

計画降雨波形の確率論的定式化と条件付確率降雨強度式の提案

STOCHASTIC FORMULATION OF DESIGN STORM PATTERN AND PROPOSAL OF CONDITIONAL PROBABILITY-RAINFALL INTENSITY FORMULA

端野 道夫*

By Michio HASHINO

A stochastic single storm pattern with a peak of rainfall is theoretically derived from the bivariate exponential probability density function defined by Freund. Two typical design storm patterns : backward peaked type and central peaked type are prescribed by three parameters : the reduced variate y_p of the peak rainfall intensity, the autocorrelation index k , and the conditional probability F . A new conditional probability intensity-duration formula is proposed by integrating the given design storm hyetograph. Furthermore, a practical estimation method of the three parameters prescribing the design storm and the intensity-duration curve is clearly shown and demonstrated using actual rainfall data.

1. ま え が き

中小河川の治水計画や市街地排水計画では、降雨継続時間と平均降雨強度の関係式、すなわち降雨強度式は基本となる強雨時のピーク流量を(合理式等を介して)計算するうえで重要である。さらに、ピーク流量のみならずハイドログラフを対象とする場合には計画降雨波形を設定する必要がある。

降雨強度式については、これまで、数多くの形式^{1)~4)}のものが提案されているものの、いずれも特定地域で経験的に用いられたもので、前提となる経験式の成立そのものに対する確率統計学的考察は長尾の研究⁵⁾以外にほとんど見当たらない。計画降雨波形が実際に必要となる場合、市街地排水計画では降雨強度式より1つのピークの前後に降雨強度を形式的に配分する方法^{6),7)}が用いられているようであり、河川計画では、実績降雨の引き伸ばし⁸⁾が行われることがある。しかし、前者は実際の一連降雨を表現したものでなく、計画確率年に対する降雨強度式より得た計画降雨波形は(実際の豪雨波形の確率年よりも大きく)結果的に計画確率年よりも大きな確率年をもたらすことがある^{9)~12)}。また、後者は実績降雨波

形を重視しているものの、引き伸ばし限界に新たな問題が生じる。

本論文では、このような計画降雨波形と降雨強度式の問題点を踏まえ、ピーク降雨強度が与えられたときの条件付確率降雨波形を Freund の二変数指数型分布より時系列論的に定式化し、その積分より条件付確率降雨強度式を得る。降雨波形として、後方集中型と中央集中型の両方を定義する。条件付確率降雨波形と条件付確率降雨強度式を規定するパラメーターは主として、降雨の自己相関指標、ピーク降雨強度と条件付確率の3つであり、1時間単位の雨量資料のみからでも5分ないし6時間程度の降雨継続時間の降雨強度を合理的に推定する実用的方法を提示する。

2. Freund の二変数指数型分布と降雨波形

いま、Fig.1のような一山型降雨を考える。時間軸 t_b, t_a をピークを基準にその前後にとる。単位時間 Δt 前、後の降雨強度を x_{i-1}, x_i とすれば、両者の周辺確率分布は同一であるとして、二変数 x_{i-1}, x_i に Freund の提案した指数型分布^{13),14)}を適用すれば、その確率密度関数 $f(x_{i-1}, x_i)$ は次式のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\beta \exp\{-\beta x_{i-1} - (2\alpha - \beta)x_i\} \\ (0 < x_i < x_{i-1}) \end{array} \right.$$

* 正会員 工博 徳島大学教授 工学部建設工学科
(〒770 徳島市南常三島町 2-1)

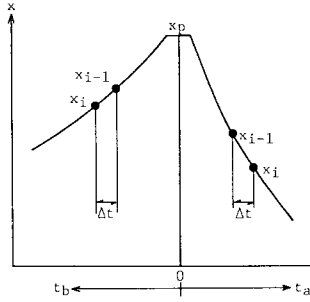


Fig.1 A single storm pattern with a peak.

$$f(x_{i-1}, x_i) = \begin{cases} \alpha\beta \exp[-\beta x_i - (2\alpha - \beta)x_{i-1}] & \dots\dots\dots(1) \\ (0 < x_{i-1} < x_i) \end{cases}$$

ここに、 $\alpha, \beta (>0)$ はパラメーターである。

Fig.1 より明らかなように、降雨強度 $x_i (i=1, 2, \dots)$ はピークより遠ざかるにつれ単調減少するから、

$$x_i < x_{i-1} \quad (i=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots(2)$$

がピーク前、後で成り立つ。 Δt 時間前に降雨強度が x_{i-1} であり、 Δt 時間後に降雨強度が $x_i (< x_{i-1})$ となる条件付確率分布関数 $F(x_i | x_{i-1})$ は式 (1) より簡単に得られ、式 (2) の条件下では、次式のようになる。

$$F(x_i | x_{i-1}) = \begin{cases} \frac{1 - \exp[-(2\alpha - \beta)x_i]}{1 - 2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \exp[-(2\alpha - \beta)x_{i-1}]} & (2\alpha \neq \beta) \\ \beta x_i / (1 + \beta x_{i-1}) & (2\alpha = \beta) \end{cases} \dots\dots\dots(3)$$

ところで、 x の平均 m_x 、分散 σ_x^2 、自己相関係数 ρ とパラメーター： α, β との間には次式のような関係があることが容易に導かれる。

$$m_x = (\alpha + \beta) / (2\alpha\beta) \dots\dots\dots(4)$$

$$\sigma_x^2 = (3\alpha^2 + \beta^2) / (4\alpha^2\beta^2) \dots\dots\dots(5)$$

$$\rho = (1 - k^2) / (1 + 3k^2) \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 $k = \alpha/\beta$ である。式 (6) によれば、 $k=1$ のとき $\rho=0$ 、 $k=0$ のとき $\rho=1$ 、 $k \rightarrow \infty$ のとき $\rho \rightarrow -1/3$ であることがわかる。

次に、原データの降雨強度 x_i (mm/h) を規準化変数 y_i ：

$$y_i = (x_i - u) / \sigma_u \quad (x_i > u) \dots\dots\dots(7)$$

に変換する。ここに、 u は Freund 分布のあてはめをよくするための付加定数、 σ_u は $(x_i - u)$ の標準偏差である。したがって、規準化変数 $y_i, y_{i-1} (>0)$ についても式 (1) と同様の Freund 分布が定義でき、 y_i の分散 σ_y^2 は 1 に等しいことから、式 (5) より

$$\alpha = \sqrt{3k^2 + 1} / 2, \quad \beta = \sqrt{3k^2 + 1} / (2k) \dots\dots\dots(8)$$

となる。式 (7)、(8) を用い、式 (3) を y_i について書き直せば、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \exp(-\lambda y_i) &= 2F \cdot (1-k) \exp(-\lambda y_{i-1}) + (1-F) \\ \left. \begin{aligned} (\lambda &= (2k-1)\sqrt{3k^2+1}/2k) \\ (k &\neq 1/2, \quad 0 < k < 1) \end{aligned} \right\} \\ y_i &= F \cdot y_{i-1} + \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot F \quad (k=1/2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

ここに、 F は条件付確率 $F(y_i | y_{i-1})$ の略記号である。 k については、式 (6) より明らかなように、 $0 \leq \rho < 1$ に対して、 $1 \geq k > 0$ であり、実用的にはこの範囲の k を対象とすることにし、この k を自己相関指標とよぶことにする。

条件付確率 F は現象的には時間変化するはずであるが、計画降雨波形を設定する目的のためには、ピーク前、後でそれぞれ $F = F_b = \text{一定}$ 、 $F = F_a = \text{一定}$ とおくことが許されよう。

結局、自己相関指標 k 、条件付確率 F およびピーク降雨強度の規準化変数 y_p が与えられれば、式 (9) より $y_i (i=1, 2, 3, \dots)$ は順次求められ、単位時間 Δt の離散的降雨波形が得られることになる。

3. 条件付確率降雨波形

離散的降雨波形： $y_i (i=1, 2, 3, \dots)$ は後述の降雨強度式の定式化に不便であり、式 (9) と等価な、連続時間 t に関する式に変換する。この連続化は利用資料の単位時間 Δt より短い時間の降雨強度の推定をも可能にする。

さて、変数 Y に関する (定数係数 A, B をもつ) 線形微分方程式：

$$dY/dt = A + BY \quad (B \neq 0) \dots\dots\dots(10)$$

の一般解は積分定数を C とおくと

$$Y + (A/B) = C \exp(B \cdot t) \dots\dots\dots(11)$$

となる。 $t = (i-1)\Delta t, (i=1, 2, \dots)$ で $Y = Y_{i-1}$ 、 $t = i\Delta t$ で $Y = Y_i$ とおき、それぞれを式 (11) に代入し、積分定数 C を消去すれば次式が得られる。

$$Y_i = \exp(B\Delta t) \cdot Y_{i-1} - (A/B) \cdot [1 - \exp(B\Delta t)] \dots\dots\dots(12)$$

$0 < k < 1$ の場合について式 (9) と式 (12) が等価であるためには、次式が成り立てばよいことが係数比較によりわかる。

$$\left. \begin{aligned} \text{i) } k &\neq 1/2, \quad 0 < k < 1 \text{ のとき} \\ Y &= \exp(-\lambda y) \\ B &= (1/\Delta t) \cdot \ln [2F(1-k)] \neq 0 \\ A/B &= (1-F) / [2F(1-k) - 1] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ii) } k &= 1/2 \text{ のとき} \\ Y &= y \\ B &= (1/\Delta t) \cdot \ln F \\ A/B &= -2\sqrt{7} F / [7 \cdot (1-F)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

次に、式 (11) の積分定数 C を定めるために、 $t =$

$\Delta t/24^{(2)}$ において、

$$Y = Y_p = \begin{cases} \exp(-\lambda y_p) & (k \neq 1/2) \\ y_p & (k = 1/2) \end{cases} \dots\dots\dots(15)$$

とおくと、 $k \neq 1/2$ のとき、式 (11) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} Y + (A/B) &= \{ Y_p + (A/B) \} \exp \{ Bt - B(\Delta t/24) \} \\ Y &\equiv \exp(-\lambda y), \quad Y_p \equiv \exp(-\lambda y_p) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

しかし、時間 $t (> \Delta t/24)$ における y は一山型降雨波形の仮定により $t = \Delta t/24$ における $y = y_p$ よりも常に小さくなければならない。したがって、

$$y_p - y = -(1/\lambda) \cdot \ln(Y_p/Y) > 0 \dots\dots\dots(17)$$

ところで、 λ は式 (9) の定義より明らかなように、 k のみの関数であり、 $0 < k < 1/2$ のとき $\lambda < 0$ 、 $k = 1/2$ のとき $\lambda = 0$ 、 $1/2 < k < 1$ のとき $\lambda > 0$ であるから、式 (17) にこの関係を用いれば

$$\left. \begin{aligned} 0 < k < 1/2 \text{ のとき } \lambda < 0 \text{ ゆえ } 0 < Y < Y_p \\ 1/2 < k < 1 \text{ のとき } \lambda > 0 \text{ ゆえ } 0 < Y_p < Y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

となる。つまり、式 (18) を満足し、式 (16) が成り立つには次の条件が必要となる。

i) $0 < k < 1/2$ のとき
 $2F \cdot (1-k) < 1$ かつ $-(1/\lambda) \ln(-A/B) < y_p \dots\dots\dots(19 \cdot a)$

ii) $1/2 < k < 1$ のとき
 $-(1/\lambda) \ln(-A/B) < y_p \dots\dots\dots(19 \cdot b)$

ここに、 A/B は式 (13) で与えられる。

以上より、ピーク降雨強度 $y_p (t = \Delta t/24)$ をもつ連続降雨波形 (ピーク前、後いずれか片側) を与える式とその制約条件をまとめると次のようになる。

i) $k \neq 1/2$ ($0 < \rho < 1$, $\rho \neq 3/7$) のとき

$$\left. \begin{aligned} Y - \delta &= (Y_p - \delta) \exp \{ Bt - B(\Delta t/24) \} \\ Y &\equiv \exp(-\lambda y), \quad Y_p \equiv \exp(-\lambda y_p) \\ \delta &\equiv (1-F)/(1-2F \cdot (1-k)) \\ B &\equiv (1/\Delta t) \cdot \ln \{ 2F \cdot (1-k) \} \\ \lambda &\equiv (2k-1) \sqrt{3k^2+1} / (2k) \\ -(1/\lambda) \cdot \ln \delta < y \leq y_p, \quad \Delta t/24 \leq t \\ 0 < k < 1/2 \text{ のとき } 0 < F \leq 1/2^{(2)} \\ 1/2 < k < 1 \text{ のとき } 0 < F < 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20 \cdot a)$$

ii) $k = 1/2$ ($\rho = 3/7$) のとき

$$\left. \begin{aligned} y - \delta &= (y_p - \delta) \exp \{ Bt - B(\Delta t/24) \} \\ \delta &\equiv 2\sqrt{7} \cdot F / [7 \cdot (1-F)] \\ B &\equiv (1/\Delta t) \cdot \ln F, \quad \Delta t/24 \leq t \\ \delta < y \leq y_p, \quad 0 < F < 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20 \cdot b)$$

iii) $k = 1$ ($\rho = 0$) のとき

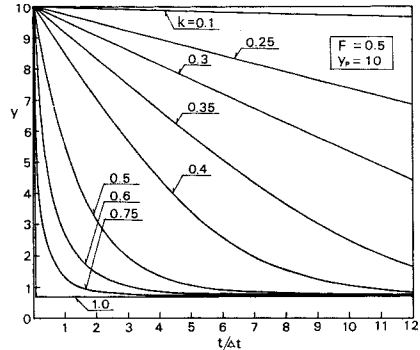


Fig. 2 Conditional probability storm patterns (one side of the peak).

$$y = \begin{cases} y_p & (t = \Delta t/24) \\ -\ln(1-F) & (t > \Delta t/24) \end{cases} \dots\dots\dots(20 \cdot c)$$

$-\ln(1-F) < y_p, \quad 0 < F < 1$

式 (20) により与えられる一連続降雨波形を条件付確率降雨波形とよび、この波形を規定するパラメーター： k 、 F および y_p を総称して降雨波形パラメーターとよぶことにする。

Fig. 2 は $y_p = 10$ 、 $F = 0.5$ の場合について、 k を変化させたときの (片側) 条件付確率降雨波形を示す。 k が 0 より大きくなるにつれて、 ρ は小さくなるので、ピーク値 y_p よりの y の減衰率が大きく、降雨波形は急峻な山型となる。 y_p と k を固定し、 F を変化させると、当然 F が小さいほど急峻な山型となることが容易に予想される。

4. 2種類の降雨波形と条件付確率降雨強度式

(1) 後方集中型、中央集中型降雨波形

通常、計画では「後方集中型」あるいは「中央集中型」降雨波形という用語があることを勘案して、両者のタイプの条件付確率降雨波形を具体的に Fig. 3 のように定義する。時間原点として、後方集中型のときピーク発生時間の後端を、中央集中型のときピーク発生時間の中央を採用し、ピーク y_p の継続時間をそれぞれ $\Delta t/24$ 、 $\Delta t/12$ とする。すなわち、後方集中型は 3. で述べた (片側) 条件付確率降雨波形そのものである。中央集中型は 2 つの (片側) 条件付確率降雨波形をピークで接合させたもので、2 つの片側波形を規定する k 、 y_p は同じとし、 F も特に断らない限りピーク前後とも同じ ($F_b = F_a$)、すなわち左右対称波形とする。なお、Fig. 3 中の y_b 、 y_a はそれぞれ、ピーク前後の時間 t_b 、 t_a における降雨強度 y で、 r^* は後述の式 (21) で計算される、単位時間 Δt の平均降雨強度の規準化変数を示す。

(2) 条件付確率降雨強度式

前述の後方集中型および中央集中型降雨波形に対する

注 1) 実用的には $\Delta t = 60$ min を基本単位とすることが多いと考え、 y_p の継続最小時間を $\Delta t/24 = 2.5$ min と設定した。

注 2) 厳密には $0 < k < 1/2$ のとき $0 < F < 1/[2 \cdot (1-k)]$ であるが、実用的には F の上限を $1/2$ に固定した方がよいと判断した。

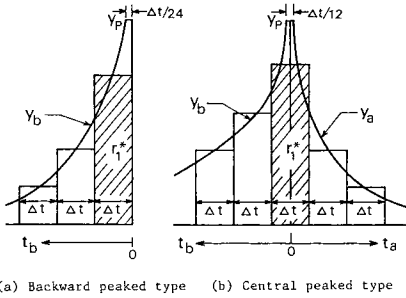


Fig. 3 Definitions of different type storm patterns.

継続時間 τ の平均降雨強度 (の規準化変数) r^* は次式で与えられる。

i) 後方集中型るとき

$$r^* = \left(y_p \cdot \frac{\Delta t}{24} + \int_{\Delta t/24}^{\tau} y_b dt \right) / \tau \dots\dots\dots (21 \cdot a)$$

ii) 中央集中型るとき

$$r^* = \left(y_p \cdot \frac{\Delta t}{12} + \int_{\Delta t/24}^{\tau_a} y_a dt + \int_{\Delta t/24}^{\tau_b} y_b dt \right) / \tau \dots\dots\dots (21 \cdot a)$$

ここに、 $\tau = \tau_a + \tau_b$ 、 y_b 、 y_a は Fig. 3 に示すように、それぞれピーク前後の時間 t_b 、 t_a における降雨強度 y で式 (20) より計算される。また、 τ_b 、 τ_a は $y_b = y_a$ なる時点でのピーク時よりの時間を示す。いずれの降雨波形に対しても、式 (21) の積分項を積分すれば、所要の r^* と τ の関係、すなわち条件付確率降雨強度式が得られることになる。しかし、 $k=1/2$ 、1 の場合を除く一般的な場合 ($0 < k < 1$ 、 $k \neq 1/2$) については残念ながら初等関数では表わせない¹⁵⁾。すなわち、

i) $0 < k < 1$ 、 $k \neq 1/2$ のとき

$$I = \int_{\Delta t/24}^{\tau} y dt = \frac{-1}{\lambda} \int_{\Delta t/24}^{\tau} \ln [\delta + \exp(-\lambda y_p) - \delta] \times \exp[Bt - B(\Delta t/24)] dt \dots\dots\dots (22 \cdot a)$$

ii) $k=1/2$ のとき

$$I = \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{F}{(1-F)} \cdot \left(t - \frac{\Delta t}{24} \right) + \frac{\Delta t}{\ln F} \cdot \left\{ y_p - \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{F}{(1-F)} \right\} \times \left[\exp \left\{ \left(\frac{t}{\Delta t} - \frac{1}{24} \right) \ln F \right\} - 1 \right] \dots\dots\dots (22 \cdot b)$$

iii) $k=1$ のとき

$$I = - \left(t - \frac{\Delta t}{24} \right) \ln(1-F) \dots\dots\dots (22 \cdot c)$$

ここに、 δ 、 B は式 (20 \cdot a) で与えられる。したがって、 $0 < k < 1$ 、 $k \neq 1$ の場合については Simpson 法等を用いた数値積分によらざるを得ない。

Fig. 4 に、 $y_p=10$ 、 $F_a=F_b=0.5$ で k を変化させたときの中央集中型条件付確率降雨波形に対する条件付確率降雨強度曲線を図示する。一般に、降雨強度曲線は両対数紙上で直線ないし上に凸の形をとることが報告されて

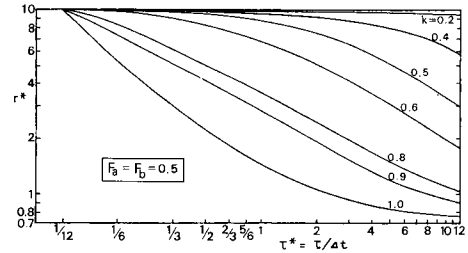


Fig. 4 Conditional probability intensity-curves for central peaked type storms.

おり¹⁶⁾、本理論曲線はこうした事例を十分説明することができる。

なお、参考までに、 $k=1$ 、 $1/2$ の場合で、 $F = F_a = F_b$ とした中央集中型降雨波形に対する条件付確率降雨強度式 ($r^* \sim \tau^* \equiv \tau/\Delta t$) を式 (22 \cdot b)、(22 \cdot c) を式 (21 \cdot b) に用いて求めると次のようである。

$$r^* = \begin{cases} c^* + \frac{(y_p - c^*)}{12 \tau^*} \cdot \left[1 + \frac{24}{\ln F} \cdot \{ e^{(\frac{12\tau^* - 1}{24}) \ln F} - 1 \} \right] \\ \left(k=1/2, c^* \equiv \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{F}{(1-F)} \right) \\ \dots\dots\dots (23 \cdot a) \\ c^* + \frac{(y_p - c^*)}{12 \tau^*} \quad (k=1, c^* \equiv \ln(1-F)) \\ \dots\dots\dots (23 \cdot b) \end{cases}$$

(3) 条件付確率降雨強度式の近似式

前述の条件付確率降雨強度式 ((21), (22)) はマイコン程度の電子計算機で計算できるが、もう少し簡単な形式の近似式を作っておくとさらに便利である。そこで、式 (23) を参考に、次式を条件付確率降雨強度式の近似式として提案する¹⁷⁾。

$$r^* = \frac{a^* \cdot (r_i^* - c^*)}{\tau^{*m} + b^*} + c^* \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 $\tau^* \equiv \tau/\Delta t$ 、 r_i^* は (計画基準) Δt 時間降雨強度の規準化変数 (Fig. 3 参照)、 a^* 、 b^* 、 c^* 、 m は降雨波形パラメーター k 、 F 、 y_p と対象とする降雨継続時間 τ^* によって規定される定数とする。

式 (24) に含まれる定数 a^* 、 b^* 、 c^* および m の推定法の概略を述べる。まず、 c^* は式 (20) 中の y の下限条件より次のようにおく。

$$c^* = \begin{cases} -(1/\lambda) \cdot \ln[(1-F_m)/(1-2F_m(1-k))] \\ (\lambda \equiv (2k-1)\sqrt{3k^2+1}/2k, 0 < k < 1, k \neq 1/2) \\ 2\sqrt{7} \cdot F_m/7 \cdot (1-F_m), (k=1/2) \\ -\ln(1-F_m), (k=1) \\ \dots\dots\dots (25) \end{cases}$$

ここに、 F_m は中央集中型るとき F_b と F_a の大きい方を、後方集中型るとき F_b を用いる。したがって、式 (25) より明らかなように、 c^* は 2 つの降雨波形パラメーター k 、 F_m より定まる。

前述のように、初等関数で表わせない条件付確率降雨強度式を式(24)で近似するにはおのずと限界がある。そこで、近似精度を低下させないように、利用目的により、対象とする降雨継続時間帯を、たとえば次のように分離することを提唱したい。

$$1/12 \text{ or } 1/24 \leq \tau^* \leq 1 \dots\dots\dots(26)$$

$$1 \leq \tau^* \leq 6 \dots\dots\dots(27)$$

後方集中型あるいは中央集中型の降雨波形パラメーター k, F, y_p が与えられ、式(20)~(22)により任意の (r^*, τ^*) が計算されているとすると、対象時間帯の両端 ($\tau^*=1$ を含む) と中央の3点を通るように、3定数: a^*, b^*, m を決定すればよい。この場合、 m に関する非線形方程式を解く必要が生じるが、Newton法等の方法により試算的に解くことができる。

つまり、降雨波形パラメーター: k, F, y_p が与えられると、条件付確率降雨強度式はもちろんのこと、対象とする時間帯の降雨強度近似式の定数 a^*, b^*, c^*, m も計算できる。一度、この定数がある地点の各確率年に対して求められていると、この近似式で降雨強度を簡単に算定できる。降雨波形パラメーター: k, F, y_p の組合せに対する a^*, b^*, c^*, m の数表を別途、作成しておくことも有用と思われるが、かなり膨大なものになることが予想される。

5. 降雨波形パラメーターの推定法

基本降雨資料の単位時間 Δt として1時間を採用した場合について、資料抽出法、Freund分布の適合性について述べ、降雨波形パラメーターに関する資料解析の後、所定の計画確率年 T に対する計画基準1時間雨量より条件付確率降雨波形および降雨強度式を規定するパラメーター k, F, y_p の実用的算定手順を示す。

(1) 資料抽出と Freund 分布のあてはめ

1時間単位の降雨資料を日雨量100mm程度を目安に、それ以上降った日の時間雨量を収集する。一連降雨が日界にかかっている場合は日雨量が100mm以下でも拾い上げる。次に、Fig.5のように、一連降雨のピーク

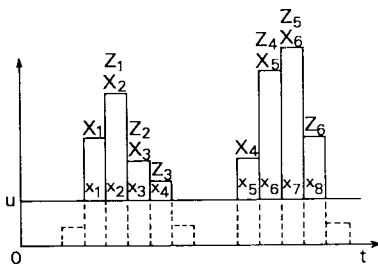


Fig.5 Schematic explanation of a specified constant u and data of (X_i, Z_i) .

とその前後数時間の特定値 u 以上の時間雨量 $(x-u)$ を対象とし、1時間前、後の $(x-u)$ の値、すなわち (X_i, Z_i) に Freund 分布式(1)をあてはめる。パラメーター α, β は次式で計算される¹⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= 2 \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} X_i^2 + \sum_{j=1}^{N_2} Z_j^2 \right\} / N \\ \frac{1}{\beta} &= \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} (Z_i - X_i) + \sum_{j=1}^{N_2} (X_j - Z_j) \right\} / N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

ここに、 (X_i, Z_i) は $0 < X_i < Z_i$ なる関係を満足するデータ (X_i, Z_i) でそのデータ数を N_1 とし、 (X_j, Z_j) は $0 < Z_j < X_j$ なる関係を満足するデータ (X_j, Z_j) でそのデータ数を N_2 とし $N = N_1 + N_2$ とする。

X の周辺確率分布 (Z の周辺分布も同じ)¹⁴⁾ :

$$F(X) = \begin{cases} 1 - \{\alpha / (2\alpha - \beta)\} \exp(-\beta X) \\ - \{(\alpha - \beta) / (2\alpha - \beta)\} \exp(-2\alpha X) \\ (2\alpha \neq \beta) & \dots\dots\dots(29) \\ 1 - \exp(-\beta X) - \alpha X \exp(-\beta X) \\ (2\alpha = \beta) \end{cases}$$

により理論値を指数確率紙にプロットし、Gringorten公式による実測値のプロットと比較する。もし、分布のあてはめが良好で、かつ標本相関係数 $\hat{\rho}$ と式(6)を介しパラメーター α, β より推定される相関係数 ρ の一致度も良好であれば、このときの u を付加定数として採用する。不十分なときには、 u 値を変更し、パラメーター α, β の推定をやり直す。

Fig.6に徳島市(資料年数71年)の場合の Freund 分布の適合度を示す¹⁸⁾。他の地点(徳島県穴吹、木頭、高知県本山、大阪市)についても検討したところ¹⁹⁾、徳島市と同様に適合度はほぼ良好であり、時間雨量時系列の確率分布は Freund の二変数指数型分布で表現できることが明らかとなった。このことは本論文での条件付確率降雨波形および降雨強度式の基本仮定が妥当であることを実証するものである。

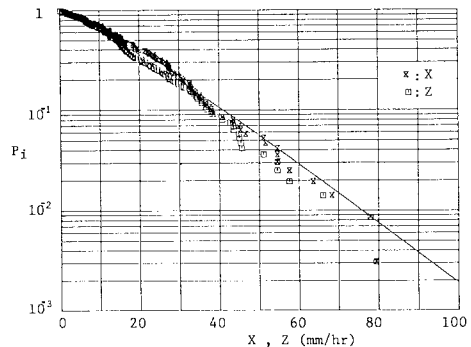


Fig.6 Fitting Freund's exponential distribution to the distribution of partial duration-hourly rainfall data at Tokushima.

(2) 降雨波形パラメーターに関する資料解析

時間雨量 x は前述の付加定数 u と $(x-u)$ の標準偏差 σ_u を用いて規準化変数： $y=(x-u)/\sigma_u$ に変換する。一雨のピーク時間雨量の規準化変数 r^* が約3以上のものについて、 k, F をそれぞれ、0.1~0.9の間につき0.1きざみで、 y_p を4~20の間で0.5きざみで変化させ、ピークから3時間(片側)の降雨波形に最もよく一致する(誤差二乗和を最小にする)降雨波形パラメーター： k, F, y_p の組合せを探索する。このときの降雨波形の時間原点は4.(1)で述べたように、後方集中型のときピーク時間の後端を、中央集中型のときピーク時間の中央を採用する。また、中央集中型のあてはめはピーク前後に分けて、それぞれ独立なデータとして行う。Fig. 7に中央集中型条件付確率降雨波形のあてはめの一例を示す。

さて、降雨の自己相関指標 k は本来、一雨ごと、あるいは時間的にも変化するかもしれないが、計画上、地域の降雨特性によって決まる定数とみなすことにする。Table 1に各地点(前述)の k の平均 \bar{k} と標準偏差 σ_k を示す。この平均値 \bar{k} は(1)での Freund 分布のあてはめより得られた $k=\alpha/\beta$ の値とは必ずしも一致しない。後述の計画降雨の設定には、ここでの平均値 \bar{k} を k として採用することにする。

次に、各地点のデータを用い、条件付確率 F と k との単純相関係数を調べたところ、後方集中型で0.79、中央集中型で0.63と比較的高いので、式(30)のような回帰式を用い k から F を決定することもできよう。

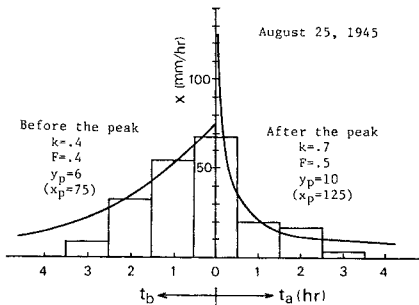


Fig. 7 Fitting central peaked type patterns to an actual hourly hyetograph.

Table 1 \bar{k} and σ_k of design storm pattern.

Design type Station	Backward peaked			Central peaked		
	\bar{k}	σ_k	n	\bar{k}	σ_k	n
Tokushima	.559	.123	22	.679	.132	19
Anabuki	.540	.156	10	.640	.174	10
Kitto	.544	.137	16	.679	.161	14
Motoyama	.577	.144	22	.732	.145	19
Osaka	.518	.083	11	.655	.099	11

$$\hat{F} = \begin{cases} 1.421 k - 0.423 & (\text{後方集中型}) \\ 1.108 k - 0.356 & (\text{中央集中型}) \end{cases} \dots\dots\dots (30)$$

y_p を従属変数とし、計画基準1時間雨量の規準化変数 r^* と k, F を説明変数としたときの回帰式は

$$\hat{y}_p = \begin{cases} 1.990 r^* + 24.885 k - 11.829 F - 9.869 & (\text{後方集中型}) \\ 2.384 r^* + 25.028 k - 12.184 F - 13.673 & (\text{中央集中型}) \end{cases} \dots\dots\dots (31)$$

のようであり、重相関係数は後方集中型0.85、中央集中型0.87である。しかし、式(31)を用いて得られる \hat{y}_p と k, F を式(20)~(22)に代入して算出される \hat{r}^* と、式(31)に用いた r^* の間にはかなり大きな差を生じる。したがって、式(31)から得られる \hat{y}_p を式(20)~(22)における y_p の第1近似値として用い、後述のように試算的に y_p を決定する。

(3) 降雨波形パラメーターの算定手順

主に1時間雨量資料より、ある地点での計画確率年に対する降雨波形パラメーターを求める実用的手順を以下にまとめる。

i) 計画確率年 T に対する基準1時間雨量の算定
1時間単位雨量資料の統計処理により計画確率年 T に対する1時間雨量 x_c を求め、 $r^*=(x_c-u)/\sigma_u$ により規準化変数 r^* に変換する。

ii) k の決定
降雨波形として、後方集中型と中央集中型の2つを考え、両者について実測降雨波形のパラメーター (k, F, y_p) 解析を行い、得られた k の平均値 \bar{k} を採用する。

iii) F の決定
後方集中型、左右対称中央集中型に対して、それぞれの平均値 \bar{F} または式(30)による \hat{F} を採用する。非対称中央集中型を計画に用いる場合、安全側を考え、 $0 < F_a \leq F_b$ に限定する。

iv) y_p の決定
式(31)で計算される \hat{y}_p を第1近似値とし、前述の k, F を式(20)~(22)に代入して r^* の推定値 \hat{r}^* を計算する。 r^* はステップ i) で与えられているので $(\hat{r}^* - r^*)^2$ なる残差の二乗が許容誤差以下になるときの y_p を所要の y_p 値とする。

年最大10分間雨量資料が利用できる場合、継続時間が60分と10分に対する降雨強度がこの資料より与えられるものとみなせば、この2点の (r^*, τ^*) を通るような F と y_p を決定することも可能である。

徳島の1時間雨量資料のみにより得た条件付確率降雨強度曲線を確率年 $T=30, 50, 80, 100$ ごとに両対数紙にプロットすれば、Fig. 8のようである。 F として式(30)による \hat{F} を用いた。参考のため、従来用いられている

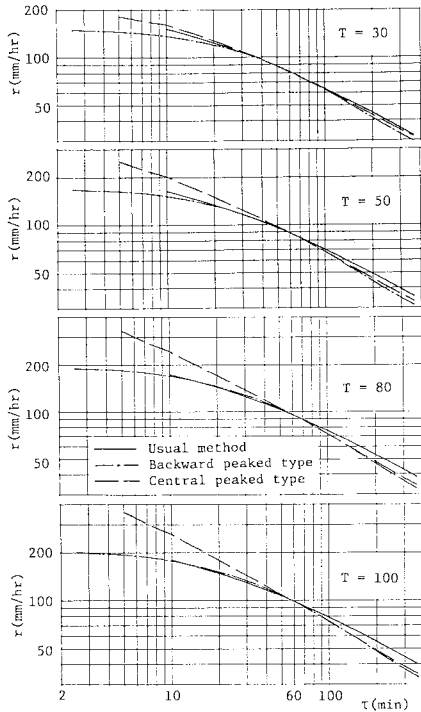


Fig. 8 Conditional probability rainfall intensity-duration curves for Tokushima.

Table 2 Storm pattern parameters at the case of backward peaked types for Tokushima.

u=7.5mm/hr, $\sigma_u=15\text{mm/hr}$, k=.55, F=.37				
T(yr)	30	50	80	100
γ_p	9.42	10.67	12.11	12.79

降雨強度曲線（10分までの短時間降雨資料に基づく）も併記する。両者の方法は異なるデータ、手順と考え方に基づくものであり、両者の曲線の一致度を論じてあまり意味がないが、本方法の有効性と妥当性を判断するうえでの重要な参考資料となる。Fig. 8によれば後方集中型と左右対称中央集中型の相違は1時間以上よりも1時間以下の短時間になるほど、また確率年 T が大きくなるほど、顕著に現われてくる。

10分から1時間の短時間帯について、従来の方法による降雨強度曲線に近い条件付確率降雨強度曲線を与えるのは、徳島市の場合、後方集中型降雨波形であることがわかる。後方集中型の場合の降雨波形パラメーターをTable 2に示す。従来の方法では、降雨強度式と計画降雨波形の間には時系列的な対応関係がなかったわけであるが、本方法によれば、このことがおのずと解決され、徳島の場合、従来降雨強度式に対する計画降雨波形はTable 2の後方集中型条件付確率降雨波形（のパラメー

ター）で与えられることになる。

6. 結 語

従来経験的な降雨強度式にかわり、二変数指数型確率分布に基づく、新しい条件付確率降雨波形と条件付確率降雨強度式を提案した。降雨波形として、特に後方集中型と中央集中型を定義し、1時間単位の雨量資料のみから5分程度までの短時間降雨強度を合理的に推定する方法を提示した。

実資料の解析によれば、本理論の基本仮定である時間雨量に対する Freund の指数型分布の適合性が実証されるとともに、信頼できる従来降雨強度曲線がある場合には、それに整合する計画降雨波形を後方集中型にせよ中央集中型にせよ、簡単に求めることができることが明らかとなった。

本論文では、どちらかといえば、降雨強度式に重点を置いたようであるが、計画降雨波形の引き伸ばし問題の解決にも、本理論の条件付確率降雨波形が利用できるはずであり、今後の課題としたい。

本研究は、文部省科研費自然災害特別研究（研究代表者：高知大学 玉井佐一教授）の補助を得て行った研究成果の一部であり、記して謝意を表します。また、計算等に協力していただいた元徳島大学学生 比嘉俊史氏（和歌山県庁）、元徳島大学大学院生 桑田康雄氏（青木建設）に謝意を表します。最後に、多くの資料のご提供をいただいた徳島県、徳島地方気象台、大阪府の関係各位に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 土木学会：水理公式集，昭和60年版，1985。
- 2) 日本河川協会編：改訂建設省河川砂防技術基準（案），調査編，山海堂，1977。
- 3) 石黒政儀：日本主要都市の確率降雨強度式について，土木学会論文集，No.64，pp.21-27，1959。
- 4) 田中礼次郎・角屋 睦：降雨強度式に関する研究，農業土木学会論文集，No.83，pp.1-8，1979。
- 5) 長尾正志：確率雨量配分率曲線の理論的推定，土木学会論文報告集，No.243，pp.33-46，1975。
- 6) Keifer, C.J. and Chu, H.H. : Synthetic storm pattern for drainage design, ASCE, Vol.83, HY4, pp.1332-1-1332-25, 1957.
- 7) 石黒政儀：ハイエトグラフとその特性に関する研究，土木学会論文集，No.155，pp.8-17，1968。
- 8) 日本河川協会編：改訂建設省河川砂防技術基準（案），計画編，山海堂，1977。
- 9) Pilgrim, D.H. and Cordery, I. : Rainfall temporal patterns for design floods, ASCE, HY1, pp.81-95, 1975.
- 10) Frederick, R.H. : Interstorm relations in Pacific Northwest, ASCE, HY12, pp.1577-1586, 1978.
- 11) Delleur, J.W. and Dendrou, S.A. : Modeling the runoff

- process in urban areas, CRC Critical Reviews in Environmental Control, Vol.10, Issue 1, pp. 1~64, 1980.
- 12) Hall, M.J. : Urban Hydrology, Elsevier Applied Science Publishers, London and New York, 1984.
 - 13) Freund, J.E. : A bivariate extension of the exponential distribution, Journal of the American Statistical Association, Vol.56, pp.971~977, 1961.
 - 14) 端野道夫・杉 雄司：複数の二変数指数型分布の結合とその応用に関する研究，徳島大学工学部研究報告，No.29, pp.49~57, 1984.
 - 15) 森口・宇田川・一松：数学公式Ⅰ，岩波全書，p.166,1970.
 - 16) 土木研究所：計画降雨に関する研究，第25回建設省技術研究会報告，昭和46年度，pp.459~483.
 - 17) 端野道夫・桑田康雄：条件付確率降雨波形と条件付確率降雨強度曲線の提案，第36回土木学会中国四国支部研究発表会講演概要集，pp.91~92, 1984.
 - 18) 端野道夫・比嘉俊史：条件付確率降雨強度曲線の適用に関する一考察，第37回土木学会中国四国支部研究発表会講演概要集，pp.93~94, 1985.
 - 19) 比嘉俊史：確率降雨波形と確率降雨強度式に関する研究，徳島大学工学部卒業論文，1985.

(1985.5.27・受付)
