

# 大雨の頻度

## FREQUENCY OF RECORD-BREAKING LARGE PRECIPITATION

江藤剛治\*・室田 明\*\*・米谷恒春\*\*\*・木下武雄\*\*\*\*

By Takeharu ETOH, Akira MUROTA, Tsuneharu YONETANI and Takeo KINOSHITA

The authors have presented a probability density function of total rainfall depth of a single storm. It is expressed in terms of the second kind modified Bessel's function. Using the asymptotic expansion of the function, a simple probability density function of the annual maximum precipitation depth is derived, which is named "SQRT-exponential-type distribution of maximum". The p. d. f. is long-tailed compared with the Gumbel's distribution, which suggests higher probability of the occurrence of record-breaking large precipitations or so-called outliers. For example, the historical maximum 24-hour precipitation at Osaka (283.7 mm) is reasonably evaluated by means of the p. d. f. as once a 214-year precipitation, while Gumbel's distribution evaluates it as once a 955-year precipitation, which is apparently unrealistic.

### 1. はじめに

大洪水、大濁水はどのくらいの頻度で起こるのであるか？ 大きな被害をもたらした洪水、濁水時の雨を、通常確率評価手法で評価すると、数千年に1回の大雨、少雨と評価されることはまれではない。これらが非現実的な数字であることは誰も認めるところであろうが、このような値が出る理由について、本気で検討した人は、わが国にはあまりいないようである。確率は水工計画上の1つの指標にすぎず、計画が動き出すかどうかは、一に実際に大洪水が起こるか、大濁水が生じるかにかかっているとはいえ、計画の基本量である大雨・少雨の生起確率についてのこのような大きな問題を、未解決のままに放置しておくわけにはいかない。本論文ではこのうち大雨の生起頻度の問題について検討する。

雨量の確率統計解析については、1950年代までに非常に多くの研究が行われた<sup>1)</sup>。現在使われている手法の

ほとんどはその当時に開発されたものである。いまあらためてこの問題を取り上げた動機は以下のごとくである。

- ① 毎年のようにどこかで未曾有の大雨が生起する。その雨が降る以前の観測値系列より大雨の確率分布を求め、それを用いてその雨を確率評価すると、その生起頻度は数百～数千年に1回という非現実的な値になる。後述のごとく、いくつかの理由が考えられるが、確率統計解析の手法に問題がないかという点についても検討を加える必要がある。
- ② 1950年代からすでに30年が経過し、その間に膨大な水文資料が蓄積された。また電子計算機が発達し、それらを効率的に処理することが可能になった。たとえば前記のような事態に限られた地点ではなく全国的に生じていることは、電子計算機による大量のデータ処理により明らかになってきた。この意味でも1950年代の仕事は見直されて当然である。
- ③ 同様の事態はわが国だけでなく、アメリカ合衆国などでも問題になっている。このような大雨は確率紙上で、その他の点のグループから大きく外れてプロットされるので、outliersとよばれている<sup>2)</sup>。

未曾有の豪雨とよばれるような大雨の生起する原因としては、次のようなことが考えられる。

\* 正会員 工博 近畿大学教授 理工学部土木工学科  
(〒577 東大阪市小若江3-4-1)

\*\* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科  
(〒565 吹田市山田丘2-1)

\*\*\* 国立防災科学技術センター 第一研究部風水害研究室長  
(〒305 茨城県新治郡桜村天王台3-1)

\*\*\*\* 正会員 理博 同上 第一研究部長(同上)

- ① 確率分布の適否
- ② 非正常性:たとえば実測年最大水文量時系列に内在する周期成分, 傾向成分の影響等.
- ③ 非均一性:たとえば台風性降雨, 前線性降雨のように, 異なる種類の降雨を一緒にして統計処理することの問題.
- ④ 異常値
- ⑤ 資料の信頼性

以上のうち, ①~③は統計処理の方法に問題がある場合である. この場合記録破りの大雨であっても, それを正しい方法で確率評価すれば異常値とはならない. ④の異常値は, 数年に一度は生起する程度の大雨とは全く異なる物理機構で発生する異常な豪雨の発生を意味する. ④, ⑤等による outlier は contaminant とよばれる<sup>2)</sup>.

本論文では主として①の問題, すなわちあてはめる確率分布が適当であるかどうかという点について検討する.

江藤は一雨総雨量の年最大値の確率分布として, 「平方根指数型最大値分布 (SQRT-ET-max distribution)」を提案した<sup>3)</sup>. 本論文ではこれを大阪の時間雨量, 全国の年最大日雨量資料に適用し, 平方根指数型最大値分布を用いることにより, 記録破りの豪雨の発生の問題をどの程度説明することができるか検討する.

## 2. 一雨総雨量の年最大値の確率分布

著者らは一雨の総雨量 (以後, 総雨量とよぶ) の確率分布として「平方根 K 分布」を提案した<sup>1)</sup>. 平方根 K 分布は次のような仮定のもとに導かれる.

- ① 一雨の継続時間とピーク雨量は独立.
- ② 一方は指数分布に, 他はガンマ分布 (当然指数分布でもよい) に従う.
- ③ 総雨量はそれらの積 (の 1/2) に比例する.

以上はあまり無理のない仮定である. たとえば継続時間とピーク雨量の間にある程度の従属性は認められるが, その相関係数は 0~0.5 程度であってきわめて小さい<sup>4)</sup>. よって平方根 K 分布が総雨量の頻度分布によく適合する可能性は高い.

ただし, 平方根 K 分布の確率密度関数は第 2 種変型ベッセル関数を含むので, 実際的な取り扱いに不便である. よって理論的な厳密さはできるだけ保ちつつ, これを単純化して簡便な確率分布関数を導くことを考える.

大雨を問題にするのであるから, 変数の大きい部分で高い近似度を保つように関数を単純化する. このため第 2 種変型ベッセル関数の漸近展開公式を使うと, 個々の一雨の総雨量の確率分布は, 平方根指数分布に従うことが導ける. さらに, 年間の大雨の生起回数はポアソン分布に従うと仮定すると, 総雨量の年最大値分布として,

次の「平方根指数型最大値分布」が導かれる (補遺 1 参照).

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ \exp[-\lambda(1 + \sqrt{\beta x}) \exp(-\sqrt{\beta x})] & \dots\dots\dots (1) \\ & (x \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここに  $\beta$  はスケールを代表する母数,  $\lambda$  は一雨の年平均生起回数を代表する母数.

これより明らかなように, 平方根指数型最大値分布の分布関数の母数は 2 個, 式形はガンベル分布と同程度に単純である. ただしガンベル分布よりはるかに長く裾を引く. このことはより大きな雨の生起を示唆している.

以上より, 年最大総雨量は平方根指数型最大値分布に従うこと, ガンベル分布から予想されるよりはるかに大きな総雨量をもつ大雨が生起すること, などが理論的に予想される.

個々の雨量の確率分布として, 平方根指数分布のかわりに指数分布を用いると, よく知られたように, その年最大値分布はガンベル分布となる. ピーク雨量は指数分布に従うといわれているので, 年最大時間雨量などについてはガンベル分布に従う可能性が高い (補遺 5 参照).

## 3. 実測値への適用

### (1) 検討の方針

できるだけ客観的な評価を行う. このためパラメトリックな手法, すなわち確率分布関数等を仮定して確率評価する方法のみについて検討する. この場合原則として, 分布関数の優劣は, 実測資料への適合度等で判断する.

一般的に分布関数のなかの母数の数が多ければ多いほど, すでに観測された資料への適合度は上がる. ただし多すぎても意味がない. 逆に推定値が, 推定に用いたサンプルごとに, 大きく変わる可能性がある. よって, 資料数に対応する最適な母数の数が存在するはずである.

通常水文解析では異常に大きい値か小さい値の確率評価を目的とすることが多い. よって優劣の比較においては, 資料全体に対する全般的な適合度のほかに, 分布の裾において安定的に, もっともらしい推定値を与えるかどうか重要な評価項目になる.

以上より, 次のような方針に従って検討する.

以下の評価基準を用いる.

- ① 尤度
- ② 推定値の安定性
- ③ 推定値の妥当性
- ④ 理論的背景の有無
- ⑤ 簡便性

おのおのの意味について説明する. 全体的な適合度は, 原則として, 尤度によって比較する. 尤度は, 全般的な適合度の客観的な指標の 1 つである.

安定性については, 既往最大値の再現期間, 100 年確率総雨量等, 雨量が非常に大きいところでの推定値の変

動幅で評価する。資料の統計年数を変えたときの安定性、既往最大値等を除いたときの安定性を評価する。当然変動幅が小さいほどよい。

推定値の妥当性は、推定値が常識的な値の範囲に納まっているかどうかを意味する。たとえば既往最大値の再現期間が1000年以上になる場合が多数生じるとすれば、妥当な推定値とはいえない。客観的な評価基準は決めるににくいので、次のような基準を1つの目安とする。統計年数を  $N$  とするとき、 $N$  年確率値を求める。これが真に  $N$  年確率値になっていれば、既往最大値は、 $N$  年確率値の回りにほぼ均等にばらつくはずである。 $N$  が大きいときは、 $N$  年既往最大値が  $N$  年確率値より小さくなる確率は  $36.8\%$  ( $=e^{-1}$ ) である(補遺4参照)。多くの地点について評価し、既往最大値が  $N$  年確率値より大きい場合と小さい場合の数を調べる。その数が極端にどちらかに偏るような確率分布は採用しない。小さくなる確率が約  $37\%$ 、大きくなる確率が約  $63\%$  となれば理想的である。

当然、理論的にしっかりした背景をもつ確率分布が望ましい。ただし、分布関数形が複雑で実用時に簡便性が欠くような確率分布は採用しない。

母数の数が2であるか3であるかによって、上記の諸指標は大きく変わる。当然3の方がすでに観測された資料への適合度ははるかに高くなる場合が多い。よってまず、母数が2の確率分布関数のグループと、3の確率分布関数に分けて評価する。母数が3の確率分布としては、3母数対数正規分布を取り上げる。後述するように、3母数対数正規分布による推定は、用いるサンプルに依存し過ぎて不安定な推定値を与える。よって4以上の確率分布関数は検討の対象としない。これまで、母数が4以上の確率分布関数が用いられた例はほとんどないのもこのような理由によるものと思われる。

種々の時間単位の年最大雨量資料に対して、数種の確率分布をあてはめ、比較・検討する。

まず大阪管区気象台観測の時間雨量資料(1900~1983年、6~10月)、および年最大10分雨量資料(1933~1967年)を用いて詳細な優劣比較を行う。次に大阪の雨に対して得られる結果が、他の地点においても普遍的に成り立つかどうか検討する。特に、平方根指数型最大値分布とガンベル分布の2つを取り上げ、全国56地点の気象台観測の年最大日雨量資料(観測開始~1980年)を用いて分布関数の適合性、推定値の妥当性などを比較する。

以下平方根指数型最大値分布とガンベル分布の母数推定には最尤法を(補遺3参照)、2母数対数正規分布(位置母数  $b=0$ )、および3母数対数正規分布( $b \neq 0$ )の母数推定にはそれぞれ、積率法の修正法である高瀬

法<sup>5)a</sup>、石原・高瀬法<sup>1)b</sup>を用いる。

## (2) 大阪の雨に対する適用

### a) 資料

大阪では昭和32年(1957年)の梅雨期に記録破りの豪雨が続いた。ピーク時の時間雨量が50mmを超える雨が、わずか3週間の間に3度も起こった<sup>6)</sup>。中でも6月26~27日の雨の24時間雨量は283.7mmにおよんだ。近傍の八尾では310mmを超える24時間雨量が観測された。大阪管区気象台観測の24時間雨量記録の2位以下が209.6, 188.5, 183.2, ..., mmであることを考えれば、この雨がいかに記録破りの豪雨であったかがわかる。この雨を、ガンベル分布、位置母数  $b$  が0の対数正規分布など、常用される2母数の確率分布関数を用いて確率評価すると、その再現期間は数百~数千年となる。著者らは、大阪の都市河川の治水のあり方について検討を続けているが、この雨の取り扱いに苦慮したことが本研究の動機の一つとなった。よってこの雨の生起に対して無理のない説明がつかどうか、分布の優劣比較における重要なポイントの一つとなる。

時間雨量資料から1~48時間雨量を作った。一雨雨量については今のところはっきり決まった定義はない。適当な時間無降雨が続けば別の一雨とし、各一雨ごとの総雨量を求めた。分別のための無降雨継続時間は、3, 6, 12, 24時間とした。これらを  $z_3, z_6, \dots$  と書くことにする。それぞれの系列の、各年の最大値をピック・アップした。

### b) 推定値の安定性・妥当性

表-1は1957年の年最大24時間雨量記録を確率評価したものの例である。八尾の記録も評価しているが、この場合も大阪の資料を用いて推定した母数を使って評価している。ガンベル分布を用いた場合、再現期間  $T$  は955~2500年となる。84年間の資料しかないと考えれば、この値はあまりにも大きすぎ、とても妥当な推定値とはいえない。一方平方根指数型最大値分布による場合は214年(大阪)、および380年(八尾)となる。3母数対数正規分布による場合は  $T=249\sim 442$  年となる。

表-1 種々の分布関数による大阪の既往最大24時間雨量の確率評価(大阪, 1957年6月26~27日, 単位:(確率)年)

\*) 1957年の記録を除いて推定した値

\*\*) 平方根指数型最大値分布

分布型		資料 年数	大阪 283.7mm	八尾 311.2mm
2 母 数	ガンベル	84	955	2500
		83*	1808	5140
	平方根**)	84	214	380
		83*	351	653
3母数対数正規	84	249	442	
	83*	2381	7143	

84年間の資料の中にこの程度の値が含まれる確率は低くない。たとえば214~380年確率以上の雨が84年間に降る確率は20~33%となる(補遺4参照)。

次に推定値の安定性を調べるために、1957年の記録を除いた資料系列に各分布をあてはめて母数を推定し、これらを用いて1957年の記録を確率評価した。結果を表一に併記している。当然 $T$ は大きくなる。ただし2母数の確率分布を用いる場合には2倍程度にしかならないのに対して、3母数対数正規分布を用いる場合には、大阪の記録で249年から2381年に、八尾の記録では442年から7143年に変わる。このことは図一からもよくわかる。図中実線は全資料を用いて推定された確率分布を、破線は1957年の記録を除いた資料から推定された確率分布を示す。左2つの分布(平方根指数型最大値分布、ガンベル分布)では、1957年の記録を除いてもあまり大きな影響を受けず、安定した分布の推定がなされているが、3母数対数正規分布の場合には、この記録を含むか含まないかに依存して、推定結果が大きく変わっていることがわかる。すなわち3母数対数正規分布を用いる場合には、実際に記録破りの大雨が降ったのち、事後的に、その程度の雨は降ってもおかしくなかったとはいえるが、その直前までは、そのような大雨の生起を全く予測することができない。

表中には示していないが、2母数対数正規分布による値は、ガンベル分布による推定値と似た値となった。念のために、ガンベル分布については角屋法<sup>16)</sup>による推定値も求めたが、オーダー的に最尤法と変わらない値が得られた。3母数の確率分布については今のところ、3母数対数正規分布しか検討していないが、他の3母数の確率分布についても、対数正規分布の場合と同様の結果が得られることはかなりの確度で予想される。

以上より、以下の結論が得られる。

- ① 現在常用されている2母数の確率分布を用いる場合には、大阪の1957年の記録のような大きな雨の

生起する可能性を説明することはできない。

- ② 3母数の確率分布を用いれば、このような大きな記録の部分にもある程度フィットする分布曲線が得られるが、大きな記録がすでに生じたかどうかによって推定された分布曲線が不安定に変動する。
- ③ 平方根指数型最大値分布は2母数の確率分布であるから推定値は安定である。かつまた大雨の生起も無理なく説明する。

ただし以上は大阪の24時間雨量資料に対して得られた結論にすぎない。よって引き続いて、多くの地点で観測された、種々の雨量資料を用いて検討を続ける必要がある。以後は主として平方根指数型最大値分布の適合性について検討する。比較のために、同じ2母数の確率分布であり、常用されているガンベル分布の適合性も同時に検討する。

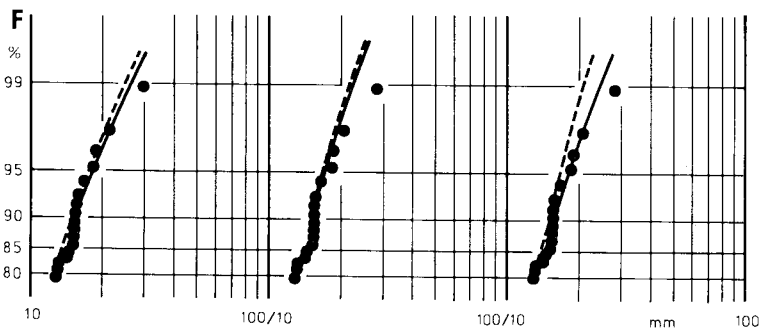
#### c) 種々の時間単位の雨量資料に対する適合度

10分~48時間雨量、無降雨継続時間が6~24時間で分別した1・2雨量の総雨量の年最大値に対して、平方根指数型最大値分布、ガンベル分布をあてはめて尤度を比較した。結果を表二に示す。

年最大10分、および1時間雨量についてはガンベル分布の方が適合度(この場合尤度)が高い。それ以外の場合は全般的に平方根指数型最大値分布の方が適合度が高い。24時間程度の時間単位の雨量は、おおむね一雨総雨量とみなし得ることを考えれば、総雨量のみならず、時間単位が数~数十時間の雨量の年最大値に対しても、平方根指数型最大値分布の方が適合度が高いことは十分予想される結果である(補遺5参照)。

10分~48時間雨量について、実測値のワイブル・プロットと推定された分布曲線を比較したものを図二に示す(補遺6参照)。また24時間雨量についての比較例は、図一にも示されている。これらの図からも上記の結論が正しいことがよくわかる。

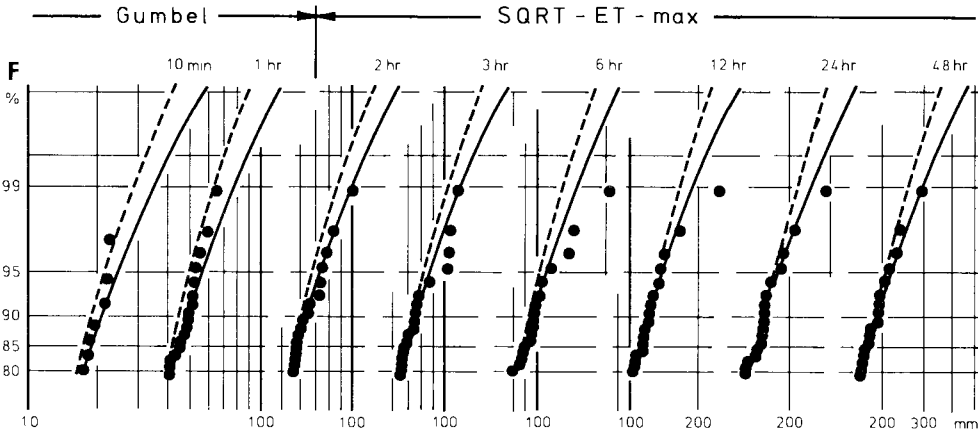
以上より、年最大ピーク雨量に対してはガンベル分布



図一 既往最大雨量を除くときの確率評価の安定性(大阪、年最大24時間雨量)

左より、平方根指数型最大値分布、ガンベル分布、3母数対数正規分布

実線：84年間の全資料を用いて推定したもの、破線：既往最大値を除いて推定したもの



図一 平方根指数型最大値分布とガンベル分布の適合度の比較 (大阪, 年最大 10分～48 時間雨量)  
 実測値: ワイブル・プロット, 実線: 平方根指数型最大値分布, 破線: ガンベル分布

表一 平方根指数型最大値分布とガンベル分布の尤度の比較 (大阪, 年最大 10分～48 時間雨量, 同一雨総雨量)

資料	Gumbel $\times 10^{-2}$	SQRT-ET-max $\times 10^{-2}$
10 min	5.095	4.890
1 hr	2.327	2.302
2 hr	1.734	1.747
3 hr	1.477	1.492
6 hr	1.189	1.221
12 hr	0.931	0.939
24 hr	0.712	0.718
48 hr	0.578	0.580
Z <sub>6</sub>	0.544	0.551
Z <sub>12</sub>	0.536	0.535
Z <sub>24</sub>	0.448	0.451

が、年最大一雨総雨量、あるいは年最大数～48 時間雨量に対しては平方根指数型最大値分布が適合度が高いと結論することができる。これは 2. の最後に述べた、理論的予想に合う結論である。

何時間雨量から、ガンベル分布よりも平方根指数型最大値分布の方が適合度が高くなるのかは、興味のあるところである。表よりわかるように、大阪の雨の場合には、2 時間を境にして、それ以上では平方根指数型最大値分布の方が適合度が高く、それ未満ではガンベル分布の方が適合度が高い。

(3) 全国の日雨量に対する適用

降雨観測期間の長い 56 気象台を選び、その年最大日雨量資料に上記 2 種の確率分布をあてはめた。結果を表一 3 に示す。表中右端は 2 つの分布の尤度を比較したものの、あとは推定された N 年確率日雨量と実績最大日雨量を比較したものである。N は観測期間である。実績最大日雨量の方が大きい場合に X 印を付している。もし N 年確率日雨量が正しく推定されていれば、過去 N 年間の実績最大日雨量は、N 年確率値より小さいものが

表二 平方根指数型最大値分布とガンベル分布の比較 (年最大日雨量, 全国 56 地点, 観測開始～1980 年)

全国の日雨量に対するガンベル分布と平方根指数型最大値分布のあてはめの妥当性の比較 (観測開始～1980 年)

地点番号	資料年数 N	既往最大値と N 年確率日雨量の大小関係		尤度の大小比較
		ガンベル	平方根	
407	83	×	×	E
409	91	○	○	G
412	94	×	○	E
890	88	×	○	E
893	94	×	×	E
895	89	×	×	E
全 56 地点	81～105 平均 84.4	○: 実績最大の方が小 ×: 実績最大の方が大		E: 平方根指数が大 G: ガンベルが大
まとめと備考	ただし欠測年除く	4/56 = 7.14 %	19/56 = 33.9 %	E:G = 44:12

約 37 %、大きいものが約 63 % となるはずである。

表一 3 より、ガンベル分布を用いるときは、93 % の地点ですでに、N 年確率日雨量を上回る雨が起していることになる。同様に 100 年確率日雨量を上回る雨が起している地点は 56 地点中 50 地点となる。平均資料年数は 84.4 年であるにもかかわらず、実に 90 % の地点ですでに 100 年確率値以上の日雨量が起していることになってしまったことがわかった。

ガンベル分布を用いて推定した雨量より、はるかに大きな雨が起することは、長年、個々の河川の治水計画担当者を悩ませた問題であるが、このような事態は、全国あらゆる地域で生じていることがわかった。

平方根指数型最大値分布を用いるとこの問題はほぼ完全に解決する。すなわち、表一 3 よりこの場合は、実績

最大の方が小さい地点が約34%、大きい地点が約66%となる。理論値に比べてわずか3%の差である。

平方根指数型最大値分布を用いても、56地点中4地点で、実績最大日雨量が1000年確率値以上となった。一方理論上、観測期間内に1000年確率値以上の雨が降る確率は8.1%、これに56をかけると地点数では4.5地点となる。これによってこの値についても平方根指数型最大値分布を用いれば、理論的予測と実測値から得られる結果はほぼ完全に一致した。この場合1000年確率値以上と評価された雨も、決して異常値ではなく、確率的にみても生じるべくして生じた雨ということになる。

明治29年(1896年)、彦根で観測された日雨量596.9mmは7800年確率雨量(ガンベル分布では700万年確率)と評価される。これまで著者らもこの観測値の信頼性には疑念を抱いていた。しかしこの80数年間に、この値を超える値が生起する確率は1.1%、これに地点数56をかけると0.6地点で1回はこの値以上の値が生ずることになる。よってこの雨もまた降るべくして降った雨だということになる(以上補遺4参照)。

まだ、偶然、このような結果が得られたのかもしれないという不安は残るが、わが国の年最大日雨量資料を用いる限り、平方根指数型最大値分布を適用することにより、大雨の頻度分布における、いわゆる outlierの問題はほぼ完全に解決されたようにみえる(補遺7参照)。

表一3より、約80%の地点で平方根指数型最大値分布の方がガンベル分布より適合度が高いことがわかる。少ないとはいえ5地点のうち1地点ではガンベル分布の方が適合度が高いわけであるが、大雨の観測記録は本来

ランダムに大きく変動するものであるから、より長い観測記録がそろったときに、これらの地点でまだガンベル分布の方が適合度が高いかどうかは疑問である。

#### (4) ま と め

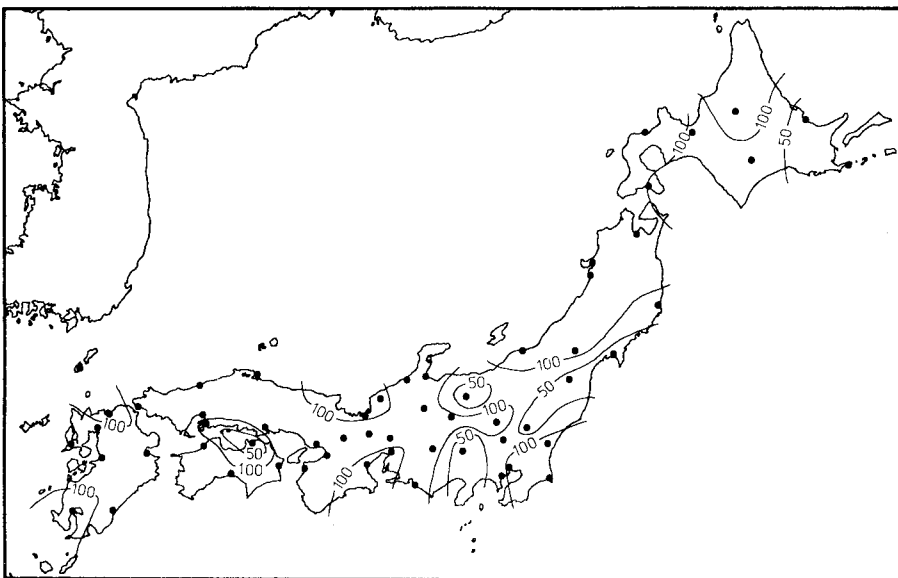
以上より、全般的な適合度、変数値が大きいところでの推定値の安定性・妥当性、理論的な背景の有無、簡便性のいずれの面からみても、一雨総雨量、あるいは日単位程度の雨量の年最大値系列に対して、平方根指数型最大値分布をあてはめることが妥当であることが明らかになった。またこれが、これまで解答らしい解答が与えられていなかった outlierの問題に対する、説得力のある説明の1つとなる可能性が高いことが示された。

#### 4. 実際の計画策定における役割

平方根指数型最大値分布を用いることによってまず、これまで未曾有の雨とか異常な豪雨などよばれていたような大雨の多くは、決して未曾有でも異常でもなく、十分起り得る雨であることが示された。よってこのような実績豪雨を対象として治水計画を策定することの妥当性が支持される。

またかなり大きな雨が、これまで想定されていたよりも高い頻度で起こることになるから、治水工事の経済効果が大きくなる。

次に今後予想外の大雨が降る可能性の高い地域を予測する。平方根指数型最大値分布を用いて推定されるN年確率値と同程度の、大きな雨がまだ降っていない地域を考える。前節で用いた日雨量資料を使って、どの地域がそのような地域にあたるのか調べてみる。ただ地点数



図一3 実績最大日雨量の再現期間の等高線表示(観測開始~1980年)

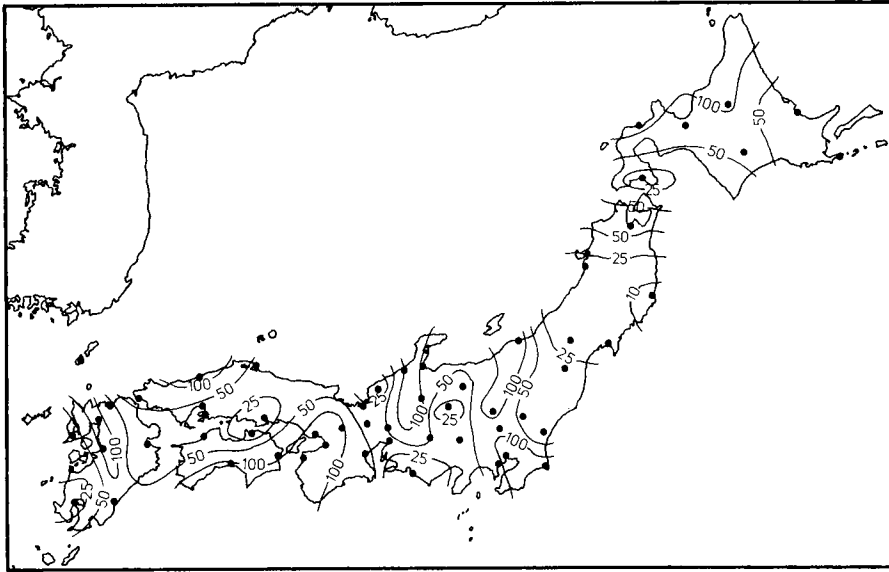


図-4 戦後（1946年以後）最大日雨量の再現期間の等高線表示  
 （母数推定には、観測開始～1980年の資料を使用）

が少ないので、十分密で、精度の高い推定はできない。あくまでも利用の仕方の例を示すにすぎないことを断っておく。

観測開始以来の全資料を用いて、実績最大値を確率評価し、再現期間を等高線表示したものが図-3である。同様に第二次大戦後（1946年以後）の最大値を確率評価したものが図-4である。これは現在の大河川の当面の治水目標水準が戦後最大値<sup>7)</sup>であることに対応する。全資料を用いた場合は、北海道南部および東部、甲州信州地域、阿武隈山地周辺がまだ本格的な豪雨の洗礼を受けていないことになる。これらの地域での既往最大値は50年確率降雨規模である。

戦後最大値を用いる場合は、東北、甲州信州東海地域、瀬戸内中部であまり大きな雨が降っていないことがわかる。特に東北では広い範囲にわたって確率年の低い地域が分布している。これらの地域での戦後最大値は25年確率降雨規模である。

これらの地域では、実績最大値主義による治水計画はかなり危険な計画となる。ただ用いた資料が1980年までの日雨量記録であるから、それ以後現時点までの5年間で上述の地域の豪雨記録はすでに塗りかえられた可能性もある。またピーク雨量に関しては時間雨量をもとにして分析する必要があるので、上記の結果とは異なる結果が得られるはずである。

## 5. 結 語

大雨の生起頻度について検討した。

「平方根指数型最大値分布」を、大阪の時間雨量資料、全国56地点の年最大日雨量資料に適用した。

一般的な適合度、変数値が大きいところでの推定値の安定性・妥当性、理論的な背景の有無、簡便性のいずれの面からみても一雨総雨量、あるいは日単位程度の雨量の面からみても、一雨総雨量あるいは日単位程度の雨量ではめることが妥当であることが明らかになった。

たとえばガンベル分布を用いて、全国各地の年最大日雨量資料を確率評価すると、90%の地点ですでに、100年～数百万年確率降雨が記録されていることになってしまったことがわかった。この問題はいわゆる outlierの問題とよばれている。

まだ偶然であるという可能性も残っているが、少なくとも、わが国の年最大日雨量系列に関する限り、平方根指数型最大値分布を用いることにより、outlierの問題はほぼ完全に説明された。

謝 辞： outlierの問題が重要であることは高棹琢馬京大教授より示唆していただいた。本論文およびその姉妹論文<sup>8)</sup>に述べた研究遂行にあたっては、文部省科研費自然災害特別研究57020040「都市河川の治水トータルシステムの信頼性に関する研究（研究代表者：吉川秀夫早大教授）」、近畿大学研究助成金などの補助を受けた。大阪の時間雨量資料は、端野道夫徳島大学教授が作成していたものをベースにして、資料を追加して作成した。原稿作成の過程で神田 徹神戸大学助教授、星 清氏（北海道開発局）に有益なコメントをいただいた。ま

た関係役所にもあらゆる面でご協力いただいた。以上記して研究にご協力いただいた方々に深甚の謝意を表する次第である。

補遺 1<sup>注1)</sup>

(1) 平方根指数分布

平方根 K 分布の確率密度関数は次式で表わされる<sup>4),11),12)</sup>。

$$h(x) = c \cdot (\sqrt{\beta x})^{-\nu} K_{\nu}(\sqrt{\beta x}) \dots\dots\dots (2)$$

$$c = 2^{\nu-1} \beta / \Gamma(1-\nu) \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\nu$  は形状母数、 $\beta$  は尺度母数。また、 $K_{\nu}(s)$  は第 2 種変形ベッセル関数で<sup>9)</sup>、

$$K_{\nu}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{2}\right)^{\nu} \int_0^{\infty} t^{-\nu-1} \exp\left(-t - \frac{s^2}{4t}\right) dt \dots\dots\dots (4)$$

大雨を対象とする場合は変数が大きい場合の分布特性が重要となる。よって第 2 種変形ベッセル関数の漸近展開公式<sup>9)</sup>を用い、第 1 項のみを採用すると、

$$K_{\nu}(z) \sim \sqrt{\pi/(2z)} e^{-z} \dots\dots\dots (5)$$

(5) を (2) に代入する。さらに  $x$  の大きいところでは指数関数部の変化に対して、べき乗部の変化が無視できることを考慮すれば、

$$h(x) \sim \exp(-\sqrt{\beta x}) \dots\dots\dots (6)$$

式 (6) の関数形を仮定し、全領域にわたって確率密度関数を積分したものが 1 になるという条件から、係数を求めると、

$$h(x) = \beta/2 \cdot \exp(-\sqrt{\beta x}) \quad (x \geq 0) \dots\dots\dots (7)$$

式 (7) の確率密度関数で表わされる確率分布を「平方根指数分布 (SQRT exponential-type distribution あるいは SQRT-ET distribution)」とよぶことにする。確率分布関数も簡単に求めて、

$$H(x) = 1 - (1 + \sqrt{\beta x}) \exp(-\sqrt{\beta x}) \dots\dots\dots (8)$$

平方根指数分布は次のような特徴をもつ。

- ① 母数は  $\beta$  ただ 1 つである。
- ② 確率分布関数も、積分を含まない簡単な関数となる。
- ③ 指数分布に比べて、はるかに長く裾を引く。すなわち大きな値が生起する可能性が高い。
- ④ 一雨総雨量の確率分布として理論的に導かれた。

第 2 の特徴について補足する。正規分布、ガンマ分布など常用される確率分布のほとんどについて、確率密度関数の積分ができない。すなわち確率分布関数が初等関数では表わせない。よって数表や数値積分などを用いて

生起頻度等を確率評価せざるを得ない。また後述の最大値分布関数 (式 (12)) は、確率分布関数の指数関数の形を取る。よって②の性質が満たされないときは、最大値分布関数は指数部に積分形をもつ、複雑な関数形となる。よって第 2 の性質も実用上きわめて重要な特徴である。

(2) 平方根指数型最大値分布

よく知られたように、マートク・ポイント・プロセスに従う時系列において、ある期間内の最大値の確率分布関数は式 (12) で表わされる (補遺 2 参照)。

式 (12) に (8) を代入すると、総雨量の最大値の確率分布関数として次式が得られる。

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ \exp[-\lambda(1 + \sqrt{\beta x}) \exp(-\sqrt{\beta x})] & \dots\dots (9) \\ & (x \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この確率分布関数をもつ分布を「平方根指数型最大値分布 (SQRT exponential-type distribution of maximum, あるいは SQRT-ET-max distribution)」とよぶことにする。

( $x \geq 0$ ) の条件付き確率密度関数は、

$$f(x) = 1/(1 - e^{-\lambda}) \cdot \lambda h(x) F(x) \dots\dots\dots (10)$$

$h(x)$ 、 $F(x)$  は式 (7)、(9) で表わされる。

平方根指数型最大値分布は、平方根指数分布の項で述べたと同様の特徴をもつ。ただし、母数は  $\lambda$ 、 $\beta$  の 2 個である。また最大値分布であるから、平方根指数分布を導くときに用いた、 $x$  が大きいという条件は自動的に満たされている。

よく知られたように、式 (8) のかわりに、指数分布の確率分布関数を用いれば、ガンベル分布が導かれる。平方根指数型最大値分布は、 $\lambda$  が大きいときにはガンベル分布に漸近するかもしれないが、一般的には、ガンベル分布に比べて、はるかに長く裾を引く。

実測値への分布のあてはめ (母数の推定) は最尤法によるのがよい。安定性がよく、かつ簡便な最尤解法として補遺 3 に述べる方法を提案する。

補遺 2

ある事象の生起回数  $k$  がポアソン分布に従うとき、

$$p(k) = \lambda^k / k! e^{-\lambda} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $p(k)$  は生起回数が  $k$  である確率、 $\lambda$  は事象の平均生起回数。

事象の生起回数が  $k$  という条件下で、そのいずれもが  $x$  を超えない確率は、 $H(x)^k$ 。

ここに  $H(x)$  は各変数の確率分布関数。

$k$  もランダムであることを考慮すれば、どの変数も  $x$  を超えない確率、すなわち最大値分布の分布関数は、

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k / k! e^{-\lambda} \cdot H(x)^k$$

注 1) 本文中の説明をわかりやすくするために、式の導出、補足的な説明等ではできる限り補遺に入れた。

注 2) 文献 4) では少し異なる表式を用いている。本論文では  $\beta = \gamma^2$  として書き換えている。また式 (3) 右辺の最初の係数  $2^{\nu-1}$ 、式 (4) 中の  $1/2$  は、文献 4) ではそれぞれ  $2^{\nu-3}$ 、 $2$  となっている。本論文の表式が正しい。



$$= \exp[-\lambda(1-H(x))] \dots\dots\dots (12)$$

ただし、 $x < 0$  のときは  $F(x) = 0$ .

### 補遺 3

通常は対数尤度関数を母数で偏微分して 0 と置いた関数を連立して解き、母数を求める。この方法より、次の方法の方が安定性もよく、簡便である。

- ① 対数尤度関数を  $\beta$  で偏微分し、0 とおいた関数を解いて  $\lambda$  を  $\beta$  の関数で表わす。
- ② この式を対数尤度関数に代入すれば、未知母数は  $\beta$  ただ 1 つになる。この式を最大とする  $\beta$  を求める。以下に式を示す。

$$l = \sum_{i=1}^N \log_e f(x_i) \dots\dots\dots (13)$$

$$\lambda = \left( \sum_{i=1}^N \sqrt{\beta x_i} - 2N \right) / \sum_{i=1}^N (\beta x_i) \exp(-\sqrt{\beta x_i}) \dots\dots\dots (14)$$

$f(x)$  は式 (10) で表わされる。 $x_i$  は観測値、 $N$  は資料数。式 (14) の総和の範囲は式 (13) に同じ。

計算の手順は以下のごとくである。

仮定した  $\beta$  の値と観測値を用いて式 (14) の  $\lambda$  を計算する。得られた  $\lambda$ 、 $\beta$  と観測値を用いて式 (13) を計算する。これを繰り返して対数尤度  $l$  が最大となる  $\beta$ 、 $\lambda$  の値を求める。

### 補遺 4

構造物の耐用年度内の安全度の問題<sup>5b</sup>と同じである。

$F(x)$  を年最大値分布の確率分布関数とする。 $N$  年間の最大値が  $x$  を超えない確率は  $[F(x)]^N$ 。 $T$  を再現期間とするとき、

$$F(x) = 1 - 1/T \dots\dots\dots (15)$$

よって、 $T$  年確率値以上の値が  $N$  年間に一度も生起しない確率  $P$ 、および少なくとも一度は生起する確率  $W$  は、

$$P = (1 - 1/T)^N, W = 1 - P \dots\dots\dots (16)$$

既往最大値が  $T$  年確率値以下となる確率が  $P$ 、 $T$  年確率値を超える確率が  $W$  であることは明らかである。

56 地点の観測年数の平均値は 84.4 年である。 $N$  に 84.4 を、 $T$  に 1000、7800 を入れると、 $W$  はそれぞれ、8.1、1.1% となる。これに総地点数 56 をかけると、期待地点数 4.5 および 0.6 が得られる。

また、 $T = N$  として、 $N$  が十分大きいと仮定すると、 $P = e^{-1} = 0.368 \dots\dots\dots (17)$

$T = 84.4$  年の場合も十分  $e^{-1}$  に近い値となる。

大阪の 1957 年の雨の生起頻度については、 $N = 84$ 、 $T = 214$ 、380 を代入すると、 $W$  は約 33~20% となる。

### 補遺 5

時間単位がもっと大きい場合 (数~数十日以上の場合)

、単一の時間単位の中で複数個の一雨が生ずる。この場合、各時間単位内の雨量は指数分布とも、平方根指数分布とも異なる分布に従う。またマートク・ポイント・プロセス・モデルも適用できない。よってその年最大値分布はガンベル分布、平方根指数型最大値分布とは別の分布に従うと考えられる。ただし、わが国の治水計画への適用を考える限り、このようなケースを問題にする必要はない。ただし琵琶湖のように、洪水が 1 週間以上におよぶような場合は除く。

### 補遺 6

ハーゼン・プロットを用いると実測値はもう少し上方にプロットされる。2 時間雨量、48 時間雨量はむしろガンベル分布に近づく。この場合でも、3 時間より長い時間単位に対しては、全般的に平方根指数型最大値分布の適合性が高い。ほかに多くのプロットング・ポジション公式が提示されているが、それらはいずれもワイブル・プロットとハーゼン・プロットの中間的な公式である<sup>10)</sup>。よってどのプロットング・ポジション公式を用いても、大阪の雨については、数~数十時間年最大雨量資料に対して全般的に、ガンベル分布よりも平方根指数型最大値分布の方がよく適合する。

### 補遺 7

統計的な問題を取り扱う以上、当然断定することはできない。本論文で得られた結果に対して反例が出ないかどうか、さらに検討を続ける必要がある。少なくとも次のような 3 側面について検討する必要がある。

- ① 資料 ② 分布関数 ③ パラメーター推定法

すなわち各種の資料、分布関数、パラメーター推定法の組合せに対して、得られる推定値の性質を比較検討する。これには大変な労力を必要とするので、今後時間をかけて検討を続けていかなければならない。

ただし、わが国の年最大日雨量系列について得られた結果に関する限り、改善の余地はないように見える。

### 参考文献

- 1) 土木学会：水理公式集(昭和 38 年増補改訂版)、第 8 版、a) pp.57~69、b) p.57、c) pp.60~61、1967.
- 2) たとえば、Barnet and Lewis: Outliers in statistical data, Wiley, 1978.
- 3) 江藤剛治：大雨の確率分布について、土木学会第 40 回年講概要集、第 II 部門、1985.
- 4) 江藤剛治・室田 明：一雨降雨の 1 確率模型、土木学会論文集、第 345 号/II-1、a) p.103、b) pp.104~105、1984.
- 5) たとえば、西畑勇夫：河川工学、第 1 版 4 刷、技報堂、a) p.56、b) p.60、1978.
- 6) 大阪管区気象台：大阪の気象百年、p.132、1982.

- 7) たとえば，昭和 57 年度建設省重点施策—第 6 次治水事業 5 箇年計画の策定—，河川，422 号，pp. 5~16，1981.
- 8) 室田 明・江藤剛治・中西祐啓：標準等危険度線による都市河川の治水安全度評価，土木学会論文集，第 369 号 / II-5，1986.
- 9) 森口繁一ほか：数学公式Ⅲ，第 14 刷，岩波全書 a) p. 187, b) p. 173, 1975.
- 10) 土木学会：水理公式集（昭和 60 年版），第 1 版，p. 132, 1985.

(1985. 7. 27・受付)

---