

# 砂床蛇行河川の三次元流れと河床形状

## THREE-DIMENSIONAL FLOW AND BED TOPOGRAPHY IN SAND-SILT MEANDERING RIVERS

池田駿介\*・西村達也\*\*

By Syunsuke IKEDA and Tatsuya NISHIMURA

Mathematical models for defining three-dimensional turbulent flow and bed topography in meandering sand-silt rivers are presented, and interaction between them is analyzed. It is revealed theoretically that the secondary flow shows reduction in its magnitude from that of uniformly-curved open channels and shows phase-lag against the channel plan-form. A model for defining bed topography is derived by considering sediment balance for both bed load and suspended load, the transport rates and directions of which are obtained from the flow field thus determined. Laboratory tests have supported the present models. The study presented herein has made it possible to predict the large-scale bed topography of meandering sand-silt rivers such as the magnitude and the location of local scour and point-bar deposit.

### 1. 序 論

沖積河川の河道形成過程は流れがその境界形状を変化させ、また境界形状が流れを規定するという相互作用を伴った複雑な現象である。特に蛇行河川では流れが三次元性を帯び、さらに土砂も掃流・浮遊の両形式で輸送されるため、その理論的取扱いは河川水理学上最も困難な研究課題の1つとされてきた。

このような相互作用を取り扱った研究として Englund<sup>1)</sup> の先駆的研究が挙げられる。Englund は蛇行水路内の平面二次元流れを近似的に解き、掃流砂の移動方向を考慮して安定河床形状を求めているが、掃流砂の移動方向を算定する際に用いられた二次流の見積りとせん断力の効果に関する仮定が単純すぎ、正確に河床形状を算定することが困難であると考えられる。また、流送土砂の大部分を占める浮遊砂の効果が取り入れられていない。Gottlieb<sup>2)</sup> は蛇行振幅が小さい場合について平坦河床の三次元流速解を導き、これから河床形状を求めている。長谷川<sup>3)</sup> は任意の平面形状を有する蛇行水路につい

て平面二次元流れの流速分布および河床形状をフーリエ級数展開を行い、それらの係数や位相差を実験値から詳しく検討しているが、流砂方向を決定する係数が未知量として残されている。一方、実験水路においては Hooke<sup>4)</sup> が底面せん断力、掃流砂量や河床形状を詳細に測定している。実河川においては Jackson<sup>5),6)</sup>、Dietrich・Smith・Dunne<sup>7)</sup> が流速分布、河床形状や流送土砂量を測定しているが、中でも Jackson の観測は綿密で、二次流の構造、河床構成材料の粒径分布等についても報告しており、沖積蛇行河川の流れの構造と土砂輸送機構の解明に貢献している。

以上のような研究例が挙げられるものの、蛇行水路内の流れと河床の相互作用を取り扱った研究はまだ少なく、二次流の構造や浮遊土砂の効果等不明の点が多く残されている。

本研究では蛇行水路内の三次元流れについて理論解析を行い、この結果を用いて蛇行水路内の掃流・浮遊土砂量を算定し、流砂の連続式から安定平衡河床形状を求める。これらの結果は蛇行風路や水路を用いた室内実験によって確かめられる。

### 2. 流れの解析

蛇行流路内の流れは一般に二次流や局所的な加速・減

\* 正会員 工博 埼玉大学助教授 工学部建設基礎工学科  
(〒338 浦和市下大久保 255)

\*\* 正会員 工修 建設技術研究所  
(〒103 中央区日本橋本町 4-2 第9中央ビル)

速を伴う複雑な三次元乱流であり、乱れの構造も場所的に変化することが観測されている<sup>8)</sup>。このような複雑な流れを十分正確に表現するには、 $k-\epsilon$ モデルなどの乱流モデルを用いることが必要となるが<sup>8),9)</sup>、このような手法は大がかりな数値計算を伴うために流れと河床間の相互作用を理論的に取り扱うには適さないものである。したがって、本研究では流れの本質を損なわない程度に方程式を簡略化し、流れを水深方向に平均した平面二次元流成分と水深方向に平均すれば0となる二次流成分に分離して取り扱うこととした。以下にこれらの解析法を述べる。

(1) 平面二次元流

水路幅  $B$ 、水路中心線の曲率半径  $R$ 、平均水深  $H$ 、平均水面勾配  $S$  を有する蛇行水路を考える。このとき、解析に際して以下の仮定を設ける。(a) 側壁は鉛直で非浸食性である。(b)  $B$  は  $H$  に比べて十分大きい。(c)  $R$  は  $B$  に比べて十分大きい。すなわち、 $\nu=B/R \ll 1$  である。

このような流れを支配する浅水流方程式は図-1 に示される  $s, n$  曲線座標系を用いれば次式で表わされる。

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} + \frac{\bar{u}\bar{v}}{r} = gS - g \frac{\partial \xi}{\partial s} - \frac{\tau_s}{\rho h} \dots\dots\dots(1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} - \frac{\bar{u}^2}{r} = -g \frac{\partial \xi}{\partial n} - \frac{\tau_n}{\rho h} \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{\bar{v}h}{r} + \frac{\partial \bar{v}h}{\partial n} + \frac{R}{r} \frac{\partial \bar{u}h}{\partial s} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 $\bar{u}, \bar{v}$  :  $s, n$  方向の鉛直平均流速成分、 $r=R+n$  : 局所曲率半径、 $g$  : 重力の加速度、 $\xi$  : 水面の上昇量、 $\rho$  : 流体の密度、 $h$  : 局所水深、 $\tau_s, \tau_n$  :  $s, n$  方向の底面摩擦力成分である。 $\tau_s, \tau_n$  は抵抗係数  $C_f$  を用いて次のように表現できる。

$$\tau_s = \rho C_f \bar{U} \bar{u}, \quad \tau_n = \rho C_f \bar{U} \bar{v} \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 $\bar{U} = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$ 、 $C_f = gHS/U^2$ 、 $U$  : 断面平均流速である。

水理量を断面平均成分と曲率に起因する摂動成分に分ける。

$$\bar{u} = U + u', \quad \bar{v} = v' \dots\dots\dots(5)$$

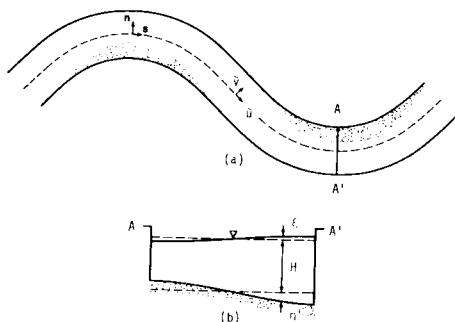


図-1 座標系および記号の定義

$$h = H + \xi' + \eta' \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 $\xi' = \xi$ 、 $\eta'$  : 平均河床面からの掘れを表わす。

式(1)、(2)、(3)を  $\nu$  で展開すれば以下の結果を得る。

オーダー0に対して

$$C_f U^2 = gHS, \quad UH = \text{一定} \dots\dots\dots(7)$$

式(2)はオーダー  $\nu$  に対して

$$\frac{U^2}{R} = g \frac{\partial \xi'}{\partial n} \dots\dots\dots(8)$$

となる。オーダー  $\nu^2$  に対して式(1)、(3)は次の関係を有する。

$$U \frac{\partial u'}{\partial s} = -g \frac{\partial \xi'}{\partial s} - C_f \frac{U^2}{H} \left( 2 \frac{u'}{U} - \frac{\xi'}{H} - \frac{\eta'}{H} \right) \dots\dots\dots(9)$$

$$H \left( \frac{\partial u'}{\partial s} + \frac{\partial v'}{\partial n} \right) + U \frac{\partial (\xi' + \eta')}{\partial s} = 0 \dots\dots\dots(10)$$

式(8)は積分されて、境界条件、 $n=0$  で  $\xi'=0$ 、から

$$\xi' = \frac{U^2}{gR} n \dots\dots\dots(11)$$

となる。

以上の方程式系を閉じるには  $\eta'$  が与えられねばならないが、本来  $\eta'$  は水路平面形の曲率に起因するものであるから、平面形状が規定されねばならない。蛇行河川の水路中心線の平面形状は池田・Parker・澤井<sup>10)</sup>によって導かれた蛇行方程式から理論的に第1近似解が

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} \cos ks \dots\dots\dots(12)$$

と与えられる<sup>11)</sup>。ここに、 $R_0$  : 最小曲率半径であり、 $s$  は蛇行頂点を含む断面を原点としている。式(12)はいわゆる sine-generated curve である。 $\eta'$  として吉川・池田・北川<sup>12)</sup>による一様湾曲水路の結果を第1近似として用いると

$$\frac{\eta'}{H} = \left( \frac{r}{R} \right)^A - 1 \dots\dots\dots(13\cdot a)$$

または、近似して

$$\frac{\eta'}{H} = A \frac{n}{R} \dots\dots\dots(13\cdot b)$$

となる。ここに

$$A = \left( \frac{3}{4} \frac{\mu C_b}{1 + \alpha \mu} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{x} \frac{U_*}{\sqrt{R_s g d}} \left( \frac{4.167}{\sqrt{C_f}} - 6.600 \right) \dots\dots\dots(14)$$

であり、 $C_b$  : 河床にある砂粒に作用する流体力の抗力係数、 $\mu$  : 動摩擦係数、 $\alpha$  : 揚力係数と抗力係数の比、 $U_* = \sqrt{gHS}$ 、 $x$  : カルマン定数 (=0.4)、 $R_s$  : 砂粒の水中比重 (=1.65)、 $d$  : 砂粒の粒径である。吉川・池田・北川<sup>12)</sup>は以上の係数を  $\mu=0.43$ 、 $C_b=0.4$ 、 $\alpha=0.85$ 、 $\lambda=0.59$  と見積っている。式(13-b)および(14)は横断方向の河床勾配が粒子フルード数、 $U_*/\sqrt{R_s g d}$ 、とともに増加することを示しているが、この結果は河川の実測値から支持されており<sup>13)</sup>、 $A$  の値が砂粒子の水中静

止摩擦角によってのみ決定されるとする Engelund<sup>11)</sup> の仮定に比べてより正確である。

以上から、式 (11), (12) および (13・b) を式 (9) に代入し、 $u'$  について次の結果を得る。

$$\frac{u'}{U} = \frac{n}{R_0} (a \sin ks + b \cos ks) \dots\dots\dots (15)$$

ここに

$$a = \frac{C_f k H (A + F_1^2 + 2)}{4 C_f^2 + (kH)^2} \dots\dots\dots (16)$$

$$b = \frac{2(A + F_1^2) C_f - (kH)^2}{4 C_f^2 + (kH)^2} \dots\dots\dots (17)$$

であり、 $F_r = U/\sqrt{gH}$  : フルード数である。 $v'$  については式 (11), (12), (13・b) および (15) を式 (10) に代入し、 $n = \pm B/2$  で  $v' = 0$  を考慮して

$$\frac{v'}{U} = \frac{k R_0}{2} \frac{R}{r} \frac{H}{h} [a \cos ks - (b + A + F_1^2) \sin ks] \times \left[ \left( \frac{B}{2 R_0} \right)^2 - \left( \frac{n}{R_0} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (18)$$

となる。以上の  $u'$  と  $v'$  の結果は Engelund の第 2 近似解に対応するものであるが、ここでは式の展開をより明確にした。なお、池内・玉井<sup>14)</sup> は  $v$  に関する展開についてより厳密な議論を行っているが、河床が横断方向に傾きをもつ場合には式 (15) および (18) で表わされる解で流れの場を十分正確に表現し得ることが報告されているので<sup>14)</sup>、後の理論展開を容易にし、式が複雑になることを防ぐために以上の結果を採用する。

(2) 二次流

一樣湾曲水路内の十分に発達した二次流は従来から比較的よく検討されているが、蛇行水路内の二次流については研究例も少なく、ほとんどが数値解であり、ここで行おうとしているような理論展開には適さないものである。底面付近における流速の大きさと方向は流砂量およびその方向に大きな影響を与え、ひいては河床形状を決定する重要な要素であるので十分正確に見積られねばならない。以上のような要求を満足させるために、本研究では二次流について以下のような定式化を行った。

二次流に関する渦度方程式を用いて、主要項のみを残せば蛇行水路内の二次流に関する支配方程式は次のようになる。

$$u \frac{\partial \Omega}{\partial s} - \frac{2}{r} u \frac{\partial u}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 $u$  :  $s$  方向の流速成分、 $\Omega = \partial v' / \partial z$ 、 $v'$  : 二次流の  $n$  方向成分 ( $z$  方向成分  $w'$  は  $H/B \ll 1$  の仮定から無視されている)、 $\epsilon$  :  $z$  方向に一定の渦動粘性係数である。一樣湾曲水路の場合 ( $\partial/\partial s = 0$ ) には式 (19) の左辺第 1 項は 0 となり、吉川・池田・北川<sup>12)</sup> が用いた方程式と一致する。この場合の解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{v''}{U} &= f^2 \left( \frac{\tilde{u}}{U} \right)^2 \frac{h}{x r} \left[ F_1(\eta) - \frac{\sqrt{C_f}}{x} F_2(\eta) \right] \\ &= f^2 \left( \frac{\tilde{u}}{U} \right)^2 \frac{h}{x r} F(\eta) \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

ここに、 $F_1(\eta) = -15(\eta^2 \ln \eta - \eta^2/2 + 15/54)$ 、 $F_2(\eta) = 15(\eta^2 \ln^2 \eta - \eta^2 \ln \eta + \eta^2/2 - 19/54)/2$ 、 $F(\eta) = F_1(\eta) - \sqrt{C_f} F_2(\eta)/x$ 、 $\eta = 1 + z/h$ 、 $z$  : 水面から鉛直上向きにとった座標、 $f$  : 水路中央部では 1、側岸で 0 となる関数で、 $u$  が側岸で 0 となる条件 (ノン・スリップの条件) および  $v''$  が側岸を横切らない条件を満足させるために導入されている。仮定された  $f$  の分布形を図-2 に示す。式 (20) を導くに際しては  $u$  の分布形として  $z$  方向に速度欠損則を用いた次式を採用している。

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_*} &= f \frac{\tilde{u}}{U} \left[ \frac{U}{U_*} + \frac{1}{x} (\ln \eta + 1) \right] \\ &= f \frac{\tilde{u}}{U} \left[ \frac{1}{\sqrt{C_f}} + \frac{1}{x} G(\eta) \right] \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここに、 $G(\eta) = \ln \eta + 1$  であり、 $\tilde{u}/U = 1 + u'/U$  は式 (15) から与えられる。ここで、以降で進められる議論を容易にするために  $F_1(\eta)$  および  $F_2(\eta)$  をベキ級数で以下のよう近似する。

$$F_1(\eta) = -12.056 \eta^3 + 14.997 \eta^2 + 4.6096 \eta - 4.2898$$

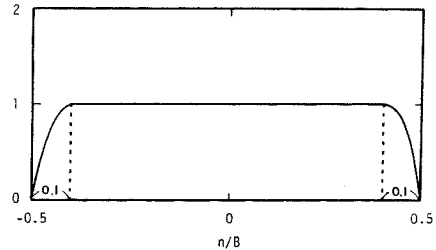


図-2  $f$  の分布形

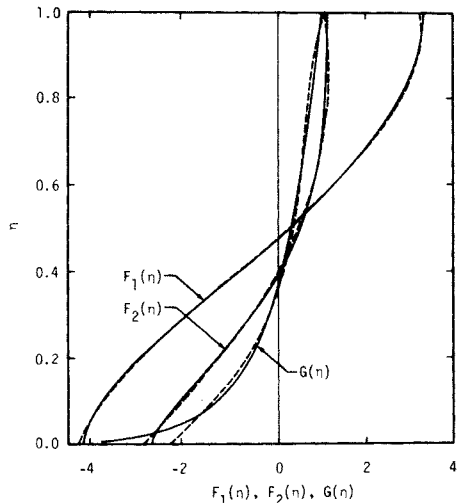


図-3  $F_1, F_2, G$  の関数形と近似式 (破線)

$$\dots\dots\dots(22)$$

$$F_2(\eta) = -5.3100 \eta^2 + 9.1436 \eta - 2.8018 \dots\dots\dots(23)$$

厳密解(実線)と近似式(破線)の比較を図-3に示す。両者はよく一致していることが知られる。

さて、蛇行水路の二次流を支配する方程式(19)の解として、式(20)を変形した以下のような相似解を仮定する。

$$\frac{v''}{U} = f^2 \left( \frac{\bar{u}}{U} \right)^2 \frac{h}{xr} \chi F(\eta) \frac{R}{R_0} \cos(k s - \sigma) \dots\dots\dots(24)$$

ここに、 $\chi$ ：蛇行水路の二次流が一樣湾曲水路の二次流に比べて十分に発達しないために導入された係数、 $\sigma$ ：二次流が蛇行水路中心線の平面形に対してもつ位相遅れである。したがって、一樣湾曲水路では $\chi=1, \sigma=0$ であり、かつ式(12)から $R \cos ks / R_0 = 1$ であるので、式(24)は式(20)に帰着される。 $\chi$ および $\sigma$ を水路中心( $r=R$ )で見積ることとすれば、式(19)は次のように簡化される。

$$U \frac{\partial \Omega}{\partial s} - \frac{2}{R} U \frac{\partial u}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \dots\dots\dots(25)$$

$r=R$ では $f=1, \bar{u}/U=1, h=H$ であることなどに注意して、式(24)を式(25)に代入すれば、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} & -\chi k U^2 \frac{H}{R_0} \sin(k s - \sigma) - 2 \frac{U U^*}{x R_0} \frac{dG}{dz} \cos ks \\ & = \varepsilon \chi \frac{U H}{x R_0} \frac{d^3 F}{dz^3} \cos(k s - \sigma) \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

式(26)を $\sin ks$ と $\cos ks$ を含む項で展開すれば、 $s$ に無関係に恒等的に成立しなければならない条件から次式が成立する。

$$k U \frac{dF}{dz} \cos \sigma + \varepsilon \frac{d^3 F}{dz^3} \sin \sigma = 0 \dots\dots\dots(27)$$

$$\begin{aligned} & \chi k U H \frac{dF}{dz} \sin \sigma - 2 U^* \frac{dG}{dz} - \chi \varepsilon H \frac{d^3 F}{dz^3} \cos \sigma = 0 \\ & \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

以上から $\chi$ および $\sigma$ は

$$\chi = \frac{2 \frac{dG}{dz}}{k H \frac{U}{U^*} \frac{dF}{dz} \sin \sigma - \frac{\varepsilon}{U^* H} \frac{d^3 F}{dz^3} \cos \sigma} \dots\dots\dots(29)$$

$$\sigma = \tan^{-1} \frac{-k H \frac{dF}{dz}}{\frac{\varepsilon}{U^* H} \frac{d^3 F}{dz^3}} \dots\dots\dots(30)$$

と求められる。ここに、誘導に際しては $d/dz = d/Hd\eta$ などの関係を用いている。式(29)、(30)は $\chi, \sigma$ が $z$ 方向に変化することを示しているが、ここでは支配方程式の精度などを考慮して $z$ 方向に一定値として考えることとする。したがって、 $dF/d\eta, dG/d\eta$ については $z$ 方向の平均値を用いる。 $d^3F/d\eta^3$ については式(22)

および(23)から一定値となる。 $\varepsilon$ については次のように考える。一樣湾曲水路( $kH=0$ )では前述のように $\chi=1, \sigma=0$ であり、式(29)、(30)においてこの条件を満足するように $\varepsilon$ を求めれば $\varepsilon = U^* H / 10.8$ となる。この値は池田・田中・千代田<sup>7)</sup>が蛇行風路で得た値、 $\varepsilon \doteq U^* H / 10$ 、と測定誤差の範囲内程度で一致しており、妥当な値であると判断される。以上の考察から式(29)、(30)はそれぞれ次のようになる。

$$\chi = \frac{1}{k H \left( \frac{1.11}{\sqrt{C_f}} - 1.42 \right) \sin \sigma + \cos \sigma} \dots\dots\dots(31)$$

$$\sigma = \tan^{-1} \left[ k H \left( \frac{1.11}{\sqrt{C_f}} - 1.42 \right) \right] \dots\dots\dots(32)$$

式(31)および(32)は $\chi$ や $\sigma$ が無次元蛇行波数 $kH$ と抵抗係数 $C_f$ によって決定されることを示しているが、実際河川ではどの程度の値となるかを調べてみる。池田・Parker・澤井<sup>10)</sup>の蛇行理論によれば、沖積蛇行河川の卓越波数は次の値をとることが知られており、実測値をよく説明することが明らかとなっている。

$$kH = 1.5 C_f \dots\dots\dots(33)$$

式(33)を式(31)、(32)に代入すれば、沖積蛇行河川では $\chi, \sigma$ は $C_f$ の関数となる。その関数関係を図-4に示す。 $\chi$ の値は $C_f$ の増加とともに若干減少するが、ほぼ一定値をとると考えてよい。一方、 $\sigma$ の値は $C_f$ の増加とともにかなり増大することが知られる。

式(24)で表わされる蛇行水路の二次流の解は、 $z$ 方向分布を相似と仮定しているために蛇行転向点付近でみられる二次流の二重セル構造を表現できないが、転向点付近では曲率半径が大きいため二次流自体が微弱であり、したがってここで仮定したような分布形で実用上差し支えないと考えられる。式(24)は簡単な形式を有しているうえに、二次流の位相遅れなどを表現でき、理論解析を進めるに際して便利である。

以上によって流れの場を表わすことができたが、結果

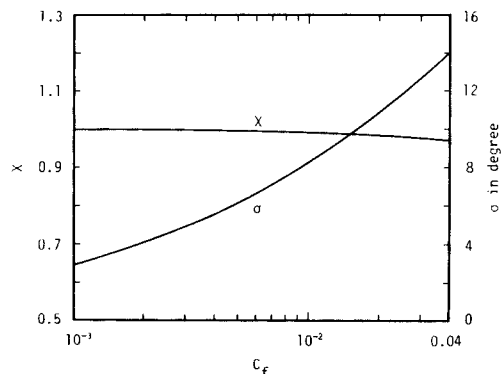


図-4 沖積蛇行河川の $\chi, \sigma$ と $C_f$ の関係



平衡状態にある場合の濃度分布式を準用する。すなわち、浮遊砂濃度  $c$  は

$$c = c_0 \exp \left[ -\frac{v_s}{\epsilon_{sz}} (z+h) \right] \dots\dots\dots(43)$$

と表わされる。ここに、 $c_0$ ：底面近傍の浮遊砂濃度、 $v_s$ ：浮遊砂の沈降速度、 $\epsilon_{sz}$ ： $z$  方向の浮遊砂拡散係数で、ほぼ次式で与えられる値をとる。

$$\epsilon_{sz} = 0.077 u_* h \dots\dots\dots(44)$$

$c_0$  の値については芦田・道上<sup>19)</sup>が多くの測定値をプロットし、図-6 のような結果を得ている。ここでは、これらのデータを比較的良好に表わし、かつ簡便な次式を用いる。

$$c_0 = 2.31 \times 10^{-4} \left( \frac{u_*}{v_s} \right)^{1.60} \dots\dots\dots(45)$$

$s$  方向の単位幅当たり浮遊砂量  $q_{cs}$  は定義から次式で与えられる。

$$q_{cs} = \int_{-h}^0 u c dz \dots\dots\dots(46)$$

$u$  の値としては式 (21) を用いればよいが、積分を簡単にするために、式中の  $G(\eta)$  を次のように近似する。

$$G(\eta) = 6.640 \eta^3 - 13.89 \eta^2 + 10.64 \eta - 2.319 \dots\dots\dots(47)$$

$G(\eta) = \ln \eta + 1$  と近似式 (47) の比較を図-3 に示す。以上から式 (46) を求めれば、次の結果が得られる。

$$\frac{q_{cs}}{Uh} = f \frac{\bar{u}}{U} \Phi_{cs} \dots\dots\dots(48)$$

ここに、 $\Phi_{cs}$  は

$$\begin{aligned} \Phi_{cs} = & c_0 [\psi_1 - \psi_2 \exp(-\omega^{-1}) \omega \\ & + [\psi_3 - \psi_4 \exp(-\omega^{-1})] \omega^2 \\ & + [\psi_5 - \psi_6 \exp(-\omega^{-1})] \omega^3 \\ & + \psi_7 [1 - \exp(-\omega^{-1})] \omega^4] \dots\dots\dots(49) \end{aligned}$$

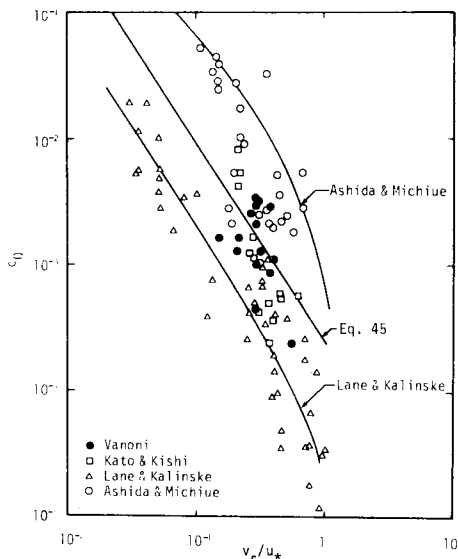


図-6  $c_0$  と  $v_s/u_*$  の関係<sup>19)</sup>

であり、 $\omega = \epsilon_{sz}/v_s h = 0.077 u_*/v_s$ ,  $\psi_1 = 1 - 5.798 \sqrt{C_f}$ ,  $\psi_2 = 1 + 2.678 \sqrt{C_f}$ ,  $\psi_3 = 26.60 \sqrt{C_f}$ ,  $\psi_4 = 6.950 \sqrt{C_f}$ ,  $\psi_5 = -69.45 \sqrt{C_f}$ ,  $\psi_6 = 30.15 \sqrt{C_f}$ ,  $\psi_7 = 99.60 \sqrt{C_f}$  である。 $\Phi_{cs}$  は  $u_*/v_s$  の関数として、 $C_f = 0.01$  の値に対して図-7 に描かれている。

同様に、 $q_{cn}$  は

$$q_{cn} = \int_h^0 c v dz \dots\dots\dots(50)$$

で与えられる。式 (34), (43) を代入し、積分を実行すれば次の結果を得る。

$$\frac{q_{cn}}{Uh} = \frac{v'}{U} \Phi_{cn1} - f^2 \left( \frac{\bar{u}}{U} \right)^2 \frac{h}{\chi R} \chi \frac{R}{R_0} \cos(ks - \sigma) \cdot \Phi_{cn2} \dots\dots\dots(51)$$

ここに、 $\Phi_{cn1}$  および  $\Phi_{cn2}$  は

$$\begin{aligned} \Phi_{cn1} = & c_0 [1 - \exp(-\omega^{-1})] \omega \dots\dots\dots(52) \\ \Phi_{cn2} = & c_0 [\tau_1 \exp(-\omega^{-1}) - \tau_2] \omega \\ & + [\tau_3 \exp(-\omega^{-1}) - \tau_4] \omega^2 \\ & + [\tau_5 \exp(-\omega^{-1}) - \tau_6] \omega^3 \\ & - 72.34 [\exp(-\omega^{-1}) - 1] \omega^4 \dots\dots\dots(53) \end{aligned}$$

であり、 $\tau_1 = 3.260 - 2.580 \sqrt{C_f}$ ,  $\tau_2 = -4.290 + 7.005 \sqrt{C_f}$ ,  $\tau_3 = -1.570 + 3.690 \sqrt{C_f}$ ,  $\tau_4 = 4.610 - 22.86 \sqrt{C_f}$ ,  $\tau_5 = -42.36 + 26.55 \sqrt{C_f}$ ,  $\tau_6 = 15.00 + 13.28 \sqrt{C_f}$  である。 $\Phi_{cn1}$  と  $\Phi_{cn2}$  は同様に  $u_*/v_s$  と  $C_f$  の関数となるが、 $C_f = 0.01$  の場合について関数関係が図-7 に示されている。

以上によって、各流砂量を求めることができたが、これらの式 (36), (37), (48) および (51) はいずれも局所摩擦速度  $u_*$  によって表わされており、この値を見積ることが重要となる。ここでは、式 (4) で表わされる底面せん断力の評価方法に従い、

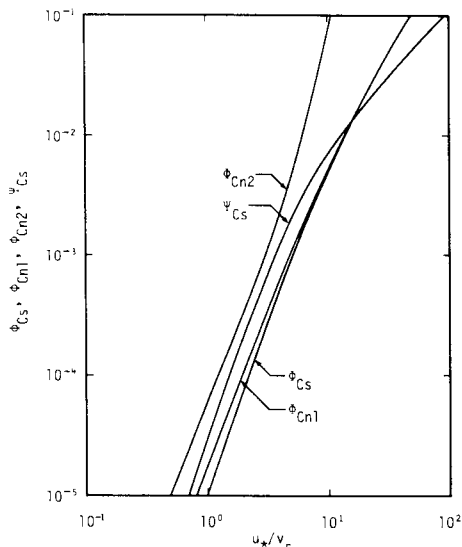


図-7  $\Phi_{cs}$ ,  $\Phi_{cn1}$ ,  $\Phi_{cn2}$ ,  $\psi_{cs}$  と  $u_*/v_s$  の関係 ( $C_f = 0.01$ )

$$u_* = f \frac{\tilde{u}}{U} U_* \dots\dots\dots(54)$$

とした。

5. 河床形状

流砂の連続式 (35) を  $n$  に関して積分すれば、

$$q_{bn} + q_{cn} = -\frac{R}{r} \int \frac{\partial}{\partial s} (q_{bs} + q_{cs}) dn \dots\dots\dots(55)$$

となる。これらの各流砂量式を調べれば、横断方向の河床勾配、 $\tan \theta = \partial \eta' / \partial n$ 、を含んでいるのは式 (37) で表わされる  $q_{bn}$  のみである。式 (37) を式 (55) に代入すれば、

$$\frac{\partial \eta'}{\partial n} = \frac{\frac{R}{r} \int \frac{\partial}{\partial s} (q_{bs} + q_{cs}) + q_{cn} + q_{bs} \tan \delta}{5.38 \sqrt{\frac{\tau_* c}{\tau_*}} q_{bs}} \dots\dots\dots(56)$$

となる。ここで式 (37) 中の  $(1 + \alpha\mu) / \lambda\mu$  は式 (14) の後で与えられた値を用いて 5.38 と計算されている。式 (56) 中の偏微分項、 $\partial(q_{bs} + q_{cs}) / \partial s$ 、は以下のようにして求める。

(1)  $\partial q_{bs} / \partial s$  の値は式 (36) を微分することにより求められるが、式 (36) 中の  $\tau_*$  は式 (54) を用いて求められ、式 (54) 中の  $\tilde{u} / U = 1 + u' / U$  は式 (15) から与えられる。

(2)  $\partial q_{cs} / \partial s$  の値は式 (48) から求められる。式 (48) は局所量  $h$  と  $u_*$  の関数となっているが、 $h$  は式 (6)、(11) および (13・a) から与えられる。ここで式 (56) の右辺では  $\eta'$  の第 1 近似として式 (13・a) で表わされる値を用いていることに注意されたい。このような計算法を採用することによって、式 (56) を積分することがかなり容易となる。

以上から  $\partial(q_{bs} + q_{cs}) / \partial s$  は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(q_{bs} + q_{cs})}{UHk\partial s} &= f \frac{n}{R_0} \left\{ \Psi_{bs} + \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^4 + F_1^2 \frac{n}{R} \right] (\Phi_{cs} + \Psi_{cs}) \right\} \\ &\quad \times (a \cos ks - b \sin ks) \\ &\quad - f \frac{\tilde{u}}{U} \frac{n}{R_0} \left[ A \left( \frac{r}{R} \right)^{4-1} + F_1^2 \right] \Phi_{cs} \sin ks \end{aligned} \dots\dots\dots(57)$$

ここに、 $\Psi_{bs}$  および  $\Psi_{cs}$  は

$$\begin{aligned} \Psi_{bs} &= 33.6 \frac{\sqrt{R_s g d^3}}{UH} f \frac{\tilde{u}}{U} \frac{U_*^2}{R_s g d} \\ &\quad \cdot \frac{(\tau_* + 0.06)(\tau_* - 0.03)^{3.5}}{\tau_*^4} \dots\dots\dots(58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{cs} &= c_0 \{ -\gamma_1 \exp(-\omega^{-1}) + [\gamma_2 - \gamma_3 \exp(-\omega^{-1})] \omega \\ &\quad + [\gamma_4 - \gamma_5 \exp(-\omega^{-1})] \omega^2 + [\gamma_6 - \gamma_7 \exp(-\omega^{-1})] \omega^3 \\ &\quad + \gamma_8 [1 - \exp(-\omega^{-1})] \omega^4 \} \dots\dots\dots(59) \end{aligned}$$

と表わされ、 $\gamma_1 = 26.60 \sqrt{C_r}$ 、 $\gamma_2 = 2.600 - 15.07 \sqrt{C_r}$ 、 $\gamma_3 = 2.600 + 13.91 \sqrt{C_r}$ 、 $\gamma_4 = 95.76 \sqrt{C_r}$ 、 $\gamma_5 = 55.17 \sqrt{C_r}$ 、

$\gamma_6 = -319.5 \sqrt{C_r}$ 、 $\gamma_7 = 238.3 \sqrt{C_r}$ 、 $\gamma_8 = 557.8 \sqrt{C_r}$  である。 $\Psi_{cs}$  は  $u_* / v_s$  と  $C_r$  の関数となるが、 $C_r = 0.01$  の場合に対して関数形が図—7 に示されている。

以上によって、式 (56) の右辺に含まれているすべての項の評価ができた。したがって、式 (56) を  $n$  方向に積分すれば解が得られるが、その際の積分定数は断面平均水深が一定であるという条件を表わす次式から定まる。

$$\frac{1}{B} \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\eta'}{H} dn = 0 \dots\dots\dots(60)$$

式 (56) の右辺を積分するにはその関数形が複雑であることから数値積分が必要となる。実際の計算では、式 (60) の左辺の値が 0.005 以内となるまで、 $n$  方向に繰り返し計算を行った。 $s$  方向の微分量、 $\partial(q_{bs} + q_{cs}) / \partial s$ 、を式 (57) のように表わしたので  $s$  方向への繰り返し計算は不要である。

6. 移動床実験

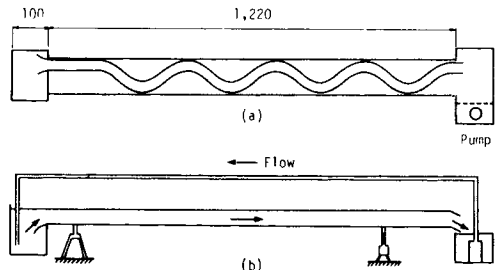
移動床実験は埼玉大学水理工学研究室の蛇行水路を用いて行われた。水路は可変勾配で長さ約 12 m である。その他の詳細は図—8 に示されている。蛇行水路中心線の平面形状は式 (12) に対応して次式で与えられる。

$$\phi = \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{150} s \text{ または } \frac{1}{R} = \frac{1}{68.4} \cos \frac{\pi}{150} s \dots\dots\dots(61)$$

ここに、 $\phi$ ：偏倚角であり、長さの単位は cm である。水路側壁は厚さ 1 mm のアクリル板で高さ 15.5 cm に作製され、水路幅は 30 cm とした。この場合、蛇行長/川幅=10、中心線に沿う最小曲率半径/川幅=2.28 となり、実際河川の平面形状を合理的に反映していると考えられる<sup>20)</sup>。

河床材料として、ほぼ均一な中央粒径  $d = 0.15 \text{ mm}$  の珪砂を用いた。この珪砂は  $R_s = 1.65$ 、 $v_s = 1.8 \text{ cm/s}$  である。

実験に際しては、水路床に厚さ 5 cm に平坦に砂を敷き、その後に通水を行った。浮遊砂を含む水は下流端の水槽に備え付けられた水中ポンプで循環された。水路床形状が平衡状態になるには約 24 時間を要し、顕著な局



図—8 水路形状 (単位は cm)

所洗掘と固定砂州の発生がみられた。水路床高は第3番目の蛇行部について測定した。用いた河床材料が細砂であるので、水路床には必然的に砂漣が発生したが、平滑化は行わないで測定値から河床等高線を描いた。水路床では砂が盛んに浮遊し、輸送されていた。サンプラーで採取し、濃度を測定したところ、深掘れ部の河床付近で100~150 ppm、固定砂州付近で10~20 ppmであった。

以上の実験は1ケースについて行われたが、主な水理条件は次のようである。流量=2.6 l/s,  $H=5.37$  cm,  $S=0.00139$ ,  $U=16.1$  cm/s,  $U_* = 2.70$  cm/s,  $C_f = (U_* / U)^2 = 0.0281$ ,  $F_r = 0.222$ ,  $R_e = UH / \nu = 8650$ 。ここに、 $R_e$  : レイノルズ数である。

7. 理論値と測定値の比較

(1) 流速分布

前述の移動床実験では水路床に砂漣が形成されたために、速度変動や場所ごとの速度の変化が大きく、正確な流速分布の測定が困難であった。したがって、ここでは池田・田中・千代田<sup>8)</sup>が蛇行風路で得た測定値との比較を行う。蛇行風路では床面は平坦であるので  $\eta' = 0$  であり、遠心力による液面の上昇はない(圧力のみ上昇する)ので、式(15)で表わされる平面二次元流の速度分布式の係数、 $a$  および  $b$ , は次のようになる。

$$a = \frac{2 C_f k H}{4 C_f^2 + (k H)^2} \dots\dots\dots (62)$$

$$b = -\frac{(k H)^2}{4 C_f^2 + (k H)^2} \dots\dots\dots (63)$$

風路の諸元および流れの条件、 $k = \pi / 154$   $\text{cm}^{-1}$ ,  $H = 2.5$  cm,  $R_0 = 62.4$  cm,  $U = 530$  cm/s および  $C_f = (29.76 / 530)^2 = 0.00315$ , から  $a, b$  の値を求め、式(15)を用いて  $\bar{u} / U = 1 + u' / U$  を求めた結果が図-9に実線で示されている。図中、測定値は白丸印で示されているが、側壁近傍を除いて速度分布は簡単な平面二次元流の理論でよく説明し得ることがわかる。

次に二次流の理論について検討する。二次流の成分  $v''$  は式(24)から計算されるが、このうち  $\chi$  および  $\sigma$  はそれぞれ式(31)および(32)から求められ、前述の  $kH$  と  $C_f$  の値を用いて

$$\chi = 0.722, \sigma = 43.8^\circ \dots\dots\dots (64)$$

となる。理論値と実測値を水路中心線に沿って比較することとすれば、式(24)において  $f = 1, \bar{u} / U = 1, h = H, r = R, \alpha = 0.4$  であることに注意して、図-10の実線で示される理論値を得る。池田・田中・千代田<sup>8)</sup>は

$v = v' + v''$  に対して  $k-\epsilon$  モデルによる理論値と実測値を比較しているの、ここでは  $v'$  を差し引き、二次流成分  $v''$  のみを取り出しプロットした。いずれの断面においても、実測値の方が同じ程度の割合で理論値よりも小さくなっている。これは二次流によって上下層間の主流の運動量交換が発生し、その結果上下層間の遠心力差が減少して二次流が減少したことにも一因があるが、その効果は水路中央部付近では比較的小さいので<sup>12)</sup>、大部分は二次流の算定に際して用いられた水路の曲率と流れのもつ曲率の相違によると考えられる。すなわち、図-9から明らかであるように、流心は凸岸付近を通過するので、流線の曲率が減少し、その結果二次流の大きさも減少したと考えられる。けれども、このような効果を取り入れて理論を再構成することは式の展開を複雑にし、かつ移動床上の流れでは凹岸側に洗掘が発生することから、流心は移動し、流線の曲率は水路の曲率に近づくと考えられるので修正は行わないこととする。全体として本理論は二次流の位相遅れなどの  $s$  方向の遷移特性をよく表現しており、実用上十分に使用に耐えるものと判断される。

(2) 河床形状

河床形状は式(56)を  $n$  方向に数値積分することに

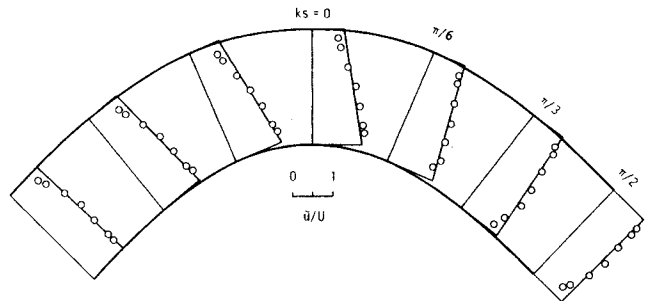


図-9  $\bar{u} / U$  の理論値(実線)と測定値の比較

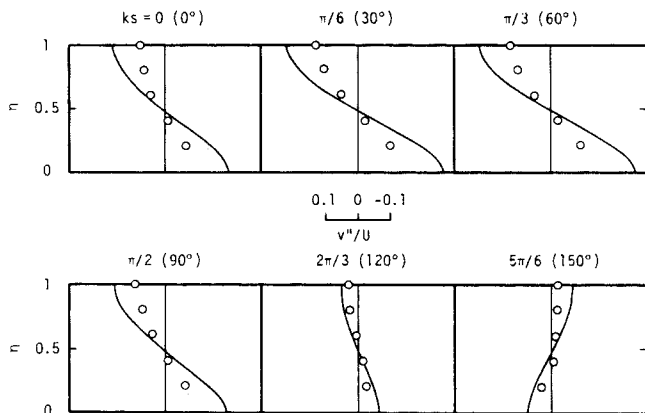
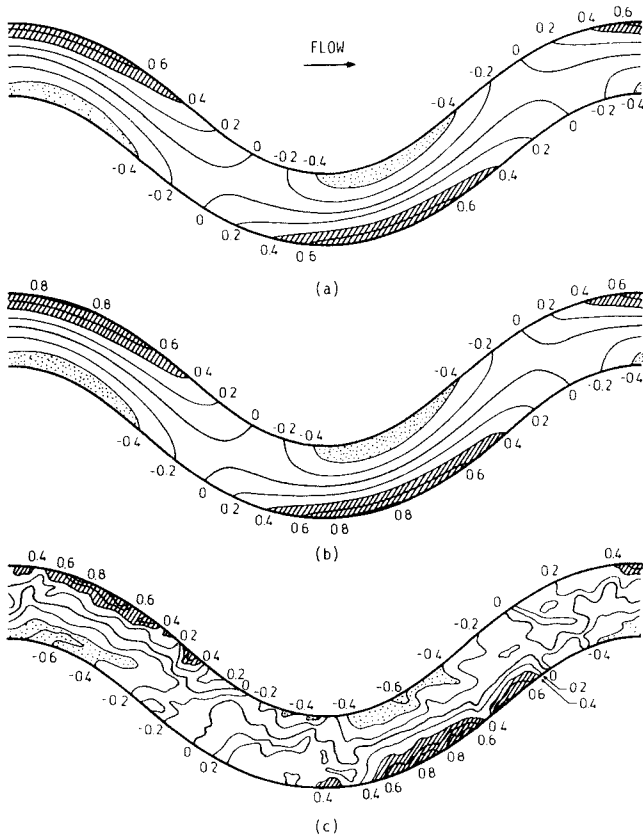


図-10  $v'' / U$  の理論値(実線)と測定値の比較





図一十一 河床等高線 ( $\eta'/H$ ) (a) 浮遊砂の効果を無視した理論値, (b) 浮遊砂の効果を入れた理論値, (c) 測定値

よって求められる。計算に際して与えられなければならない量は (a) 水路の幾何形状に関する量,  $R_0, B, S, k$  (b) 水理量,  $U, U_*, C_f=(U_*/U)^2, H$  および (c) 河床材料に関する量,  $d, R_s, v_s$  である。これらの値はすでに与えられているので, 式 (14), (31) および (32) からそれぞれ  $A=4.54, \chi=0.864, \sigma=30.2^\circ$  と求められる。

図一十一はこれらの値を用いて得られた理論河床形状と実測河床形状を比較したものである。河床形状は  $\eta'/H$  の等高線で示されており, 正の値は洗掘, 負の値は堆積を表わしている。これらの図のうち, (a) は浮遊砂の効果を無視した理論値, すなわち式 (56) において  $q_{cs}=q_{cn}=0$  とおいた場合の理論河床形状である。これに対し, (b) は浮遊砂の効果も含めた理論河床形状である。(c) は実測の河床形状であるが, 河床等高線は砂漣のためにゆがめられている。浮遊砂を含めない場合の等高線 (a) と浮遊砂を含めた場合の等高線 (b) ではその形状に大差はないが, 浮遊砂を含めると最大洗掘深は約 8% 増加した。このことは (a) ではみられない

$\eta'/H=0.8$  の等高線が (b) では現われていないことに具体的にみられる。実測値との適合度は最大洗掘深をより正確に表わしているという点において (b) が優れていると判断される。

全般的に理論値は洗掘や堆積の位置・程度, あるいは河床等高線の上下流間の非対称性をよく表わしており, 本理論の妥当性が確かめられている。

本実験条件では  $\chi, \sigma$  の値は前に述べたような値となり, 一樣湾曲水路の値,  $\chi=1, \sigma=0^\circ$ , から大きくずれている。しかし, 実際河川のスケールでは図一四において代表的な値として  $C_f=0.01$  とすれば,  $\chi=0.99, \sigma=8.3^\circ$  となり, したがって十分に発達した迂曲河道では二次流の値として一樣湾曲の仮定を用いて河床形状を求めても大きな誤差は生じないと考えられる。ちなみに, このような場合には, 式 (56) において  $\partial(q_{bs}+q_{cs})/\partial s \approx 0$  であり, さらに  $\tan \delta$  を表わす式 (41) において  $v'=0, \chi=1, \sigma=0$  となる。このうえにさらに  $q_{cn}=0$  とおけば, 従来から知られている浮遊砂のない一樣湾曲水路の理論<sup>12)</sup>に帰着される。このような一樣湾曲水路の理論を Jackson<sup>5), 6)</sup> が測定した Lower Wabash 川の例に適用したところ, 最大洗掘深に与える浮遊砂の効果は約 10% であり<sup>15)</sup>, 本実験の場合の 8% と大差のない値であった。

## 8. 結 論

蛇行水路における三次元流れの解析法, 浮遊砂を考慮した河床形状の計算法を提案し, これらの理論の妥当性を実験によって確かめた。その結果, 以下の点が明らかとなった。

(1) 蛇行水路の二次流は一樣湾曲水路のそれと比べて十分に発達し得ないために小さく, かつ蛇行平面形状に対して位相遅れをもつ。これらの値は  $kH$  と  $C_f$  の関数として与えられる。

(2) 掃流砂と浮遊砂の連続式から平衡河床形状を規定する方程式を導き, これから得られる河床形状は実測値をよく表現し, 局所洗掘深や固定砂州の位置・大きさなどを予測できることが明らかとなった。河床形状に与える影響は掃流砂が支配的で, 浮遊砂の効果は二次的であることが判明した。

謝 辞: 本研究を進めるに際し, 鈴木裕明氏には実験および河床等高線の作図などのご助力を得た。また,

埼玉大学水理工学研究室の山坂昌成助手には数値計算に際してご援助を頂いた。なお、本研究は文部省科学研究費（課題番号 59020003，代表：岸 力 北海道大学教授）の補助を受けて行われたものである。

#### 参考文献

- 1) Englund, F. : Flow and bed topography in channel bends, *Jour. of Hy. Div., ASCE*, Vol.100, No. HY11, pp. 1631~1648, 1974.
- 2) Gottlieb, L. : Three-dimensional flow pattern and bed topography in meandering channels, Series 11, Tech. Univ. of Denmark, 1976.
- 3) 長谷川和義：蛇行流路における流れと平衡底面形状に関する研究，土木学会論文報告集，第 338 号，pp. 105~114, 1983.
- 4) Hooke, R. L. : Shear-stress and sediment distribution in a meander bend, UNGI-report 30, Univ. of Uppsala, 1974.
- 5) Jackson, R. G. : Velocity-bed form-texture patterns in meander bends in the Lower Wabash River of Illinois and Indiana, *Geol. Soc. of America Bull.* Vol. 86, pp. 1151~1522, 1975.
- 6) Jackson, R. G. : Unsteady flow distributions of hydraulic and sedimentologic parameters across meander bends of the Lower Wabash River, Illinois-Indiana USA, *Proc. Intern. Symp. on Unsteady Flow in Open Channels, BHRA Fluid Engrg.*, pp. G 4 · 35~48, 1976.
- 7) Dietrich, W. E., Smith, J. D. and Dunne, T. : Flow and sediment transport in a sand bedded meander, *Jour. of Geology*, Vol. 87, pp. 305~315, 1978.
- 8) 池田駿介・田中昌宏・千代田将明：空気蛇行流の乱流特性に関する研究，土木学会論文集，第 351 号，II -2, pp. 77~86, 1984.
- 9) Patankar, S. V. and Spalding, D. B. : A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, *Intern. Jour. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 1787~1806, 1971.
- 10) Ikeda, S., Parker, G. and Sawai, K. : Bend theory of river meanders. Part 1. Linear Development, *JFM*, Vol. 112, pp. 363~377, 1981.
- 11) Parker, G., Diplas, P. and Akiyama, J. : Meander bends of high amplitude, *Jour. of Hyd. Engrg., ASCE*, Vol. 110, No. 2, pp. 197~203, 1984.
- 12) 吉川秀夫・池田駿介・北川 明：湾曲水路の河床変化について，土木学会論文報告集，第 251 号，pp. 65~75, 1976.
- 13) Odgaard, A. J. : Transverse bed slope in alluvial channel bends, *Jour. of Hyd. Div., ASCE*, Vol. 107, No. HY12, pp. 1677~1694, 1981.
- 14) 池内幸司・玉井信行：蛇行水路における水深平均流れ場の遷移特性，土木学会論文報告集，第 334 号，pp. 89~101, 1983.
- 15) Ikeda, S. and Nishimura, T. : Bed topography in bends of sand-silt rivers, *Jour. of Hyd. Engrg., ASCE*, Vol. 111, No. 11, pp. 1397~1411, 1985.
- 16) Parker, G. : Hydraulic geometry of active gravel rivers, *Jour. of Hyd. Div., ASCE*, Vol. 105, No. HY5, pp. 1185~1201, 1979.
- 17) Parker, G. : Discussion of lateral bed load transport on side slopes, by Ikeda, S., *Jour. of Hyd. Engrg., ASCE*, Vol. 110, No. 2, pp. 197~203, 1984.
- 18) Parker, G. : Self-formed rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 1. The sand-silt river, *JFM*, Vol. 89, pp. 109~126, 1978.
- 19) 芦田和男・道上正規：浮遊砂に関する研究（1）河床付近の濃度，京都大学防災研究所年報，13-B, pp. 233~242, 1969.
- 20) Hickin, E. J. : The development of meanders in natural river-channels, *American Jour. of Science*, Vol. 274, pp. 414~442, 1974.

(1985. 6. 10・受付)