

水文量の発生確率に関する一考察

A STUDY ON THE RECURRENCE INTERVAL OF SEVERE HYDROLOGIC EVENTS

高瀬 信忠*・小川 正宏**

By Nobutada TAKASE and Masahiro OGAWA

It may be quite reasonable to consider that the generation in severe hydrologic events of basic elements in water-works design is an uncertain quantity swayed by many physical and probable elements in nature. Therefore, under present conditions, water-works design must be framed on various assumptions. In this paper, the authors assume that the probability of generation in severe hydrologic events has Poisson distribution, and study on making use of Bayes' theorem in regard to the recurrence intervals of large severe hydrologic events like the heavy rain etc., further, try evaluations of the security or the risk on water-works design.

1. はじめに

安全性への要求は、現代社会に生きる人間にとっては、最も重要な課題であるが、一般に水工計画の基礎となる水文量は、自然界における多くの物理的因子とこれに付随する確率的因子との結合によって発生し、不確定性の強いものと思われる。しかし、実際には、これら多くの因子を完全に解明することは不可能であり、したがって、いろいろな仮定のもとに水工計画がなされているのが現状である。

建設省河川砂防技術基準(案)によれば、洪水防御計画の規模は、基礎となる降雨量の年超過確率で評価するものとされ、確率雨量を求めて確率洪水流量に変換するという手法が一般的に行われている。しかし、このようにして推定された確率雨量や確率洪水流量についてはいくつかの問題点も指摘されている¹⁾。その1つとして、たとえば100年確率雨量が2年続けて発生する可能性なども皆無ではないという点が挙げられよう。これは水文事象を全く偶然事象であるとすれば、別に不思議なこと

ではなく、これらの発生特性についての興味ある研究考察もなされてきた²⁾⁻⁴⁾。

本研究は、水文量の発生過程をポアソン過程と仮定し、豪雨のような大きな水文事象が発生するまでの時間を Bayes の定理を利用して確率的に検討し、その危険性または安全性の評価を試みたものである。

2. 水文量の発生に対する確率的表現法

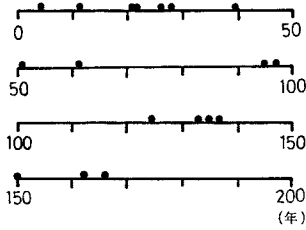
災害をもたらすかもしれない豪雨や洪水で、かなり接近した期間に引き続いて起こるケースがしばしば認められる。たとえば、10年に1回の割合で起こる豪雨について、1つの豪雨が起き、次の豪雨が起きるまでの期間を電子計算機上で指数乱数として発生させてシミュレーションしてみると⁵⁾、図-1のようになる。図からわかるように、長い期間起こらない場合もあれば、比較的短期間に起こる場合もある。このような発生過程モデルとして、よくポアソン過程が用いられる。この適用上問題となるのは平均発生率 ν の推定である。これについて、Benjamin は地震の発生過程に関連して Bayes の定理を用いた次の諸式を示している^{6),7)}。

(1) 平均発生率 ν の推定方法

Bayes の定理は、ある事象 A が生じたという条件のもとで、事象 E_i が発生する確率 $[P(E_i|A)]$ を求める

* 正会員 工博 金沢大学教授 工学部土木工学科
(〒920 金沢市小立野2-40-20)

** 正会員 工修 労働基準監督官 岡谷労働基準監督署
(〒394 岡谷市神明町3-14-8)



図一 シミュレーションによる豪雨の発生例

のに用いられ、普通次式のように表わされる。ただし、 $i=1, 2, \dots, n$

$$P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(A)} = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|E_j)P(E_j)} \dots\dots\dots(1)$$

ここに、 n は起こり得る事象の総数、したがって、上式分母は A の発生についての全確率を表わす。また、 A, E_i が連続的な確率分布によって表わされる場合、それらの事象を表示する確率変数をそれぞれ ϵ, θ とすると、Bayes の定理は次のようになる。

$$h(\theta|\epsilon) = \frac{f(\epsilon|\theta)g(\theta)}{\int_{\Theta} f(\epsilon|\theta)g(\theta)d\theta} \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $g(\theta)$ は θ の事前確率密度関数、 $f(\epsilon|\theta)$ は θ のもとで ϵ となる事象が生ずる場合の条件付確率密度関数、 $h(\theta|\epsilon)$ は ϵ という事象が発生したという条件のもとでの θ の事後確率密度関数、 Θ は θ の確率空間を表わす。この定理では、まず、なんらかの方法により未知パラメーター θ の事前確率密度関数を推定し、ついで、パラメーター θ のもとで事象 ϵ が起こるときの条件付確率密度関数 $f(\epsilon|\theta)$ が得られたときに、この $f(\epsilon|\theta)$ を用いて事後確率密度関数 $h(\theta|\epsilon)$ を求め得ることを示したものであるが、Benjamin は、事象の発生がポアソン過程として近似できる場合に、Bayes の定理を利用してその平均発生率 v が次のように簡単に求まることを示した。すなわち、事象の発生をポアソン分布で近似するとき、事象が過去 t_0 年間に n_0 回発生する確率は、次式で与えられる。

$$P(n_0|v, t_0) = \frac{(vt_0)^{n_0} e^{-vt_0}}{n_0!} \dots\dots\dots(3)$$

式(3)は未知母数 v のもとで結果 n_0 が得られる条件付確率を表現している。したがって、 v の事前確率密度関数を $g(v)$ と表わし、 $v=0 \sim \infty$ の一様分布と仮定するとき、観測の結果により v の事後確率 $h(v|n_0, t_0)$ は Bayes の定理によって、

$$h(v|n_0, t_0) = \frac{P(n_0|v, t_0)g(v)}{\int_0^\infty P(n_0|v, t_0)g(v)dv} = \frac{v^{n_0} t_0^{n_0+1} e^{-vt_0}}{n_0!} \dots\dots\dots(4)$$

と表現できる⁸⁾。また、 v の期待値 $E[v]$ は次式のように表わされる。

$$E[v] = \int_0^\infty v h(v|n_0, t_0) dv = \frac{n_0+1}{t_0} \dots\dots\dots(5)$$

上式(4)で、 $n_0=0$ の場合、すなわち、過去の観測期間内に事象が発生しなかった場合でも、 v の分布が得られるのが特徴である。これは事象の発生をポアソン近似として Bayes の定理を利用した結果得られるものといえるが、ポアソン近似は、「事象の出現確率がきわめて小さいとき、多数の試行のうちでその事象が起こる回数はポアソン分布に従う」という事実近似させているものである。

(2) 水文学の発生時間間隔

ある事象の発生がポアソン過程として表現できるとき、その発生時間間隔 (T_1) は指数分布の式(13)に従うことが知られており⁹⁾、 T_1 の条件付確率密度関数 $f_{T_1}(t|n_0, t_0)$ は次式のように表わされる⁸⁾。

$$f_{T_1}(t|n_0, t_0) = \int_0^\infty h(v|n_0, t_0) f_{T_1}(t) dv = \frac{(n_0+1)t_0^{n_0+1}}{(t+t_0)^{n_0+2}} \dots\dots\dots(6)$$

ところで、たとえば、河川における治水構造物が機能している期間、すなわち、耐用期間内における大きな水文学の発生回数は1回だけとは限らず、複数回の水文学の発生も可能になる。他方、水文学の発生がポアソン過程に従うとき、水文学が n_0 回発生するまでの時間間隔 (T_n) はガンマ分布に従うこともまた古くからよく知られていることであって⁷⁾、前と同様に、 T_n の条件付確率密度関数 $f_{T_n}(t|n_0, t_0)$ は次式のように表わされる⁸⁾。

$$f_{T_n}(t|n_0, t_0) = \int_0^\infty h(v|n_0, t_0) f_{T_n}(t) dv = \frac{(n+n_0)! t_0^{n_0+1} t^{n-1}}{n_0!(n-1)!(t+t_0)^{n+n_0+1}} \dots\dots\dots(7)$$

式(6)は式(7)において、 $n=1$ とした特別な場合といえる。

以上、ポアソン過程を前提として、水文学の発生についての確率的表現を示したが、次に実際の観測データより得られる推定分布式と観測データ分布の適合性について検討してみる。観測データとしては、表-1に示す金沢市および岐阜市の2地点における100 mm/day以上の日雨量を用いたが、図-2は、それぞれの発生時間間隔の確率密度関数を式(6)より求め、実際のデータによる発生状況と比較したものである。

また、図-3は、同じデータを用いた式(7)において $n=2$ としたものであるが、計算値と実測データの発生状況とに χ^2 検定を行ったところ、全部が5%の有意水準内で適合した。また、以上のようにして推定された

表-1 解析対象地点

NO.	地点	統計年数	資料数	期間(年)
1	金沢市	95	45	1886 ~ 1980
2	岐阜市	52	55	1929 ~ 1980

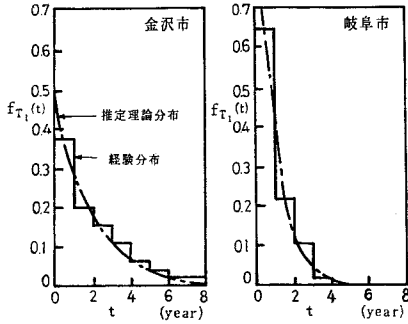


図-2 推定分布と経験分布の適合性 (n=1)

確率密度関数に関して、信頼性の程度の検討材料に、観測期間を2分割し、前半のデータより確率密度関数を求め、その推定理論式と後半の観測データの発生時間間隔の分布状況を比較したのが図-4である。なお、同じく χ^2 検討を行ったところ、5%の有意水準内で適合していた。観測期間を2等分してデータ数が少なくなっているにもかかわらず推定の精度はよく、検討例が少ないなどの問題点は残されているものの、以上の推定法は十分利用できるものと思われる。

(3) 安全性の評価

ある規模以上の個々の豪雨が発生する時間間隔の確率密度関数が、式(6)で与えられるので、過去 t_0 年間に n_0 回発生したそのような豪雨が、その後の t 年間に発生する確率 $F_1(t|n_0, t_0)$ および発生時間が少なくとも t 年以上である確率 $R_1(t|n_0, t_0)$ を求めると、それぞれ式(8)、(9)のようになる。

$$F_1(t|n_0, t_0) = \int_0^t f_{T_1}(t|n_0, t_0) dt = 1 - \left(\frac{t_0}{t+t_0}\right)^{n_0+1} \dots\dots\dots (8)$$

$$R_1(t|n_0, t_0) = 1 - F_1(t|n_0, t_0) = \left(\frac{t_0}{t+t_0}\right)^{n_0+1} \dots\dots\dots (9)$$

過去 t_0 年間に n_0 回のある規模以上の豪雨が発生したとき、今後 t 年間にそのような事象が n 回発生する確率は、式(3)、(4)を用いて次式のように表わされる。

$$F_{T_n}(t|n_0, t_0) = \int_0^t f_{T_n}(t|n_0, t_0) dt$$

しかし、これは不完全ガンマ積分となるので、次のような評価法を考えた。

$$P_i(n|n_0, t_0) = \int_0^\infty P(n|v, t)h(v|n_0, t_0)dv$$

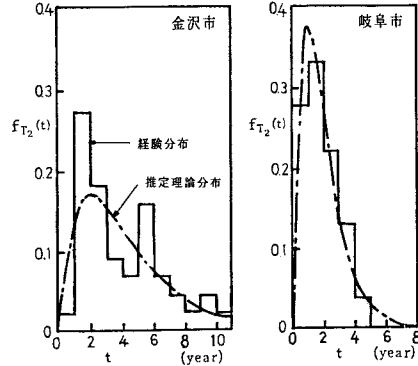


図-3 推定分布と経験分布の適合性 (n=2)

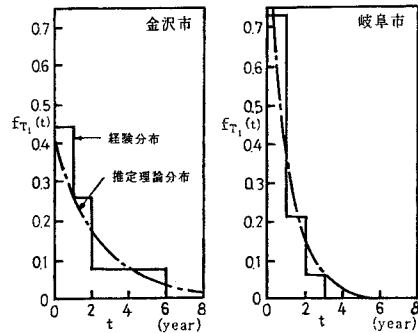


図-4 推定分布と経験分布の適合性 (n=1)

$$= \int_0^\infty \frac{(vt)^n}{n!} e^{-vt} \frac{v^{n_0} t_0^{n_0+1}}{n_0!} e^{-v t_0} dv = \frac{(n+n_0)! t^n t_0^{n_0+1}}{n! n_0! (t+t_0)^{n+n_0+1}} \dots\dots\dots (10)$$

したがって、このような豪雨が、今後 t 年間に少なくとも k 回発生する確率 $F_i(k|n_0, t_0)$ 、および $(k-1)$ 回以下である確率 $R_i(k|n_0, t_0)$ は、式(11)、(12)のように表わされる。

$$F_i(k|n_0, t_0) = \sum_{n=k}^\infty P_i(n|n_0, t_0) = \sum_{n=k}^\infty \frac{(n+n_0)! t^n t_0^{n_0+1}}{n! n_0! (t+t_0)^{n+n_0+1}} = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(n+n_0)! t^n t_0^{n_0+1}}{n! n_0! (t+t_0)^{n+n_0+1}} \dots\dots\dots (11)$$

$$R_i(k|n_0, t_0) = 1 - F_i(k|n_0, t_0) \dots\dots\dots (12)$$

上式より、 t_0, n_0 が与えられると、ある時間内での豪雨の発生および非発生確率が求められる。図-5~図-12には、それぞれの条件下での生起する確率値が示されているが、これらの図を準備しておけば安全性の評価が可能となるであろう。

次に、Bayes理論を用いた式(8)と従来の一般的な指数分布とによって求めた発生確率の差を調べてみる。いま、事象の時間間隔 T_1 を確率変数として扱おうと、 T_1

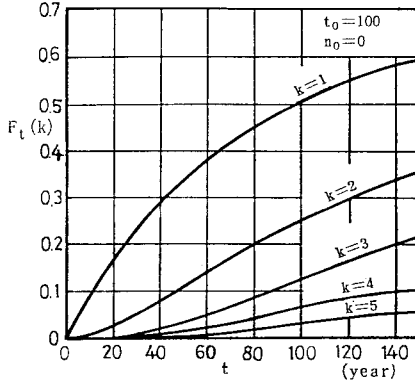


図-5 100 年間で生じた事象が、今後 t 年間に k 回以上生じる確率

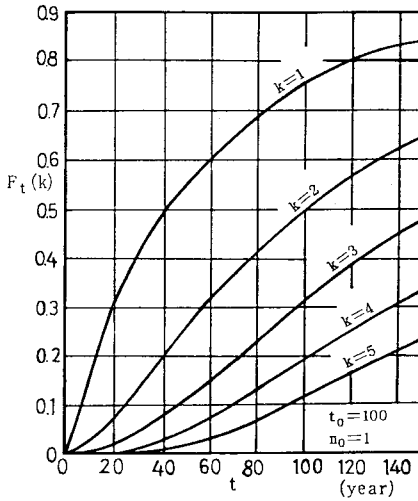


図-6 100 年間に 1 回生じた事象が、今後 t 年間に k 回以上生じる確率

はパラメーター v の指数分布に従うから、 T_1 の確率密度関数 $f_{T_1}(t)$ は次式で表わされる⁷⁾。

$$f_{T_1}(t) = ve^{-vt} \dots \dots \dots (13)$$

したがって、後者の方法による t 以内に次の超過事象が発生する確率は、

$$F'(t) = \int_0^t f_{T_1}(t) dt = \int_0^t ve^{-vt} dt = 1 - e^{-vt} \dots \dots (14)$$

ただし、 $v = n_0/t_0$ である。図-13 は、過去 100 年間に 1 回生じた事象が今後 t 年間に発生する確率を示したものであるが、この図の範囲内では、前者は後者より大きな確率値を示している。しかし、式 (8) と (14) を比較するとわかることであるが、もっと先 ($t=251$) で逆転することとなる。

3. 既往最大値以上の発生確率

計画降雨や計画高水のような豪雨量やピーク流量など

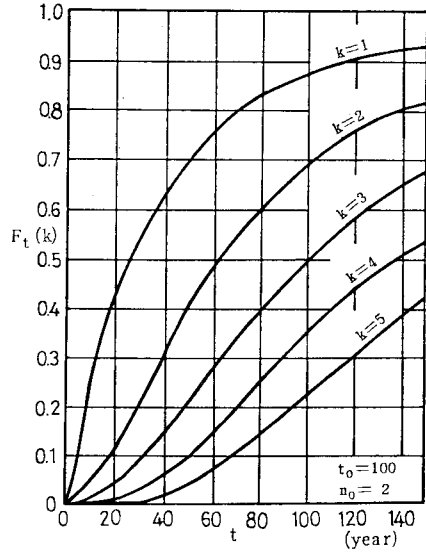


図-7 100 年間に 2 回生じた事象が、今後 t 年間に k 回以上生じる確率

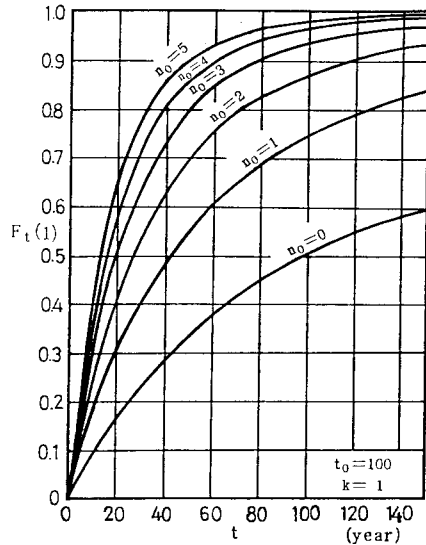


図-8 100 年間に n_0 回生じた事象が、今後 t 年以内に生じる確率

を論じる場合に、しばしば過去 t_0 年間の観測最大値を 1 つの目安とすることがあるが、この既往最大値以上の値が統計的にどのような意味をもつかについて考えてみる。

過去 t_0 年間の最大値を Q_0 とすると、式 (8) において $X > Q_0$ なる水流量 X が過去 t_0 年間に発生した回数は $n_0=0$ である。そういう水流量 X が将来 t 年間に発生する確率、すなわち、過去 t_0 年間の最大値を将来 t 年間に超過する確率 $F(t)$ は次式で与えられる。

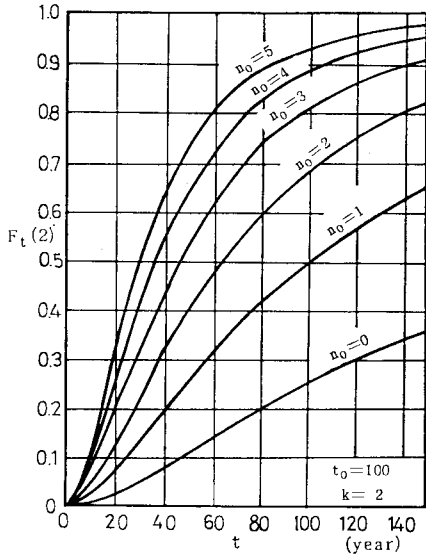


図-9 100年間に n_0 回生じた事象が、今後 t 年間に2回以上生起する確率

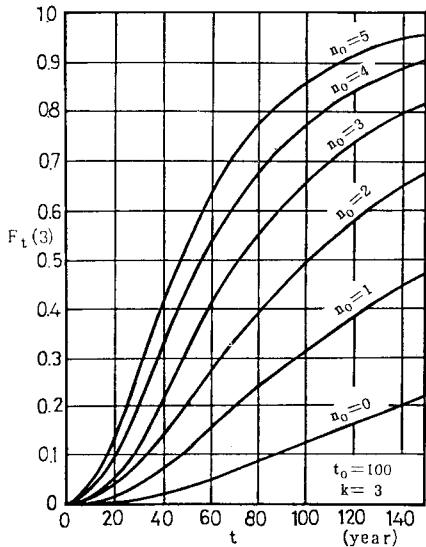


図-10 100年間に n_0 回生じた事象が、今後 t 年間に3回以上生起する確率

$$F(t) = 1 - \frac{t_0}{t + t_0} \dots \dots \dots (15)$$

逆に、超過しない確率 $R(t)$ は次式となる。

$$R(t) = 1 - F(t) = \frac{t_0}{t + t_0} \dots \dots \dots (16)$$

ある期間 (t_0) の最大値を計画高水流量とした場合、 t 年間は安全である非超過確率 $R(t)$ を示したものが図-14である。この図より、たとえば、50年間の最大値を計画高水流量とした場合、これを超過する洪水が

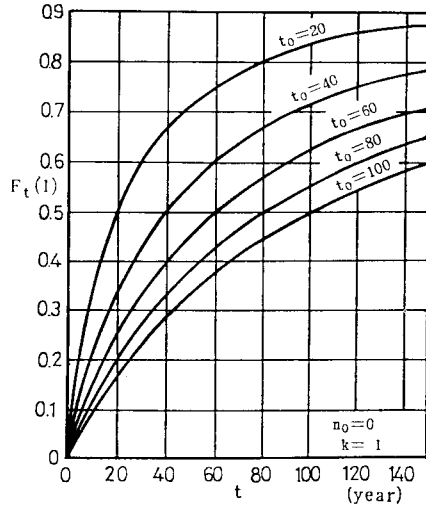


図-11 t_0 年間に未生起の事象が、今後 t 年以内に生起する確率

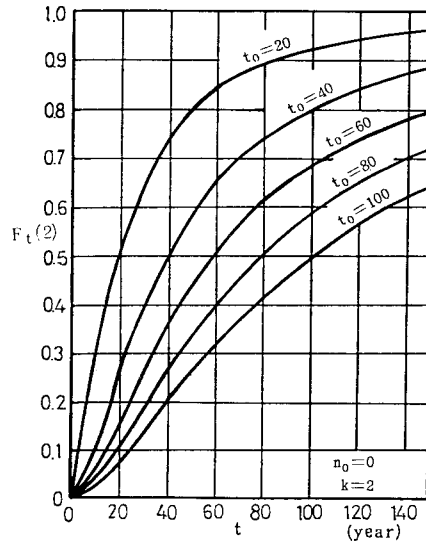


図-12 t_0 年間に未生起の事象が、今後 t 年間に2回以上生起する確率

50年間に1度も発生しない確率は、観測期間 $t_0=50$ の曲線と横軸 $t=50$ の交点の縦軸で約0.5と読み取れる。また、50年間の最大値を計画高水流量とした場合、10年間は1度もこの流量値を超過しない確率は、 $t_0=50$ の曲線と横軸 $t=10$ の交点を縦軸で読むと約0.82となる。これらの成果は著者らが以前に考察した研究成果^{2),9)} とほぼ一致するものである。

図-15は、 t_0 年間最大値水流量あるいは T 年確率水流量を構造物の使用期間 (m) の α 倍にとったとき、すなわち、 αm 年間最大値水流量あるいは αm 年確率水流量以上の値が使用期間内で生起しない確率、いわゆる

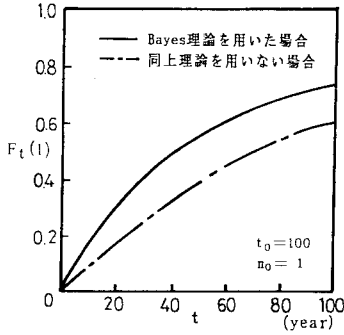


図-13 Bayes理論を用いた場合と用いない場合の発生確率

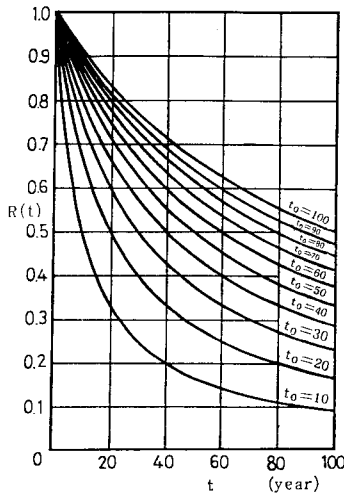


図-14 ある期間 (t₀) の最大値に対する安全性

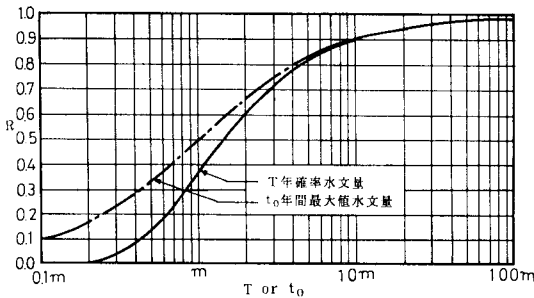


図-15 構造物の使用期間 (m) 内における安全性

非超過確率を表わしているが、前者は、 $R = \frac{\alpha m}{m + \alpha}$ 、
 $\frac{\alpha}{1 + \alpha} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$ 、後者は、 $R = \left(1 - \frac{1}{\alpha m}\right)^m \Rightarrow e^{-1/\alpha} \Rightarrow$
 $1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}$ となる。この図から、使用期間の約10倍以上
 ($\alpha > 10$)に水文学量をとったとき使用期間内にそれ以上
 の水文学量が発生しない確率は、両方ともほぼ等しく
 なっていることは式の上からもわかることである。

4. 結 論

本研究は、河道改修工事の規模決定などの基礎となる
 計画高水、計画降雨の策定に関連して、水文学量の発生確
 率について考察したもので、結果を要約すると次のとおり
 である。

(1) 豪雨や洪水など大きな水文学量発生による水害は
 1度起きた後、再び起こるまでの期間が比較的短い場合
 もあるので警戒を要する。

(2) 観測期間内で発生しないような事象の平均発生
 率の推定は難しいが、Bayesの定理を用いて考察した。

(3) 水文学量の発生がポアソン過程に従うと仮定し
 て、ある特定値以上の水文学量発生の時間間隔を調べたが、
 この仮定は定性的にみてほぼ許容し得ることがわかつた。

(4) Bayes理論を用いた発生確率と従来の一般的
 な指数分布とによって求めたものとを比較考察した。

(5) t₀年間最大値水文学量に対する安全性などにつ
 いても、興味ある考察ができた。

以上の研究成果は、著者らが以前に研究した成
 果^{2),9),10)}をさらに前進させ、水工計画の策定の基礎とし
 て十分役立つものと考えられる。

最後に本研究に際し、有益なご教示と懇切なご指導を
 賜った角屋 睦教授(京都大学防災研究所)および長
 尾正志教授(名古屋工業大学)に深甚なる謝意を表する
 次第である。

参 考 文 献

- 1) 木下武雄：降雨災害対策における超過確率年の例と問題、
 国立防災科学技術センター研究報告、No.23, pp.1~10,
 1980.
- 2) 高瀬信忠・鈴木秀利：水文学量の確率論的特性に関する
 研究、土木学会論文報告集、No.204, pp.23~29,
 1972.
- 3) 菅原正己：水文雑語Ⅱ(100年洪水)、水利科学、No.128,
 pp.90~102, 1979.
- 4) 長尾正志：水文統計解析、河川工学百年の歩みと淀川、
 pp.63~120, 建設省近畿地方建設局, 1978.
- 5) 大地羊三：コンピュータによる土木工学演習、森北出版、
 1973.
- 6) Benjamin, J.R.: Probabilistic Models for Seismic
 Force Design, Proc. ASCE, Vol.94, No. ST 5, pp.1175
 ~1196, 1968.
- 7) Ang, A.H.S. and Tang, W. H. (伊藤 学・亀田弘行
 訳)：土木・建築のための確率・統計の基礎、丸善、
 1977.
- 8) 松尾 稔・上野 誠：構造物の耐用期間内に生じる外
 力の不確実性を考慮した信頼性設計法、土木学会論文報
 告集、No.289, pp.89~98, 1979.
- 9) 高瀬信忠・鈴木秀利：水工計画の安全性に関する研究、

金沢大学工学部紀要, Vol. 7, No. 2, pp. 75~82, 1973.

HY 4, pp. 425~436, 1977.

- 10) Chow, V.T. and Takase, N. ; Design Criteria for Hydrologic Extremes, Proc. ASCE, Vol. 103, No.

(1985. 6. 27・受付)
