonstationary flow around a lattice of arbitrary profiles which vibrate with an arbitrary phase shift, J. Applied Math. & Mech., Vol.26, 1962.
- 27) 近藤俊郎：直立消波構造物の水利特性，第17回水工学に関する夏期研修会講義集，1981。
- 28) 村上仁士・越智 裕：防波堤による波のエネルギー逸散および湾水振動の制御について，第22回海岸工学講演会論文集，1975。

(1985.6.22・受付)