

浮流砂理論の再検討

A PHYSICAL CONCEPT OF SUSPENDED-LOAD AND ITS APPLICATION

関根正人*・吉川秀夫**

By Masato SEKINE and Hideo KIKKAWA

Although a suspended-load phenomenon has been treated as turbulent diffusion, the phenomenon should be mainly considered as convective dispersion by the external forces due to gravity and random turbulent fluctuation. Based on this concept, the new theory on suspended-load is developed, that is, the coefficient of diffusion and the distribution of concentration are analyzed by the aid of the newly constructed simulation model, which is based on the dynamic equation of particle motion and verified by the experimental data. The characteristics of its motion are studied by the newly developed theory and some of the problems which are not clearly explained by the existing theories can be solved.

1. 序 論

流砂の運動を考える際には、まず、その粒子の河床からの離脱過程が問題となる。河床に存在する粒子は、主に流下方向への流体力と乱れの鉛直方向成分による作用を受けて移動を開始すると考えられるが、従来は、このような作用によって河床から離脱する粒子をすべて掃流砂とみなし、そのうちで特に乱れ的作用によって河床付近からはずれてランダムに移動するものを浮流砂としてきた。浮流砂の濃度分布を考える際には、掃流砂との関連を付けるために基準点濃度を規定し、これに対する相対的な濃度分布を明らかにし、この基準点濃度と河床濃度との関係を付けるという形で浮流砂と河床とを間接的に結び付けて考えてきた。これに対し、著者らの実測¹⁾によれば、平均流がなく、乱れ的作用だけで河床から粒子が離脱して直接浮流へと遷移することから、本論では、浮流砂現象を掃流砂とは別に直接河床と結び付けて考え、浮流砂を乱れの鉛直方向成分による河床粒子の拡散（鉛直方向への分散）としてとらえることを試みる。な

お、近年、掃流砂から浮流砂への遷移という観点から流砂現象を統一的にとらえようとする研究²⁾がなされているが、本研究は、特に河床構成材料が直接浮流砂へと遷移することに着目し、流砂現象全体を掃流・浮流の状態を問わず河床構成材料と直接結び付けて考えることにより説明しようとするものである。

このような趣旨から、本研究では、上記の従来の考え方を再検討し、新たな観点から浮流砂現象をとらえる。すなわち、この現象を乱流拡散としてではなく、粒子に対する外力による鉛直方向への分散（拡散）と考えることにより拡散係数の新たな評価法を提案するとともに、浮流砂濃度と河床濃度との関係およびその運動特性を明らかにすることができた。なお、検討にあたっては、現象の本質をよりよく理解するために単純な乱れの場合を想定し、このような場における浮流粒子の運動を解析している。具体的には、乱れの場合を乱数を用いてモデル化し、これと粒子に関する運動方程式とからなる数値シミュレーションを行うとともに、このモデルの妥当性を検証するため、人工的に制御可能な乱れの場合をつくり、この場における浮流粒子の運動のシミュレーション結果を実験により検証した。

* 正会員 工修 早稲田大学助手 理工学部土木工学科
(〒160 新宿区大久保 3-4-1)

** 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科
(同上)

2. 浮流粒子の運動に関するシミュレーション

(1) シミュレーション・モデルの概要

粒子の浮流に関する実験については次章で詳述するが、実測の場合には広範囲にわたって現象を検討することが容易でないため、本研究では実測と合わせて数値シミュレーションを行った（なお、計算にあたっては、実測結果に基づき、シミュレーションの妥当性を検証した後に行っている）。

本章で対象とする粒子の運動は、同一材料からなる河床上に静止状態で存在する球形粒子が、流体の乱れ的作用により離脱・浮上し、その後に河床に停止するという一連の動きである。この運動は流体の乱れのために不規則かつ複雑となっており、この運動を決定論的に解くことは不可能である。そこで、乱れの場合を乱数を用いて確率論的にモデル化し、これと粒子の運動方程式とからなるシミュレーション・モデルを考えた。モデル化にあたっての前提条件を以下に示す。

- ① 浮遊現象が定常化した後の粒子の非定常運動を考え、河床は定常・平衡・平坦とする。
- ② 乱れの性質は場所によらず一定で、その生起確率は正規分布に従う。
- ③ 粒子としては均一粒径の球を用い、浮流中に粒子同士が影響し合うことはない。

また、掃流砂の場合と同様に、粒子が河床に落下する際には衝突現象が生じるが、実験時の観察¹⁾によれば衝突により跳ね上がる粒子がほとんどみられず、浮流砂の運動を鉛直方向のみの一次元運動としてとらえようとする本モデルの場合には、衝突はさほど大きな役割を演じないと考えられることから、パラメーターとしての反発係数 e を原則として 0.1 としている。これは、衝突直前の最終落下速度が沈降速度程度であまり大きくないことによると考えられる。なお、参考までに e の値を 0.2 および 0.3 として計算したが、結果にほとんど差異は認められなかった。

(2) 粒子の運動方程式

乱流中を運動する浮流粒子の運動方程式については、Tchen³⁾ により詳細に検討されており、これに従うものとするれば、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_p}{dt} &= K_b \cdot C_D \cdot |v_r - v_p| \cdot (v_r - v_p) + K_p \frac{dv_r}{dt} \\ &\quad - K_c \cdot g + K_B \cdot B(t) \\ K_b &= \frac{3}{4d(\sigma_s + 1/2)}, K_p = \frac{3}{2(\sigma_s + 1/2)}, \\ K_c &= \frac{\sigma_s - 1}{\sigma_s + 1/2}, K_B = \frac{9}{d(\sigma_s + 1/2)} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$C_D = \frac{24}{Re_d} + \frac{3}{Re_d^{0.5}} + 0.34, Re_d = \frac{|v_r - v_p| \cdot d}{\nu} \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} B(t) &= \int_0^t \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{dv_p}{dt} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \\ &= \int_0^{t-\frac{\Delta t}{2}} \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{dv_p}{dt} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \\ &\quad + 2 \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{dv_p}{dt} \right) \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここで、 d は粒径、 σ_s は粒子の比重、 ν は水の動粘性係数、 C_D は抗力係数である。また、 v_r, v_p は水および粒子の鉛直方向速度であり、本論では、それぞれを $v_r = \bar{v}_r + v'_r, v_p = \bar{v}_p + v'_p$ (\bar{v}_r, \bar{v}_p : 平均値 (=0), v'_r, v'_p : 変動成分) で表わすことにし、おのおのの root-mean-square を v'_{rms}, v'_{prms} としている。抗力係数については、粒子の流体に対する相対速度を用いた粒子レイノルズ数に対して式 (2) より時間間隔 Δt ごとに決める。なお、式 (1) の右辺第 1 項は抗力を、第 2 項は流体の加速度運動に伴い生じる圧力を、第 3 項は重力をそれぞれ表わし、第 4 項は Basset 項である。この $B(t)$ により表わされる項は、流体および粒子が加速度運動をする場合の「履歴効果」を表わしており、式 (3) のように書けるが、この積分が $\tau = t$ で無限大となることから、微小時間 $\Delta t/2$ の間で加速度が一定とみなし得るとして多少の修正を行っている⁴⁾。なお、数値計算に際して、通常この項を無視することが多いが、たとえばポリスチレン粒子のような中立粒子の運動を解析する場合には、重力項の効果が相対的に小さいために、特にこの項の影響が無視し得ないことを確かめている。

(3) 乱れの場合のモデル化

浮流粒子の運動を複雑かつ不規則にしているのは流体の乱れであり、この運動をシミュレートするにあたっては乱れの場合を適切にモデル化する必要がある。

モデル化に際して、次のような予備計算を行った。すなわち、運動方程式である式 (1) 中の V_r として次式で表わされる sine 形の規則波形を与え、これに対する粒子の応答性を検討した。

$$v_r(t) = V_0 \cdot \sin[2\pi f(t + \delta)] \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 V_0 は速度振幅、 f は周波数、 δ は位相である。計算にあたっては、乱れ強度 ($= V_0/\sqrt{2}$) が一定となるように V_0 を一定とし、周波数 f を変化させ、これによる粒子の応答性について検討した。また、式 (1) を数値解析する際の初期条件としては、 $t=0$ で $v_p=0$ を与えている。このような条件のもとでの粒子の軌跡および応答について、次のことが知られた。

- ① 粒子は平均的にはある沈降速度で降下するが、瞬間的には水の周期と同じ周期でほぼ sine 波形の軌跡をとって振動する。

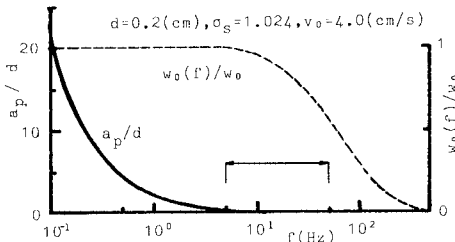


図-1 浮流粒子の応答性

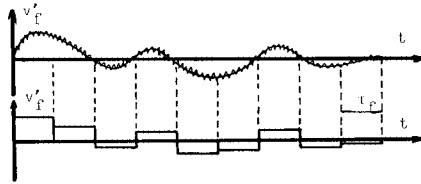


図-2 乱れのモデル化

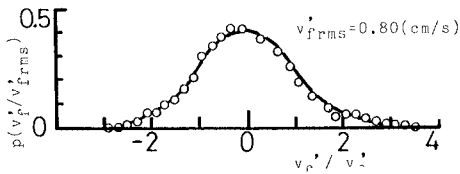


図-3 乱れの生起確率密度分布

- ② 粒子の沈降速度は水の振動周波数 f の増大に伴って減少する。
- ③ 粒子の平衡振動振幅 a_p は、水の振幅 $a_f = V_0/2\pi f$ より小さく、かつ、1つの f に対してその比はほぼ一定となり、 f に反比例して減衰していく。

なお、図-1はポリスチレン粒子の場合についてその応答性を調べた一例であり、縦軸は a_p を粒径 d で除して無次元化して示している（図中には、周波数 f に対する沈降速度 $W_0(f)$ の変化についても破線で示しており、縦軸は $W_0(f)$ を静水中での粒子の沈降速度 W_0 で除している）。

ここで、水の乱れとしてこのような単純な sine 波を与えた場合の粒子の応答性から、シミュレーションで与える乱れの作用時間 τ_r を決定する。すなわち、本シミュレーションでは、乱れとして最も単純な形である図-2(b) のような矩形波を与えることにするが、その1つの矩形波の持続時間の決定にあたっては、シミュレーションで対象とする乱れ強度（ $= V_0/\sqrt{2}$ ）の範囲での粒子の応答性を参考にし、このような V_0 の範囲に対して乱れが粒子の運動に有効であると考えられる周波数 f の上限値を知り、これに対応する sine 波形の周期から乱れの作用時間の最小単位としての τ_r を推定する。具体的には、 a_p と粒径との比がある値（この計算では

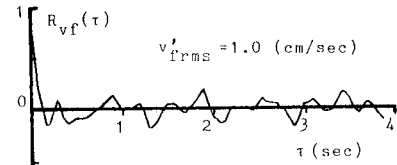


図-4 乱れの自己相関係数

0.25 としたが、この値の多少の変化によって結果が変わることはない)以下になる場合には、粒子は外力によって振動しないとみなし、その周波数の乱れは粒子運動には有効でないと判断し、このことと実験で発生させた乱れの性質とから τ_r を 0.1 秒程度としている（なお、ポリスチレン粒子の場合を例にとれば、図-1に矢印で示した範囲に相当する時間を τ_r としてシミュレートしたところ、その結果が後述するようにはほぼ同一であるとみなせることから、近似的には上記のようにして τ_r の概略値さえ知ればシミュレートが可能であると考えられる）。また、これと関連して、計算の刻み時間 Δt については、原則として τ_r の 1/10 程度としているが、 Δt の変化についても後述するように結果にあまり影響しないことがわかっている。

次に、図-2に示すように τ_r ごとに乱れの変動速度を矩形波で近似し、各矩形の高さに相当する乱れの値については、次章で示す実測の結果からその生起確率が図-3のように正規分布となることを考慮して、正規乱数を用いて発生させた。なお、図-4にこのようにして発生させた乱れデータの自己相関係数を示した。

以上により、時間間隔 Δt ごとに粒子の運動を追跡することが可能になったが、式(1)を数値計算により解くにあたっては、この式を差分化し、 $t=0$ で $z_p=0$ 、 $V_p=0$ という初期条件のもとで Runge-Kutta 法を用いている。河床条件として、 $z_p < 0$ は常に $z_p=0$ としている。なお計算は河床に存在する約 100 個の粒子を対象として行っており、計算条件については文献(19)を参照されたい。

3. 浮流粒子の運動特性に関する実験^{注)}

(1) 実験概要

浮流砂に関する実験的研究は、これまでに Rouse^{5),6)}、Vanoni⁷⁾ らによりなされてきたが、これらはあくまで基準点濃度を考えることを根底にしており、その結果、河床の存在が考慮されていない。これに対し、著者らは浮流砂といえども河床から供給されたものであるから、

注) 本章で述べる実験については、第29回水理講演会論文集⁸⁾に発表済みであり、本章では論文の構成上必要最小限の記述に止める。

浮流砂についても河床粒子と関連付けて考えるべきであるとの立場から両者の関係をとらえやすい次のような実験を行った。

実験には全長 4 m, 幅 2 cm, 高さ 40 cm のアクリル製水路を用い, この中に直径 0.65 mm の鋼線を 3 mm 間隔に張った格子を 3 段挿入した。また, 水路床には粒径 2 mm, 比重 1.02 のポリスチレン粒子 (沈降速度 $W_0 = 2.16$ cm/s), あるいは平均粒径 0.42 mm, 比重 1.4 の石炭粉 ($W_0 = 1.64$ cm/s) を厚さ 10 cm 程度敷き並べ, 静水中または通水中に上記の格子を上下に振動させ, 乱れを人工的に発生させた (なお, 格子の振動は正弦的であるように調節し, 水平方向の流れが平均的には生じないようにしてある。また, 水路幅を 2 cm と非常に狭くしているのは, 流れのみでは乱れを発生させないためである)。乱れの計測には, レーザードップラー流速計を用い, サンプリグ周波数を 200 Hz, データ総数を 2048 個として A/D 変換の後, これを処理した。また, 浮流粒子の運動は, ロータリーシャッターカメラを用いてビデオに収録し, 約 100 個の粒子の軌跡を 1/60 秒間隔に追跡した。なお, 浮流粒子が球形の場合には, 粒子が格子に衝突することはまれにみられるが, これについてはビデオ解析の際に除外している。また, 粒子が球形でない石炭粉の場合には粒子の軌跡が鉛直方向からずれ, 粒子が格子に衝突する回数が増し, 一方, 球形粒子であっても流れを加えた場合にも同様のことがみられるが, このような場合には, 格子ではなく平行線で乱れを作る方が適切であると考えられる。実験条件については文献 19) を参照されたい。

(2) 乱れの特性

水路内で生じる乱れの場合は, 格子の振動周波数 f によって異なり, その乱れ強度は, 格子が上下に往復する領域 (領域 I) と格子の最下点と河床面との間の領域 (領域 II) とでは多少異なる (なお, 格子の構造およびストロークについては本実験では変えていない)。まず, 領域 I では, 場所によらずほぼ様な乱れが生じており, その乱れ強度 U'_{rms}, V'_{rms} は次式で表わされる。

$$\frac{U'_{rms}}{S_0 \cdot f} = \frac{V'_{rms}}{S_0 \cdot f} = 1.37 \times 10^{-2} \cdot \left(\frac{S_0 M f}{\nu} \right)^{1/3} \dots\dots (5)$$

ここに, S_0 はストローク (=2.8 cm), M はメッシュ間隔 (=3 mm), ν は水の動粘性係数である。一方, 領域 II では, 乱れは格子最下点からの距離 ξ とともに減衰し, 乱れ強度は次式で表わされる。

$$\frac{U'_{rms}}{S_0 \cdot f} = \frac{V'_{rms}}{S_0 \cdot f} = 1.83 \times 10^{-2} \left(\frac{S_0 M f}{\nu} \right)^{1/3} \left(\frac{\xi'}{M} \right)^{-1/2}$$

$$\xi' = \xi + S_0/25 \dots\dots (6)$$

乱れの生起確率については, 確率密度が図-3 のようになり, ほぼ正規分布に従っている。また, 乱れの周期

性については格子の振動周期 T と一致することが確かめられている。

なお, 本研究の目的である河床粒子と浮流粒子との関係をとらえる実験では, 格子の最下点を河床面から一粒径径上に設定しているため, 式 (6) で表わされる乱れの減衰はほとんどみられず, 乱れ強度は水路全域にわたってほとんど一定であると考えられる。

4. 運動特性の検討

(1) 平均離脱率 $\overline{P_{sv}}$ の評価

河床に存在する粒子は流れの作用により移動状態に達し「流砂」となるが, このうち鉛直方向の乱れの作用と密接な関係にあるのが「浮流砂」であると考えられる。本節では, 流れ成分がない場合の, 乱れの作用のみによる粒子の河床からの離脱について考え, その「浮上限界」および単位時間当たりに離脱・浮上する粒子量の, 河床単位面積上に存在する粒子量に対する平均的割合を表わす「平均離脱率 $\overline{P_{sv}}$ (次元: $[T^{-1}]$)」について検討する。河床粒子の河床からの浮上・離脱過程を特徴付ける量としては, 乱れ強度と粒子の沈降速度 W_0 の 2 つが考えられる。そこで, 実験結果に基づき, 浮上限界時の乱れ強度 V'_{scr} と W_0 との関係調べると, ポリスチレン粒子および石炭粉のいずれの場合にも次式が成り立つ¹⁾。

$$W_0 / V'_{scr} = 3.0 \dots\dots (7)$$

ここで, 浮上限界とは, 河床に存在する粒子が揺れを生じ, その一部が浮上している状態としている。このこと

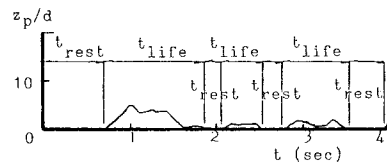


図-5 浮流粒子の軌跡

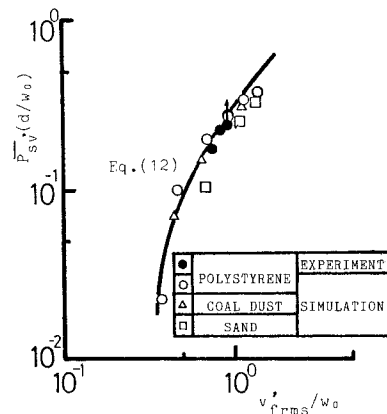


図-6 平均離脱率 $\overline{P_{sv}}$ の評価

は、乱れの生起確率が図-3のように正規分布をしていることから、浮上限界が、沈降速度 W_0 を越える乱れが存在するか否かの限界と一致することがわかる（なお、このことはシミュレーションによっても確かめられた）。

次に、河床からの粒子の平均離脱率 $\overline{P_{sv}}$ については、図-5に示した rest-period t_{rest} の平均値の逆数と一致する。シミュレーション結果から $\overline{P_{sv}}$ を求めるにあたっては、次のように考えた。すなわち、濃度分布を積分して得られた濃度の総和が、河床から離脱して平衡状態に達した浮流粒子の濃度の総和に等しくなることから、 $\overline{P_{sv}}$ と次節以降で述べる t_s^* 、 ϵ_s との間には次式が成り立つ。

$$\epsilon_s = \overline{P_{sv}} \cdot t_s^* \cdot W_0 d \quad \dots\dots\dots (8)$$

したがって、シミュレーション結果から直接求められる t_s^* と ϵ_s を用いて、式(8)から $\overline{P_{sv}}$ を求めている。なお、実測ではビデオから直接離脱を測定している。以上のようにして、シミュレーションおよび実測結果から得られた $\overline{P_{sv}}$ を V'_{rms}/W_0 との関係で整理して図-6に示した。河床粒子の離脱の原因としては、主に、運動方程式である式(1)の右辺第1項で表わされる V_j による流体力のほか、第2項で表わされる圧力の作用が考えられ、特に後者は比重の小さい粒子ほど無視し得ない。ところで、式(7)および図-5で W_0 として示した沈降速度は静水中を自由沈降する粒子の最終速度であるが、流体および粒子が加速度運動している場合には、上記の圧力の作用のために、沈降速度が幾分小さくなることが知られ⁸⁾、実際には W_0 よりも小さな乱れも粒子の離脱には有効である。そこで、以下の仮定の下に離脱率の推定式を誘導する。

- ① 粒子速度 V_p の生起確率は正規分布に従い、その分布を正規化した場合に、水の乱れおよび粒子速度はそれぞれの生起確率が等しいもの同士が対応すると仮定する。
- ② 粒子が河床から粒径に比例した高さ ($\alpha_0 \times d$) だけ浮上したときに離脱が完了するものとする。
- ③ 圧力の作用のため、静水時の沈降速度 W_0 に比例したある大きさ ($=\beta \cdot W_0$, $0 \leq \beta \leq 1$) 以上の水の乱れが粒子の離脱に有効に作用すると考える。

ここに、 α_0 および β は比例定数である。以上の仮定に基づき、河床を離脱する際の粒子速度の代表値を次式で表わすことにする。

$$\widehat{v_{pck}} = \frac{v'_{rms}}{V'_{rms}} \cdot E[v'_j | v'_j \geq \beta w_0] = \alpha_v \cdot E[v'_j | v'_j \geq \beta w_0] \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 α_v は比例定数 ($=V'_{rms}/V'_{rms}$) である。一方、離脱に要する時間単位を t_0 とすれば、 $V'_j \geq \beta w_0$ を満たす V'_j が生起する時間は $p_0 t_0$ で表わされ、 t_0 時間当た

りの離脱個数 N は次式のように表わされる。

$$N = \alpha_n \cdot (\widehat{v_{pck}} \cdot p_0 t_0) / (\alpha_0 \cdot d) \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 α_n は乱れの相互相関性等を考慮した補正係数であり、 $E[V'_j | V'_j \geq \beta w_0]$ および p_0 は次式のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} E[v'_j | v'_j \geq \beta w_0] &= \int_{r_c}^{\infty} r \phi(r) dr / \int_{r_c}^{\infty} \phi(r) dr \\ p_0 &= \int_{r_c}^{\infty} \phi(r) dr, \phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \\ r &= v'_j / v'_{rms}, r_c = \beta w_0 / v'_{rms} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (11)$$

以上により、 $\overline{P_{sv}}$ の推定式として次式が得られる。

$$\overline{P_{sv}} = \frac{\alpha_v}{K_\alpha} \cdot \frac{V'_{rms}}{d} \cdot \int_{r_c}^{\infty} r \phi(r) dr = \frac{\alpha_v}{K_\alpha} \cdot \frac{V'_{rms}}{d} \cdot \phi(r_c) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $K_\alpha (= \alpha_0 / \alpha_n)$ は比例定数である。

図-6では、シミュレーション結果から求めた $\overline{P_{sv}}$ と式(12)による値との比較を行っており、図中の曲線が式(12)を表わしたものである。これより、鉛直方向の乱れのみによる粒子の河床からの離脱については、式(12)によってその割合を推定できると考える。ここに、式中の係数 α_v 、 K_α 、 β については、実測およびシミュレーション結果に最もよく適合する値として $\alpha_v = 1.0$ 、 $K_\alpha = 12.5$ 、 $\beta = 0.65$ を用いている。なお、同図中には実測から求めた $\overline{P_{sv}}$ の値についても示しており、実測に対して適合性のよいことがわかる。

(2) 拡散係数 ϵ_s の評価

浮流粒子の運動および浮流砂量を知るうえで、粒子の分布の程度を表わす濃度分布を明らかにすることは意義あることである。本節では、粒子の濃度分布を河床濃度と関連付けて考え、しかも、パラメーターとしての拡散係数 ϵ_s を粒子の性質およびその運動特性の面から評価することを試みた。

従来から濃度分布式として有名な Rouse の式をはじめとした諸式（特に Rouse の式の場合には実用的に優れていることが実証されている⁷⁾）は、その誘導にあたって次の仮定をしている。

① 粒子についての濃度拡散係数 ϵ_s が水の運動量拡散係数 ϵ_m に等しい、あるいは比例する ($\epsilon_s = k_\alpha \cdot \epsilon_m$) とし、分布をもつものとする（特に Rouse の式では放物線分布になるとする）。

② 浮流砂は乱れの作用により掃流砂から遷移するものとし、河床濃度と直接関連付けて考えることはしない。これに対し、①の仮定は、水と同様に挙動する染料の拡散のような場合には妥当であっても、本論で対象としているような有限の大きさをもつか、あるいは比重が大きい粒子の拡散の場合にも成り立つか否かは確かではない。また、Rouse の式の場合には係数の k_α の値が変化

することが指摘されており、Einstein & Chien⁹⁾や吉川・石川¹⁰⁾らによってすでに説明されているとはいえ、なお一考の必要があると考える。また、②の仮定についても、濃度の絶対量を知るためには基準点濃度を適切に評価する必要があり、その評価法がEinstein¹¹⁾らによって提案されているが、河床との関係が不明瞭であり、このことも含めてさらに検討する必要があると考える。

このような観点から、本研究では、現象をとらえやすくするため、特に理想化された状態として平均流がなく、鉛直方向に乱れの性質が一定である場における均一粒径からなる粒子の浮遊を対象とした。すなわち、粒子の浮遊の原因が乱れの作用にあることから、このような乱れの場合には拡散の程度は鉛直方向に一定となり、この程度を表わすパラメーターである拡散係数も一定となると考えられる。なお、せん断乱流の場合の乱れ強度の鉛直方向分布については中川・祢津¹²⁾らによって検討されており、これによる鉛直方向上向きに指数関数的に減衰するとされているが、特に乱れの鉛直方向成分 v'_z の変化は小さいので、計算の簡単のために鉛直方向に一定とみなした。なお、吉川・石川¹⁰⁾によれば、濃度分布形は拡散係数 ϵ_s の値自体の影響は強く受けるが、 ϵ_s の分布形にはさほど影響しないことが示されており、上記のような扱いは計算精度という点からすればほとんど問題はないと考えられる。

粒子の拡散は、主に乱れによる「乱流拡散」と乱れ等により粒子に作用する外力による「鉛直方向への分散」としての扱いが可能であると考えられ、従来のRouseらの考え方では前者としての扱いをしているが、本論で対象とするような粒子の拡散の場合には必ずしも妥当とはいえないと考えられる。すなわち、有限の大きさをもつか、あるいは比重の大きい粒子の運動の場合には、式(1)で表わされる運動方程式に従うと考えられ、この場合には、個々の粒子は乱れに乗って移動するのではなく、粒子に働く重力および乱れによる流体力によって移動すると考えられ、「乱流拡散」としてよりも「鉛直方向への分散」として考える方が適切であると考えられる。

なお、このような扱いが可能である範囲(粒径あるいは沈降速度の範囲)には限りがあると考えられるが、これについては今後さらに検討していくつもりである。以下では、このような考え方に基づいて粒子の濃度拡散係数 ϵ_s を評価するが、そのためには従来からの拡散方程式だけでは不十分で、さらに粒子の運動方程式をも考える必要がある。しかし、個々の粒子についての運動方程式である式(1)は、拡散方程式とは形式を全く異にするため、 ϵ_s に関して直接的には何の情報も与えない。そこで、図-7(a)に示すような(単位面積)×(高さ Δz) の単位水柱を考え、平衡状態においてこの単位水柱内の

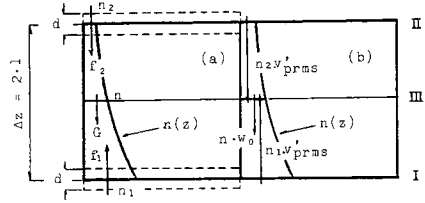


図-7 濃度分布に関する概念図

粒子群に作用する力のつり合いを考える(ただし、ここでは粒子に働く平均的な力のつり合いを考えており、式(1)で運動の非定常性・不規則性を表わす圧力の項およびBasset項については簡単のために無視している)。ここで考える力としては、この単位水柱内に存在する粒子に働く重力のほか、この水柱の上下縁の単位面積中に存在する粒子に作用する流体力があり、この流体力の作用の仕方は圧力とほぼ同等で、上下面での値の差のみが問題となる。なお、この水柱内の粒子と水とは常に一体となって動いているわけではないが、ここでは粒子の存在により水の乱れが影響を受けることは無視しており、粒子および水はそれぞれ独自に力がつり合っていると考える。図-7中の曲線は粒子の存在個数密度 $n(z)$ の分布で、濃度分布と相似な分布を示す。図-7の断面I、IIでの $n(z)$ の値をそれぞれ n_1 、 n_2 とすれば、各断面の単位面積中に存在して外部から流体力を受ける粒子の面積比率は、粒径 d の幅での平均値として $n_1 d(\pi d^2/4)$ 、 $n_2 d(\pi d^2/4)$ となると考えられる。ここで、 $n_1 d$ および $n_2 d$ は、各断面に存在する粒子数ではなく、面積力としての流体力が作用する平均的な粒子数で、図-7(a)に示した(単位面積)× d の水柱内に存在する粒子数に等しい。なお、 $\Delta z = 2l \geq d$ (l : 粒子が鉛直方向にその運動の向きを変えるまでに移動する距離の平均値)である。また、1つの粒子に作用する流体力は平均的には $\pi/8 \cdot \rho C_D d^2 \bar{V}_s^2$ となり、この \bar{V}_s^2 は水の乱れの粒子速度に対する相対速度の二乗平均と考えられるが、対象とする場では、これが粒子速度の二乗平均 v_{prms}^2 に比例し、かつ鉛直方向に一定であると考えられることから、この単位水柱に作用する流体力の差 Δp は、次式で表わされる。

$$\Delta p = f_1 - f_2 = \pi/8 \cdot \rho C_D d^2 \cdot \alpha_1 v_{prms}^2 \cdot (n_1 - n_2) d \dots (13)$$

ここに、 α_1 は比例定数である。これに対し、断面I-II間の平均の粒子個数密度を区間中央での値 n に等しいとすれば、重力 G は次式で表わされる。

$$G = \pi/6 \cdot \rho (\sigma_s - 1) d^3 \cdot n \Delta z \cdot g \dots (14)$$

したがって、この単位水柱に働く力のつり合いを考え、平衡条件のもとでは次式が成り立つ。

$$\Delta p - G = 0 \dots (15)$$

ここで、個々の粒子に着目すると、各瞬間の粒子の運動

は非定常運動であるが、平均的には静水時の沈降速度 W_0 に比例したある速度 $\alpha_2 w_0$ で沈降していると考えることができるから⁸⁾,

$$\pi/6 \cdot \rho(\sigma_s - 1) \cdot d^3 g - \pi/8 \cdot \rho C_D' \alpha_2^2 w_0^2 = 0 \dots (16)$$

が成り立つ。ここに、 C_D' は非定常運動の影響をも考慮した抗力係数、 α_2 は比例定数である。したがって、以上の式 (13), (14), (15), (16) より、次式が導かれる。

$$K_{e1} \cdot \frac{V_{rms}^2}{W_0} \cdot d \left(\frac{dn}{dz} \right) + W_0 \cdot n = 0 \dots (17)$$

ここに、 K_{e1} は比例定数 ($= \alpha_1 C_D' / \alpha_2^2 \cdot C_D'$) である。

一方、図-7 (b) で区間中央の断面 III における粒子の運動量保存を考えると、この場合には存在個数密度 $n(z)$ のままで以下の式の展開が可能であり、上向きあるいは下向きの Flux J_{\pm} 、 J_{\pm} は、 $\Delta z = 2l$ として、

$$J_{\pm} = (n_1 - n_2) V_{rms} = -2l \cdot V_{rms} \cdot \frac{dn}{dz}, \quad J_{-} = n W_0 \dots (18)$$

となり、平衡条件のもとでは $J_{+} = J_{-}$ であるから、次式が導かれる。

$$V_{rms} \cdot 2l \cdot \frac{dn}{dz} + W_0 n = \epsilon_s \cdot \frac{dn}{dz} + W_0 n = 0 \dots (19)$$

この式 (19) がいわゆる“拡散方程式”であり、式 (17) と式 (19) との比較から、拡散係数 ϵ_s は次の関係になければならないことがわかる。

$$\epsilon_s = K_{e1} \cdot V_{rms}^2 \cdot \frac{d}{W_0} \dots (20)$$

以上のように、拡散方程式と力のつり合い式を通じて、拡散係数 ϵ_s を粒子の性質および運動特性を用いて評価することができた。なお、式 (20) は平衡状態に達したときの拡散係数を与える式であり、平衡状態に達するまでの過渡的な状態に対応するものではない。また、上記のような拡散係数の誘導の仕方は、Einstein¹³⁾ がブラウン運動の場合に用いた方法に倣っており、沈降速度 W_0 が粒径 d の二乗に比例するとすれば、結果的には ϵ_s は

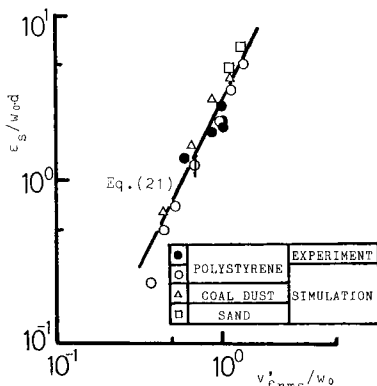


図-8 拡散係数 ϵ_s の評価

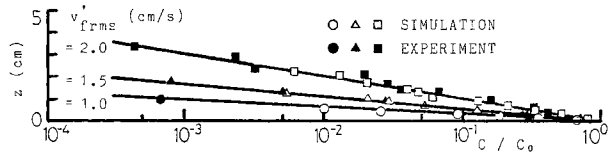


図-9 濃度分布の比較

d に反比例するという同一の傾向を示すことになる。

この式 (20) と実測およびシミュレーション結果から求めた ϵ_s との比較が図-8 に示されており、この図より式 (20) の適合性が確かめられた。なお、比較に際しては式 (20) を次式のように書き直している。

$$\epsilon_s = K_e \cdot V_{rms}^2 \cdot \frac{d}{W_0} \dots (21)$$

ここに、 K_e は比例定数 ($= K_{e1} \cdot \alpha_2^2$) であり、図-8 の関係を最もよく説明する値として $K_e = 3.0$ としている。

また、式 (19), (21) より、濃度分布は次式で表わされる。

$$\frac{C}{C_0} = \exp \left[-\frac{1}{K_e} \left(\frac{W_0}{V_{rms}} \right)^2 \left(\frac{z}{d} \right) \right] \dots (22)$$

実測およびシミュレーションの結果から得られた濃度分布の例を図-9 に示す。この図より、濃度分布が河床濃度 C_0 を基準にして表わせること、および分布形が exponential 形になることなどがわかり、このことと図-8 の結果とから逆に式 (22) が成り立っていることがわかる。ここに、 C_0 とは河床単位体積当りに河床構成材料が占める粒子体積の割合である。

(3) 滞留時間 t_s^* の評価

滞留時間 t_s^* は、粒子が河床より離脱・浮上してから再び河床に停止するまでの平均時間で、図-5 で示した粒子軌跡のうちの t_{LIFE} に相当する運動の寿命時間の平均値を表わす。また、Euler 的な見方をすれば、 t_s^* は浮流砂の濃度が 0 の状態から乱れによって定常濃度に達するのに要する時間に相当する。

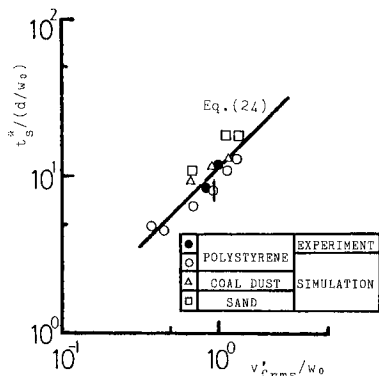


図-10 滞留時間 t_s^* の評価

平衡状態では、河床を離脱する粒子数と河床に停止する粒子数とは等しく、平均的には t_s^* 時間ごとに粒子が入れ代わりと考えられることから、 t_s^* を「粒子が平均拡散速度で河床と濃度重心との間の距離を移動するのに要する時間に比例する量」と考えられる。ここで、濃度重心とは、濃度分布をもとに得られる粒子の重み付きの平均存在高さで、次式で表わされる。

$$z_c = \int_0^\infty z \cdot \frac{C(z)}{C_0} dz / \int_0^\infty \frac{C(z)}{C_0} dz \dots\dots\dots(23)$$

式 (22) と式 (23) を用いて整理すると、 t_s^* は

$$t_s^* = K^* \cdot \frac{z_c}{V'_{rms}} = K_t \cdot \frac{V'_{rms}}{W_0} \cdot \frac{d}{W_0} \dots\dots\dots(24)$$

となる。ここに、 K^* および K_t は比例定数 ($K_t = K^* \cdot \alpha_t \cdot \alpha_v$) である。実測およびシミュレーション結果から得られた t_s^* を V'_{rms} との関係で整理したのが図-10 であり、図中の実線は式 (24) により得られる曲線であり、ここで、 K_t は図中のプロットを最もよく説明する値として $K_t = 10$ としている。図-10 より、式 (24) による曲線は実測値およびシミュレーション結果をよく説明しており、式 (24) の適合性が確かめられた。

なお、「乱流拡散」による考え方についての検討をするため、以下の計算を行った。すなわち、前記のシミュレーションにおいて、各粒子についての乱れの作用時間 τ_f を変え、乱流拡散の平均時間に相当するものを変化させて計算 (ポリスチレン粒子について、 $\tau_f = 0.02 \sim 0.2$ (秒)、 $\Delta t / \tau_f = 0.05 \sim 0.5$ の範囲で行った) し、その結果を図-6、図-8 および図-10 において矢印で示した。これより、特性量が乱流の自己相関時間によらずほぼ同じになることがわかり、乱流拡散はほとんど影響をもたないと考えられる。

5. せん断乱流場への適用

前章では、乱れのみが存在し、流れが存在しない場における浮流現象について一次的に扱ってきた。これは、粒子の鉛直方向への拡散を考えるにあたっては、その方向への運動を考えるだけで十分であると判断したためであるが、本章では、前章で示した結果を流れのある二次元の現象に適用し、その妥当性を検討するとともに、従来の研究で問題とされてきた点について、その説明を試みる。

まず、3. で述べた実験のうち層流程度の流れを与えた場合について検討する。この場合には、流速の時間平均および乱れは鉛直および水平方向にほぼ一定であり、しかも流れによって可能な限り乱れが生じないようにしている (流れが振動格子に当たることにより渦が生じ、結果的に乱れ強度が若干増大するが、その程度は格子に

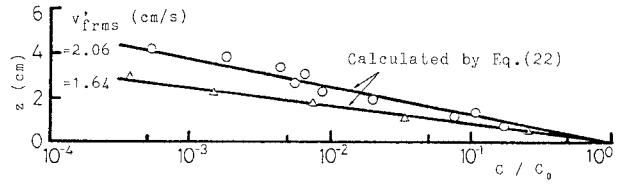


図-11 濃度分布 (流れを与えた場合)

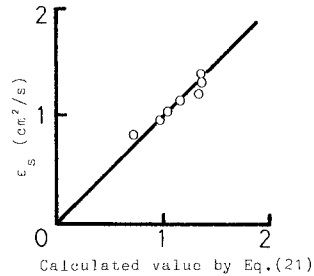


図-12 式 (21) の検討

よる乱れに比べて小さい)。また、この場合の流速は、流れのみでは河床の粒子が移動しない程度としている。実測により得られた濃度分布の一例を図-11 に、また、その濃度勾配から求めた拡散係数を図-12 にそれぞれ示す。この図-11、図-12 より、このように流れと乱れが共存する場合にも式 (21) および式 (22) の関係が成り立っていることがわかる。また、この場合の浮上限界および離脱率については、これを実測から定量的に評価することは容易ではないが、定性的には、乱れ的作用に加えて流れ方向にも流体力が働くために、浮上限界時の乱れ強度 V'_{scr} が低下すること、および同一の乱れ強度に対して離脱率がわずかながら増大すること、などが確かめられた。

次に、より一般的な流れの場における現象として、Vanoni⁷⁾、Vanoni & Nomicos¹⁴⁾、Brooks¹⁵⁾、吉川・福岡¹⁶⁾らの実測結果を用いて検討を加える。なお、これらの実測は河床構成材料 (あるいは浮流砂として用いた粒子) として混合粒径の砂を用いているため、濃度分布を評価するにあたっては次のような仮定を設け、これに基づいて均一粒径の場合に得られた式 (22) を修正した。

- ① 濃度分布は各粒径ごとに exponential 形をとり、粒径ごとに拡散係数が異なる。
- ② 各粒径ごとの河床濃度 C_{0i} はその河床構成材料の粒度組成に比例する。
- ③ 鉛直方向の乱れ強度 v'_{rms} は摩擦速度 u_* に比例する。

ここで、この①については Lane & Kalinske¹⁷⁾ および芦田・道上¹⁸⁾らがすでに調べているが、式 (22) の適合性を検討するために、芦田・道上の平坦床での実測結果との比較を行い、図-13 に示した。図中の実線は各

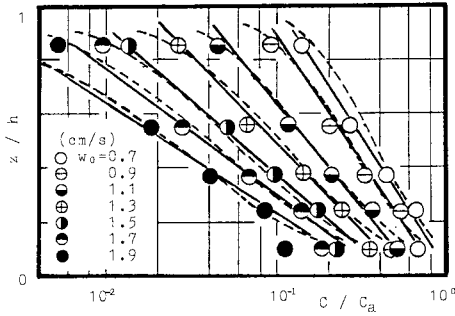


図-13 芦田・道上¹⁷⁾の実測結果との比較
($u_* = 4.02(\text{cm/s})$, $\alpha = 0.35$)

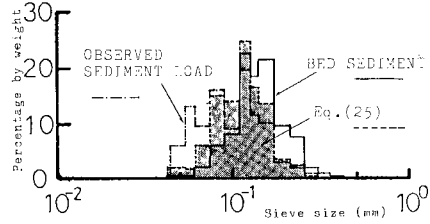


図-14 粒度分布の変化

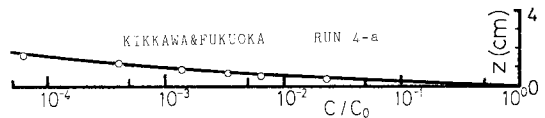


図-15 吉川・福岡¹⁶⁾の実測結果との比較

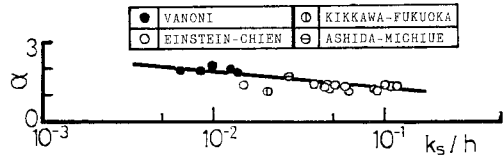


図-16 係数 K_c の評価

粒径に対する式 (22) による相対的な分布を、破線は各粒径ごとに求めた $Z_i = w_{0i}/xu_*$ に対する Rouse の式による分布をそれぞれ表わしている。なお、この場合の基準点高さは原則として水深の 0.05 倍としており、また、式 (22) から相対的な濃度分布 C/C_a を求めるには、基準点濃度 C_a が明らかでないために、この値を図中のプロットを最もよく説明する値としている。この図より、①の仮定がほぼ妥当であり、かつ各粒径ごとに式 (22) が成り立っていることがわかる。また、同時に式 (22) が各粒径ごとに求めた z_i を用いた Rouse の式による分布と非常に近い分布を与えることがわかり、以上からも拡散係数を式 (21) により表わすことの妥当性が確認できた。また、②、③についても妥当な仮定と判断できることから、以上の 3 点を考慮して、混合粒径の場合の濃度分布式を次のように表わすことにする。

$$\frac{C(z)}{C_0} = \sum_i f(d_i) \Delta d_i \cdot \exp\left[-\frac{1}{K_c} \cdot \left(\frac{w_{0i}}{u_*}\right)^2 \cdot \left(\frac{z}{d}\right)\right] \dots\dots\dots (25)$$

$$K_c = K_e \cdot (v'_{rms}/u_*)^2$$

ここに、 $f(d_i) \cdot \Delta d_i$ は河床構成材料中に占める粒径 d_i の粒子の割合 ($f(d_i)$ は存在確率)、 w_{0i} は d_i の粒子の沈降速度、 K_c は比例定数である。式 (25) によれば粒径による拡散係数の変化を考慮することができ、同時に河床構成材料の粒度分布がわかれば、その河床濃度を基準にして濃度分布を知ることが可能となる。なお、実測によれば混合粒径の濃度分布の場合には、均一砂の場合よりさらに exponential 形からずれた分布を示すが、このことは見方を変えれば次のように考えられる。すなわち、Brooks¹⁵⁾、芦田・道上¹⁸⁾、Lane & Kalinske¹⁷⁾ が調べているように、このようなずれは各高さに存在する粒子の粒度組成の変化 (すなわち、河床からの距離が大きいほど微細粒子の占める割合が増大すること) と密接な関係にあり、また、全粒径に対する濃度分布が各粒径ごとに示す exponential 形の分布の和になっていることによると考えられる。図-14 には、Brooks¹⁵⁾ の実測結

果をもとに求めた河床粒子および流砂の粒度組成の変化を示している。この図より、式 (25) による結果と実測結果が比較的よい対応関係にあり、しかも流砂の方が微細粒子の占める割合が増大していることがわかる。なお、Rouse の式の場合には、浮流砂と河床との関係が明確でないため、基準点濃度の適切な評価ができない限り、流れに伴う河床粒子の粒度分布の変化を考慮に入れることができない。

式 (25) の適合性を検証するために、前記の実測結果^{7), 14), 16)} との比較を行ったが、前の 2 つの実験^{7), 14)} は固定床上去くわずかの砂を敷いて行ったものであるため、この場合には C_0 と直接結び付けて考えることはできない。移動床上の平衡浮流砂の場合について、吉川・福岡¹⁶⁾ による濃度分布の実測結果を用いて検討し、実測結果と式 (25) とを比較した一例として図-15 を示した。この図より、両者がよい対応関係にあり、式 (25) によって河床濃度 C_0 を基準にして濃度分布を評価できることがわかる。なお、ここで用いたデータは必ずしも flat-bed 上のもではなく、抵抗の変化等が生じるため、式 (25) 中の係数 K_c が変化することが予想される。そこで、抵抗を表わすパラメーターとして相当粗度 k_s をとり、これと K_c を直接支配すると考えられる係数 $\alpha (= v'_{rms}/u_*$, $K_c = K_e \cdot \alpha^2$, $K_e = 3.0$) との関係性を調べたのが図-16 である。

これより、 K_c は河床波の状況により一義的に決定されるものと思われるが、この点については今後さらに明らかにしていくつもりである。以上により、一般の流れ

の場合、しかも混合粒径の場合にも、流れの特性および河床材料の粒度分布より、式(25)および図-16から濃度分布を推定することができる。

6. 結 論

本研究では、浮流砂の運動特性および河床濃度 C_0 と濃度分布との関係を明らかにするために、一次元の浮流砂シミュレーションを行った。これにより、実測困難な特性の解明および従来の考え方の再検討と合わせて、新たな観点からの現象の把握が可能となった。なお、シミュレーションの妥当性を検討するため、人工的に制御可能な乱れの間場をつくり、この場における粒子の浮遊に関する実験を行った。以下に成果を列挙する。

(1) 乱れのみによる粒子の河床からの離脱率 $\overline{P_{sv}}$ については、その推定式として式(12)が得られ、これを図-6に示した。

(2) 拡散係数については、従来のように現象を乱流拡散とみるのではなく、外力による鉛直方向への分散として把える立場をとり、粒子の性質および運動特性を用いて式(20)、(21)により評価できることを示し、図-8でその検討を行っている。濃度分布については、図-9に示すように河床濃度 C_0 を基準にして式(22)のように表わせることを示した。

(3) 滞留時間については図-10に示し、式(24)により表わせることを示した。

また、上記の結論を一般のせん断乱流の場に適用し、混合粒径の場合の濃度分布式として式(25)を得た。これにより、水理量および河床構成材料の粒度分布がわかれば濃度分布が評価できるだけでなく、河床構成材料と流砂との粒度組成の変化についても説明可能となった。さらに、洪水中の河床材料の変化の推定も可能となり、したがって、より精度よく流砂量が求められるようになった。

今後は、式の誘導の際に用いた仮定や係数について、さらに検討していくつもりである。

参 考 文 献

- 1) 関根正人・広末真宏・菊池節男・吉川秀夫：浮流砂の運動機構に関する研究，第29回水理講演会論文集，pp.503~508，1985。
- 2) 中川博次・辻本哲郎・村上正吾・旗持和洋：Bed material loadにおける saltation から浮遊への遷移機構のモデル化，第29回水理講演会論文集，pp.509~514，1985。
- 3) Tchen, C. M. : Mean Value and Correlation Problems connected with the Motion of Small Particles suspended in a Turbulent Fluid, 1947. (Doctor Thesis)
- 4) Lucien, M. B., Jr., Ho, H. W. and Yen, B. C. : Accelerated Motion of a Sphere in a Viscous Fluid, Proc. ASCE, HY1, pp.149~160, 1964.
- 5) Rouse, H. : Experiments on the Mechanics of Sediment Suspension, Proc. 5th International Cong. for Applied Mechanics, 1938.
- 6) Rouse, H. : Modern Conceptions of the Mechanics of Fluid Turbulence, Trans. ASCE, Vol.102, pp.523~536, 1937.
- 7) Vanoni, V. A. : Transportation of Suspended Sediment by Water, Trans. ASCE, Vol.111, pp.67~102, 1946.
- 8) 久保田稔・足立昭平：鉛直振動流中での球形粒子の沈降速度，土木学会論文報告集，第328号，pp.149~152，1982。
- 9) Einstein, H. A. and Chien, N. : Second Approximation to the Solution of Suspended Load Theory, MRD Sediment Series, No.3, Univ. of Calif., Inst. of Eng. Res., 1954.
- 10) 吉川秀夫・石川忠晴：流砂運動のモデル化とそれに基づく流砂量の算定法について，土木学会論文報告集，第269号，pp.53~64，1973。
- 11) Einstein, H. A. : The Bed Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flow, Technical Bulletin No.1026, U.S. Department of Agriculture, Soil Conservation, 1950.
- 12) 称津家久：開水路流の乱流構造に関する基礎的研究，京都大学学位論文，1977。
- 13) Einstein, A. : Investigation on the Theory of the Brownian Movement, Dover Publications, Inc., 1956.
- 14) Vanoni, V. A. and Nomicos, G. N. : Resistance Properties on Sediment-laden Stream, Trans. ASCE, Vol.125, pp.1140~1175, 1960.
- 15) Brooks, N. H. : Mechanics of Streams with Movable Beds of Fine Sand, Trans. ASCE, Vol.123, pp.526~594, 1958.
- 16) Fukuoka, S. and Kikkawa, H. : Characteristics of Open-Channel Flow with Sediment, Technical Report No.10, Dept. of Civil Engineering, Tokyo Inst. of Technology, 1971.
- 17) Lane, E. W. and Kalinske, A. A. : Engineering Calculations of Suspended Sediment, Tran. AGU., pp.603~607, 1941.
- 18) 芦田和男・道上正規：浮流砂量に関する実験的研究，京都大学防災研究所年報，第10号B，pp.63~79，1967。
- 19) 関根正人・吉川秀夫：流砂に関する従来理論の再検討，早稲田大学理工学研究所報告第114号，1986。

(1985. 6. 14・受付)