

# 粗度急変流内部の底面せん断力算定

## ESTIMATION OF BED SHEAR STRESS IN THE FLOW WITH ABRUPT CHANGE OF BED ROUGHNESS

村重 宏\*・松梨史郎\*\*・吉川秀夫\*\*\*

By Hiroshi MURASHIGE, Shiro MATSUNASHI and Hideo KIKKAWA

In natural rivers, there often happen the flows which bed roughness changes abruptly by some reasons. Around the section of abrupt change, river bed or bed protection structures may be scoured or eroded by the action of high shear stress, which is caused by development of the internal boundary layer. There are generally two types of flow, that is, smooth to rough bed flow, and rough to smooth bed flow. It is found that these two types of flow are not of same property, by the results of experiments. Based on some assumptions which are derived from the experimental results, bed shear stress and internal boundary layer thickness can be calculated by applying the momentum equation to the control volume of internal boundary layer. This method can simulate the flow conditions in the wind tunnel and open channel.

### 1. 序 論

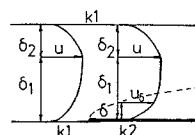
河川においては、水門のエプロン、床固め工、護岸等を施したため、河床や側壁の粗度が急変する、いわゆる粗度急変流となる。粗度急変流においては、粗度急変点近傍で極端な洗掘が生じることが多い。こうした洗掘は河川構造物の安全性に大きな影響を及ぼし、ひいては災害を引き起こしかねない。したがって、洗掘の主因である、流れの河床および河岸に及ぼすせん断力の評価は、災害防止の観点からも大きな意味をもつといえる。

過度の洗掘は、流れが過大なせん断力を河床に及ぼしているためであるが、この原因は、粗度急変点から新たな境界層が発達するためであると考えられる。ここでいう境界層とは、内部境界層とよばれるもので、概念的には、図-1のように示される。すなわち、ある粗度をもつ底面上で十分に境界層の発達した流れ（この境界層を外部境界層ともいう）が、異なった粗度をもつ底面上に流入、流下するにつれ、底面から、新たな粗度に対応した流速分布形が生じてくる。ここでは、新たな粗度の影

響の及んでいる範囲を内部境界層として定義する。

内部境界層について、開水路流れの場合には、吉川・石川ら<sup>1)</sup>が、また、地上の大気の流れに関しては Elliot<sup>2)</sup>らが研究を行い、理論的に内部境界層の発達を解析している。また、Antonia & Luxton<sup>3),4)</sup>は、風洞において粗度急変流の内部機構を実験的に調べている。一方で A. A. Townsend<sup>5)</sup>は、Self-preserving Flow として、内部機構を理論的に解析しているが、内部境界層やせん断力の評価までには至っていない。

著者らは、これらの研究の成果を踏まえて、内部境界層をコントロール・ボリュームとした運動量方程式を考え、若干の仮定のもとに、境界条件を与えてこの式を解くことにより、内部境界層厚さ  $\delta$  および底面せん断力  $\tau_0$  の算出を試み、その妥当性を実験により検討した。ここで得られた成果は、内部境界層問題に1つの解を与



$\delta$  : Internal Boundary Layer  
 $\delta_1$  : Outer Boundary Layer  
 $\delta_2$  : Boundary Layer From Upper Boundary

図-1 内部境界層の概念

\* 正会員 工修 電源開発(株)

\*\* 正会員 工修 電力中央研究所

\*\*\* 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科

(〒160 新宿区大久保 3-4-1)

えるのみでなく、実河川において、河床の粗度が急変する流れの水面形を算定することを可能にし、また、河岸（側壁）の粗度の急変する流れの壁面せん断力を評価できるようにし、護岸の上下流における洗掘予防の観点からも有益であると考え。

2. 実験概要

粗度急変流の代表的な2つのパターンとして、図-1に示すように、上流側底面粗度を  $k_1$ 、同じく下流側を  $k_2$  とするとき

- ①  $k_1 < k_2$  の粗度急変流
- ②  $k_1 > k_2$  の粗度急変流

の2つがある。風洞および開水路において、①、②の流れをつくり、風洞においてはX型プローブのホットワイヤにより、風洞内中央測線上で流速および乱れを数断面にわたって測定した。開水路においてはピトー管により流速を測定した。

本研究においては、①、②の流れの代表的なものとして、①では滑面→粗面の粗度急変流、②では粗面→滑面の粗度急変流を扱う。ここでいう滑面は水理学的滑面ではなく、粗面に対して滑らかという意味である。

風洞実験においては粗面としてガラス玉（径8mm、16mmの2種）を敷きつめたもの、滑面として表面にペンキを塗ったベニヤ板を用いた。粗面および滑面の相当粗度は等流状態での流れの実測より定めた。

開水路実験においては粗度として径16mmの半球および球を敷きつめたものをそれぞれ用い、滑面としてアクリル板を用いた。

実験に用いた風洞は、幅  $B=38$  cm、高さ  $H=40$  cm、長さ  $L=12$  mの鋼製のもので、側壁はアクリル製、上面はベニヤ板である。開水路は  $B=40$  cm、 $H=35$  cm、 $L=10$  mで、可変勾配の鋼製水路である。

粗面の鉛直方向の高さの基準は粗度要素の頂上から  $k/30$  だけ下にとり、滑面では板面にとっている。なお、本実験では粗、滑面の接続は両者の基準面高さを揃える

表-1 実験条件（風洞）

RUN	$k_1$ (cm)	$k_2$ (cm)	$\delta_1$ (cm)	$u_1$ (cm/s)	$u_{*1}$ (cm/s)
1	0.019	0.502	20.8	1640	56.6
2	0.019	1.003	20.6	1720	57.5
3	1.003	0.019	22.6	1580	83.4

表-2 実験条件（開水路）

RUN	$k_1$ (cm)	$k_2$ (cm)	$q$ (cc/s)	$h_{m2}$ (cm)	$l_0$
W1	0.019	1.003	463.6	8.50	0.005
W2	0.730	0.019	503.8	4.87	0.006
W3	1.003	0.058	662.7	5.49	0.007

ようにした。ここに、 $k$  は相当粗度を表わす。

風洞実験の実験条件を表-1に、開水路実験の条件を表-2に示す。

ここに、 $\delta_1$ ：外部境界層厚

$u_1$ ： $y=\delta_1$ における流速

$u_{*1}$ ：上流側底面における摩擦速度

$k_1$ ：上流側底面相当粗度

$k_2$ ：下流側底面相当粗度

$q$ ：単位幅当たりの流下流量

$h_{m2}$ ： $k_2$ 上の等流水深

$l_0$ ：水路床勾配

3. 流れの諸特性

粗度急変流の特性は Antonia & Luxton<sup>3),4)</sup> によって調べられており、ここで改めて述べる必要はない。ここでは、後述の計算を行うために必要なくつかの仮定の根拠となるものについて説明する。

(1) 流速分布

図-2に風洞における流速分布の一例を示す。この図から、外部境界層厚さ  $\delta_1$  および  $\delta_1$  における流速  $u_1$  は流下方向  $x$  にほとんど変化しないことがわかる ( $x=0$  は粗度急変点を示す)。平板上の境界層の発達式からも、十分に境界層が発達した場合、流下方向に境界層厚の変化が少なくなることから当然であり、内部境界層の発達はそれより外側の外部境界層にほとんど影響を与えないことが知られる。また、底面近傍では明らかに  $k_2$  による流速分布の変形が生じていることがわかる。

このことは、図-3のように片対数のグラフで流速分布を示すと、さらに明瞭になる。粗度急変点から下流では明らかに2本の直線の組合せの流速分布を示す。すな

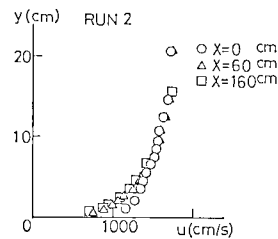


図-2 流速分布の一例

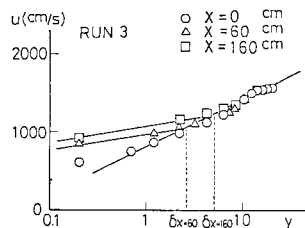


図-3 流速分布の片対数表示

わち、 $k_1$  上で十分に境界層が発達した流れが下流に進むにつれ、 $k_2$  による新しい流速分布形をもつ流れへと遷移することを意味する。前述のとおり、流速分布が  $k_2$  の影響を受ける領域を内部境界層と定義するので、図-3の2本の直線の交点を内部境界層厚さ  $\delta$  として定められる。

以上のことから、流速分布形は、 $y \geq \delta$  の領域では、上流の流速分布が下流にそのまま保存され、Townsend<sup>2)</sup> のいうように、 $\delta$  が  $\delta_1$  に比べて小さい範囲では流速分布の self-preserving 性が成立していることが知られる。

(2) Reynolds 応力分布

図-4, 5 に  $k_1 < k_2$  および  $k_1 > k_2$  の場合の深さ方向の  $-\overline{u'v'}$  の分布を示す。

滑面から粗面に流入する流れ ( $k_1 < k_2$ ) においては、滑面から粗面に流入後底面近傍の  $-\overline{u'v'}$  の分布は右側に大きく折れ曲がることになる。これは底面せん断力が粗面へ流入直後急に増大するためである。この折れ曲がり点の位置は前述の流速分布形の折れ曲がり点の位置とほぼ一致しており、この位置を内部境界層厚さ  $\delta$  としてよい、このことから、 $\delta$  は粗面により新たに生成される渦の  $y$  方向の到達限界であり、 $y \geq \delta$  の範囲ではせん断力分布についても self-preserving 性の仮定は妥当であることがわかる。

$k_1 > k_2$  の場合は粗面から滑面に流入後内部境界層内の  $-\overline{u'v'}$  の分布は一様に近いことが知られる。これは底面せん断力が粗面上に比べて滑面上で減少することによる。 $k_1$  上では  $y$  方向には底面の影響により壁法則が成立しているが、 $k_2$  上に流れが入ると  $k_1$  上で底面より

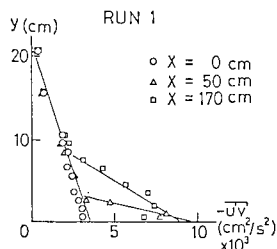


図-4  $k_1 < k_2$  の流れの Reynolds 応力分布

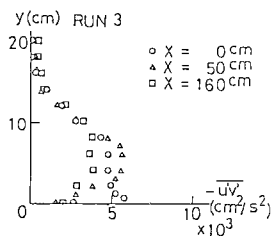


図-5  $k_1 > k_2$  の流れの Reynolds 応力分布

生じた渦よりも弱い渦しか発生しないため、 $\delta$  の位置の  $\tau_0$  が底面付近の流れを引きずるようになる。したがって、内部境界層についてせん断力分布は上層より下層に向かって減少、あるいは一様分布となる。しかし、前項で述べたように流速分布は外部境界層ではほとんど下流方向に変化せずにその形を保ち、また内部境界層内でも対数分布法則が成立している。

したがって、後述する  $\delta$ ,  $\tau_0$  の算定において、 $k_1 < k_2$  の流れと  $k_1 > k_2$  の流れは別個に取り扱う必要がある。

4. 内部境界層および底面せん断力の算定

急変流内部の底面せん断力の算定についてはいくつかの研究が行われている<sup>6),7)</sup>。これらはポテンシャル流れの中に境界層が発達するものが大部分で、いずれも外部のポテンシャル流れと Kármán の運動量方程式をもとにしたものである。

しかし、本研究のように上流側で十分に境界層が発達した流れの中に生ずる内部境界層を扱う場合、このような算定法は実現象を十分に表現するものとはいえない。そこで、以下に示すように内部境界層をコントロール・ボリュームとする運動量方程式を導き、 $\delta$ ,  $\tau_0$  の算定を試みた。

(1) 運動量方程式

図-6 に示すように、 $dx$  区間の内部境界層をコントロール・ボリュームとする運動量方程式を考える。

定常・二次元の流れを考え、 $x$  方向の流速を  $u$ ,  $y$  方向の流速を  $v$  とすると、 $x$  方向の運動量方程式は次のようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $p$  は圧力、 $\epsilon$  は渦動粘性係数である。

一方、連続式は次式で示される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

式 (1) を  $0 \leq y \leq \delta$  の範囲にわたって積分すると、

$$\int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta v \frac{\partial u}{\partial y} dy = -\frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\partial p}{\partial x} dy + \int_0^\delta \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \dots\dots\dots (3)$$

となり、式 (2) の関係を用い、境界条件は  $y = \delta$  で  $u = u_\delta$ ,  $\tau = \tau_\delta$ ,  $y = 0$  で  $\tau = \tau_0$  であり、また、図-4より

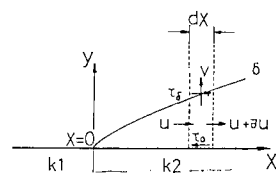


図-6 コントロール・ボリューム

$\tau$  の分布が  $y$  方向に直線分布であることが知られているので、次のように書くことができる。

$$-\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u(u_\sigma - u) dy + \frac{du_\sigma}{dx} \int_0^\delta u dy = -\frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\partial p}{\partial x} dy + \frac{\tau_\sigma - \tau_0}{\rho} \dots (4)$$

ここで、上式の右辺第2項は  $du_\sigma/dx$  が大きいところでは  $\int_0^\delta u dy$  が非常に小さく、 $\int_0^\delta u dy$  の大きいところでは  $du_\sigma/dx$  が小さいので、本論文では他の項に比して無視できるものと仮定する。

このとき、 $0 \leq y \leq \delta$  の流速分布がベキ乗則に従うものとすれば、

$$u = u_\sigma \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \dots (5)$$

で表われ、運動量方程式は次式のようになる。

$$-\frac{2n}{(n+1)(n+2)} u_\sigma \cdot \delta \cdot \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} - \frac{n}{(n+1)(n+2)} u_\sigma^2 \cdot \frac{\partial \delta}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\partial p}{\partial x} dy + \frac{\tau_\sigma - \tau_0}{\rho} \dots (6)$$

ここで、式(5)が比較的精度がよく、かつ  $n$  の値および  $\int_0^\delta \partial p / \partial x \cdot dy$  の値が推定できれば、 $\tau_0$  および  $\delta$  を式(6)により計算することができる。しかし、 $\partial p / \partial x$  については以上の検討結果より決めることができないので、流れの力学的関係をできるだけ単純に、かつできるだけ上記の検討結果と矛盾の少ない関係式で近似のとらえることを考え、これにより  $\partial p / \partial x$  の近似値を求め、それにより  $\tau_0$ 、 $\delta$  の近似値が式(6)により得られるので、その近似値をも利用してこの関係の精度を上げることに、 $\partial p / \partial x$  を求め、このような逐次近似の方法で  $\tau_0$ 、 $\delta$  を求めるを試みる。したがって、風洞の空気流、開水路流れではそれぞれの流れの特性によく適合するよう異なった関係式が用いられている。

このようにして求められた  $\tau_0$ 、 $\delta$  を実測値と比較して精度よく求められることがわかれば、この方法は実際流れに適用して実用上問題は無いものと考えられる。

(2)  $k_1 < k_2$  の流れについて

前述のように、粗度急変流において  $k_1 < k_2$  と  $k_1 > k_2$  とでは内部境界層内のせん断力分布に相違がある。したがって、式(6)を用いて  $\delta$ 、 $\tau_0$  を算定する際、同じ取り扱いは困難である。ここでは、まず滑面から粗面への流れについて  $\delta$  と  $\tau_0$  の算定法を述べる。

3. で述べたことから、 $k_1 < k_2$  の場合次のようなことがわかる。

- ① 流速分布については self-preserving 性がある。
- ② Reynolds 応力分布についても self-preserving 性がある。

このことから、図-7 に示す流れのモデルを考える。

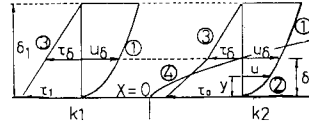


図-7 本計算で考えるモデル ( $k_1 < k_2$ )

上述した特性から、以下の仮定をモデルについてすることは妥当であろう。

① 流速分布は底面の相当粗度により決まり、対数分布則に従うものとする。すなわち、図-7 中で流速分布①、②は次式で表わされる。

$$\text{①: } u = u_{*1} \left(8.5 + 2.5 \ln \frac{y}{k_1}\right) \dots (7)$$

$$\text{②: } u = u_{*2} \left(8.5 + 2.5 \ln \frac{y}{k_2}\right) \quad (y \leq \delta) \dots (8)$$

ここに、 $u_{*1} = \sqrt{\tau_1 / \rho}$ 、 $u_{*2} = \sqrt{\tau_0 / \rho}$

したがって、前述した流れの特性より  $k_2$  の粗度上で次のような流速分布形になる。

$$0 \leq y \leq \delta : \text{式(8)}$$

$$\delta \leq y : \text{式(7)}$$

② 流れの中でのせん断力は  $k_1$  上では直線分布を示し、 $k_2$  上での外部境界層では  $k_1$  上のものと同じとしてよいから、図-7 におけるせん断力分布③は次式で与えられる。

$$\text{③: } \tau = \tau_1 \left(1 - \frac{y}{\delta_1}\right), \quad (y \geq \delta) \dots (9)$$

③ 底面せん断力の算定に内部境界層を問題としない範囲、すなわち内部境界層が外部境界層に比べて小さい範囲では、外部境界層厚さ  $\delta_1$  は流れが粗面 ( $k_2$ ) 上に入っても滑面 ( $k_1$ ) 上における位置はそのまま保たれ、流下方向に一定であるとする。

ここに、 $\tau_\sigma$  は上流側の流れの  $y = \delta$  における  $\tau$  として、また  $u_\sigma$  は同様に上流側流れの  $y = \delta$  における  $u$  として知ることができる。

これらの仮定のもとに、式(6)により  $\delta$ 、 $\tau_0$  を算定する。そのために、式(7)、式(9)より  $\delta$  における流速  $u_\sigma$ 、せん断力  $\tau_\sigma$  を決定する必要がある、これは次式で与えられる。

$$u_\sigma = u_{*1} \left(8.5 + 2.5 \ln \frac{\delta}{k_1}\right) \dots (10)$$

$$\tau_\sigma = \tau_1 \left(1 - \frac{\delta}{\delta_1}\right) \dots (11)$$

また、 $k_2$  上の底面せん断力  $\tau_0$  は式(8)より

$$\tau_0 = \rho u_\sigma^2 / (8.5 + 2.5 \ln (\delta / k_2))^2 \dots (12)$$

で決定される。また、式(10)で  $x$  に依存する項は  $\delta$  しか含まれていないため、次式が成立する。

$$\partial u_\sigma / \partial x = 2.5 u_{*1} \frac{1}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial x} \dots (13)$$

式(11)~式(13)を式(6)に代入し、実測値より  $n=7$  とすると式(6)は次のように書き直される。

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{72}{7u_*^2(1+5u_{*1}/u_*)} \cdot \left\{ \frac{1}{\rho} \int_0^\sigma \frac{\partial p}{\partial x} dy + \frac{\tau_0}{\rho} - u_{*1}^2 \left( 1 - \frac{\delta}{\delta_1} \right) \right\} \dots (14)$$

この式を解くためには、コントロール・ボリューム内の圧力勾配を知る必要がある。

以上がここで用いるモデルの仮定であるが、それぞれの実験問題では実際の条件に応じたより適切な流速分布、粗面での基準高さ等を用いることが必要である。また、式(14)には流速分布のベキ乗則、式(5)を用いているが、もちろん対数分布則を用いても計算することができる。しかし、本実験の場合には  $n=7$  とした場合両者の差はほとんどなく、ベキ乗則を用いる方が計算がより簡単であるために、このモデルではベキ乗則を用いている。

圧力勾配を求めるためには Bernoulli の式を用いるが、そのためには  $\delta$  を知る必要があり、まず  $\delta$  の近似値を与えることにする。そこで、 $k_1 < k_2$  の粗度急変流の実測値から粗面上の  $\delta$  の分布の近似式を推定する。

平板上の境界層厚さの距離的变化は Manning-Strickler の抵抗則を用いると、次式<sup>8)</sup>で与えられる。

$$\frac{\delta}{x} = 0.248 \left( \frac{x}{k} \right)^{-0.25} \dots (15)$$

この式より、 $\delta$  の近似値を求めると図-8の実線のようになり、実測値を近似的に表わすと考えてよい。

なお、 $\delta$  の第一次近似値を求めるためには、条件、状況に応じて式(15)以外の適当な関係式を用いることができる。

したがって、式(15)による  $\delta$  を第一次近似値として、

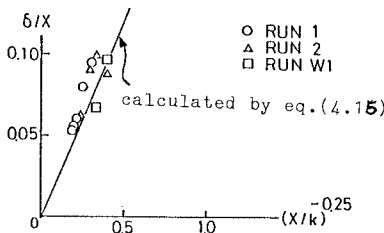


図-8 粗面上の  $\delta$  の分布

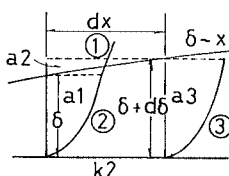


図-9 平均圧力勾配の概念図

図-9のように微小区間  $dx$  の中で得られる流速分布形から平均流速を求め、Bernoulli の定理により、次式で  $y=0$  から  $y=\delta$  までの平均圧力勾配が求められる。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\delta + d\delta)^2} \{ \alpha_2 a_2^3 - \alpha_1 (a_1 + a_2)^2 \} \frac{1}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\tau_0 - \tau_\sigma}{\delta} \dots (16)$$

ここに、 $a_1, a_2, a_3$  は図-9に示す内部境界層の単位幅当たりの流量であり、 $d\delta = \frac{d\delta}{dx} dx$ 、 $\alpha$  はエネルギー補正係数であり、第一次近似計算では  $d\delta=0$  とする。式(14)中の圧力項は  $0 \leq y \leq \delta$  で  $\partial p / \partial x$  の  $y$  方向の平均値であるから、次式により表わされる。

$$\frac{1}{\rho} \int_0^\sigma \frac{\partial p}{\partial x} dy = \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} \delta \dots (17)$$

この段階では  $\tau_0$  が未知のため、第一次近似として式(16)の右辺第2項を0とし、図-10に示すフローチャートに従って粗面 ( $k_2$ ) 上の  $\delta$  の第二次近似値と  $\tau_0$  の第一次近似値を求め、これらの値を用いて再び図-10に従って  $k_2$  上の  $\delta$  と  $\tau_0$  が算定できる。

なお、同図中の  $\delta$  の判定は  $\delta$  の仮定値が同図により計算された  $\delta$  に収束した場合に OK、収束しない場合 NO とする。

風洞実験の Run 1, 2 の計算結果を図-11, 12 に示す。

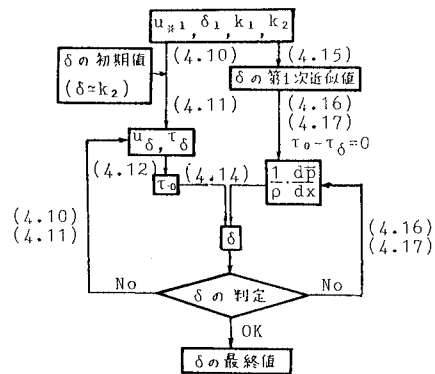


図-10  $\delta, \tau_0$  算定のフローチャート

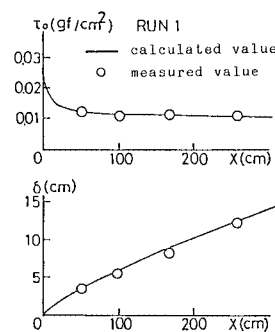


図-11 Run 1 の  $\delta, \tau_0$  算定結果

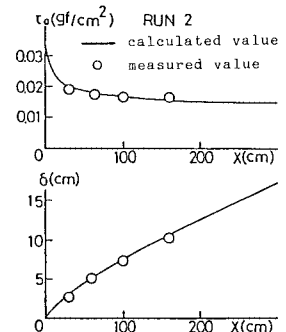


図-12 Run 2 の  $\delta, \tau_0$  算定結果

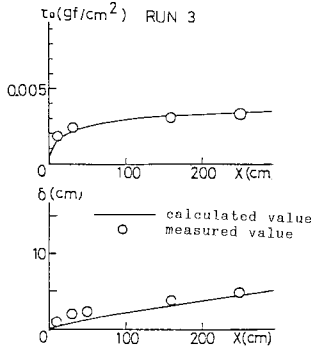


図-13  $\tau_0, \delta$  の算定結果 (Run 3)

これより、計算結果が実測値をよく表現することがわかる。

(3)  $k_1 > k_2$  の流れについて

この場合には  $k_1 < k_2$  の流れとは異なり、図-5 からわかるとおり、 $\tau_0 > \tau_b$  であり、したがって式 (15) は使えないことになる。実測よりみる限りでは内部境界層内で一様せん断力に近い分布をしている。

一方、流速分布は内部境界層内でも対数分布をしており、式 (8) が成立している。

さらに、外部境界層では流速、せん断力ともに self-preserving 性が保たれている。

式 (15) が使えないので、上記の実験結果に基づいて、次の仮定のもとに  $\delta$  の第一次近似値を求め、これを用いて図-10の手順により  $\delta$  と  $\tau_0$  が算定できる。

- ① 第一次近似として  $\tau_0 = 0$  とする。
- ② 第一次近似として  $\partial \bar{p} / \partial x = 0$  とする。
- ③ 外部境界層厚  $\delta_1$  は (2) の場合と同様流下方向に一定とする。

なお、図-10 の手順で第二次近似以降は①、②の仮定は取り去り、それぞれ  $\tau_0$  は流れの上流側の高さ  $y = \delta$  の位置のせん断力  $\tau$  とし、 $\partial \bar{p} / \partial x$  は式 (16) によることとする。

このようにして計算された結果および実測値を図-13 に示す。同図より、この計算により比較的精度よく  $\tau_0, \delta$  を求めることができることが知られる。

また、内部境界層の厚さ  $\delta$  の発達は当然ながら  $k_1 < k_2$  の場合に比べて遅く、急変流で特に底面せん断力が大きくなることもないことが明らかになった。

なお、③の仮定は開水路で水面低下が著しい場合には成立しないことは明らかであるが、この取り扱いについては5. において述べる。風洞の空気流の場合には図-3および図-5から特に問題はないものとする。

5. 開水路における粗度急変流

以上は風洞における粗度急変流について取り扱った

が、開水路における粗度急変流に適用し、両者の関係を明らかにする。

風洞の場合には四辺により流れが拘束されているため、粗度の変化に伴う流速分布形の変形によって生じる外部境界層の流れの変化は明瞭には生じなく、また自由表面の影響もない。しかし、開水路では自由表面の存在のために水面において流れは大気圧である以外は拘束されない。したがって、開水路においては内部境界層の発達により流れの連続条件を満たすように水面の変化が現われる。

ここでは、開水路内の粗度急変流について底面せん断力および水面の算定方法を検討する。

粗度急変点を流れが常流状態で、特に大水深で通過する場合には、水面形は急変点上流に背水が及ぶため従来の不等流の計算法ではほぼ問題がなく、底面せん断力の算定のための境界条件である水面形を近似的に与えることができ、もしさらに精度が必要であれば、このようにして求められた底面せん断力を用いて再度不等流計算を行い、水面形を補正して、さらに前述の方法により底面せん断力を求めることができる。

したがって、特に問題となるのは射流状態で変化点を通過する場合である。 $k_1 < k_2$  の場合には急変点付近で跳水を生ずる場合があるが、一般に跳水によるエネルギー損失が底面せん断力によるものより大きいので通常の計算法で実用上は問題がない。したがって、 $k_1 < k_2$  の場合についてはここでは常流状態から限界流れとなって変化点を通過する流れについて検討する。

次に、 $k_1 > k_2$  の場合には後述の図-16 に示すように急変点近傍で限界水深をとる場合が問題であり、この場合には水面形をできるだけ精度よく知る必要がある。

(1)  $k_1 < k_2$  の流れの底面せん断力の算定

空気流の場合には流体による重力成分は無視できるので、式 (14) 中の圧力項は図-9 の概念のもとにベルヌーイの定理から求められる。しかし、開水路の場合には流体の重力成分を考慮する必要があり、そのためには水面形を必要とするが、これをあらかじめ知ることはできない。

そこで、流れは  $k_2$  上の等流水深  $h_{m2}$  であり、上流側  $k_1$  上も同じ  $h_{m2}$  と仮定すると、内部境界層内の圧力勾配は近似的に全体流にベルヌーイの定理を適用することにより求められ、次式で表わされる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = g I_0 - \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\tau_0}{h_{m2}} \dots \dots \dots (18)$$

ここに、 $I_0$  は水路勾配、 $\bar{u}$  は  $k_2$  上で生ずる全体流の平均流速である。また、ここで取り扱う流れは急変流であるので、上式中の摩擦損失項は近似計算では省略することとする。したがって、式 (18) は近似的に内部境界

層内の平均圧力勾配を表わすことになり、式(14)中の圧力項は式(17)で表現される。

前述のとおり、開水路流れにおいては水深変化を生じるが、急変点近傍で跳水を生ずる場合以外は水面変化は比較的小さいので、ここでは水深変化を無視する。したがって、 $k_1$ 上の境界層厚さは $\delta_1$ であり、 $k_2$ 上でも外部境界層厚さは同じく $\delta_1$ であり、ともに $\delta_1 = h_{n2}$ としてよい(このように仮定できない場合については後述)。

これより、単位幅流量  $q$ 、および相当粗度  $k_1, k_2$  が与えられれば、次式により  $u_{*1}$  が求められる。

$$u_{*1} = \frac{q}{\sqrt{6.0 + 2.5 \ln(h_{n2}/k_1)} h_{n2}} \dots \dots \dots (19)$$

これを式(7)に代入して、 $k_1$ 上の流速分布を求めることができる。これらをもとに、 $\delta$  および  $\tau_0$  の算定を図-10に示すフローチャートに従って行う。ここで、圧力項の見積りは式(18)による。このようにして行った計算の結果を図-14に示す。一方、実測結果も同図中に示してある。なお、実測の  $\tau_0, \delta$  は実測流速分布より求めたものである。

自由水面の存在のために実際には水面変化により流速分布形およびせん断力分布形について self-preserving 性が完全には成立していないが、風洞の場合と同様にして上記の近似計算により、 $\delta, \tau_0$  を比較的精度よく算定できることが知られる。

なお、粗度急変部で水面変化が著しく  $k_2$  上で等流水深  $h_{n2}$  になっていない場合には水面形の近似値として従来の不等流計算により求めた水面高を用いて、上記の計算を行うことにより、 $\delta, \tau_0$  の分布を知ることができる。さらに、求められた  $\tau_0$  を用いて不等流計算を行って水面形のより正しい値を求め、式(18)の代わりに底面付近の圧力  $p$  の  $x$  方向の変化を知り、上記の計算を行うことにより、 $\tau_0, \delta$  のより正確な値を求めることができるが、実用上は繰り返し計算の必要はないようである。

(2)  $k_1 > k_2$  の流れの底面せん断力の算定

この場合には、 $\delta$  の第一次近似値を知ることができな

いので、 $k_1 < k_2$  の場合と同じ取り扱いができず、4. で述べたようにまず  $\delta$  の近似値を知る必要がある。また、流れの重力成分を考慮に入れる必要がある。また、前述のようにこの場合には粗度急変点付近で水面形は急変する可能性があり、圧力勾配を知るためには水面形をできるだけ正確に知る必要がある。

内部境界層内の圧力変化は式(18)に従うものとし、また実測によれば上流側流速分布は対数則に従っているので、式(7)、(19)で与えることとする。しかしながら、 $\delta$  が未知であるため、第一次近似値を求めるため式(18)の右辺第2項および  $\tau_0$  を無視すると、式(14)は次のように変形することができる。

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{72}{7u_*^2(1+5u_{*1}/u_*)} \left( gh_0 \delta + \frac{\tau_0}{\rho} \right) \dots \dots \dots (20)$$

なお、 $\tau_0$  は次式で表わすことができる。

$$\tau_0/\rho = u_*^2 / \sqrt{8.5 + 2.5 \ln(\delta/k_2)}^2 \dots \dots \dots (21)$$

ここに、

$$u_* = u_{*1} \sqrt{8.5 + 2.5 \ln(\delta/k_1)} \dots \dots \dots (22)$$

であり、 $u_{*1}$  は上流  $k_1$  上の流れが下流の等流状態と等しいときの摩擦速度である。

式(20)、(21)、(22)より  $\delta, \tau_0, u_*$  の第一次近似値を試行錯誤により求め、これらを初期値として図-10に示す手順により、 $\delta, \tau_0$  を計算する。この手順の中では式(18)の右辺第2項は近似値が知られているので、圧力勾配として式(18)を用いている。

図-15に計算結果と実測値の一例を示す。同図より、水面形が未知の場合にも、ここで示した方法により比較的精度よく  $\delta$  と  $\tau_0$  の分布を算定できることが知られる。

$k_1 < k_2$  の流れの場合と比較すると、 $k_1 > k_2$  の場合には  $\delta$  の発達が遅いことが知られる。

なお、次に述べる水面形が知られると、式(18)の代わりにより適切な圧力勾配を底面の静圧の変化より求められるから、一般的にはより精度よく  $\delta, \tau_0$  を算定することができるが、図-16より知られるように、この例では  $k_2$  上の水深変化は非常に小さいので、影響があま

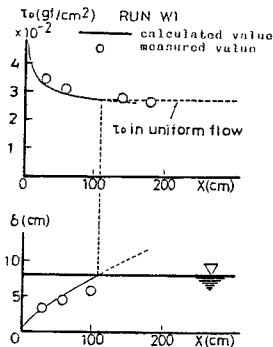


図-14  $\tau_0, \delta$  の算定結果 (Run W1)

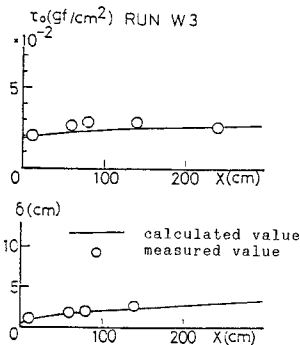


図-15  $\tau_0, \delta$  の算定結果 (Run W3)

り現われるとは考えられないので、特に計算は行っていない。

また、 $\delta_1$ 、 $u_o$ についても水深変化が著しい場合には以上の計算は self-preserving の仮定のもとに行われているので、修正する必要がある。このような場合が生ずるのは  $k_1$  の面と  $k_2$  の面とが基準高が異なる場合に生ずるので、このような場合には外部境界層の流れ方向の変化を知る必要がある。この場合にはまず水面形を上記の近似計算で求め、段落ち部の底面せん断力を求める方法<sup>6),7)</sup>と同様に取り扱う必要があり、この点についてはさらに検討を今後進めるつもりである。

今の場合には外部境界層は下流側  $k_2$  上の等流水深を用いて  $k_1$  上の境界層として計算しており、 $k_2$  上で図-16にみられるようにほぼ  $k_2$  上の等流水深に近いので、問題はないものとする。

(3) 粗度急変流の水面形計算

粗度急変流において、上流側底面相当粗度  $k_1$ 、下流側底面相当粗度  $k_2$ 、単位幅当たり流量  $q$ 、および水路勾配  $I_0$  が与えられれば、上述の方法により粗度急変点より下流の  $\delta$ 、 $\tau_0$  が近似的に算定できる。一方、実用的には河川の河床保護工などにより粗度急変流が生じる場合、その水面形を知ることも必要であり、また、前述の  $\tau_0$ 、 $\delta$  の算定に必要な  $\partial p / \partial x$  などのより精確な値を知るため、さらに、粗度急変点上流の  $\tau_0$  を知るためにも水面形が必要である。

(1) あるいは (2) により、すでに  $\tau_0$ 、 $\delta$  の近似値が知られているので、以下の手順により水面形を求めることができる。

- a)  $k_2$  上の等流水深を決定する。
- b) (1)、(2) で述べた手法により  $k_2$  上の  $\tau_0$ 、 $\delta$  を求める。
- c) 流れのエネルギー損失が底面せん断力のみによると考えてよいから、次式により水面形を計算する。

$$\frac{1}{2g} \frac{d}{dx} (\alpha \bar{u}^2) - I_0 + \frac{dh}{dx} + \frac{\tau_0}{\rho g h} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 $\alpha$  : エネルギー補正係数、 $\bar{u} = q/h$  である。

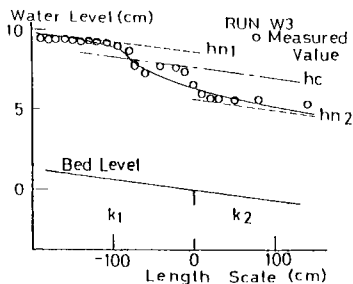


図-16 水面形の計算結果 (Run W3)

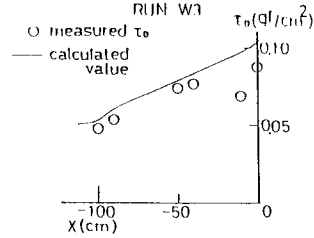


図-17 粗度急変点上流のせん断力 (Run W3)

d) (1)、(2) で求められた  $\delta$  が水面に達する位置とその点の水深を境界条件として、式 (23) により順次上流に向かって水面形が算定される。

ここで、流れが常流、射流にかかわらず、底面せん断力が既知であるので、d) で示した算定法により下流から上流に向かって算定していくことが可能であるが、算定された水深が限界水深をとるとき、その点の下流側の水面勾配を延長し、その点の上流側の水面勾配として近似することにより、比較的精度よく水面形を求めることができる。

前述のように  $k_1 < k_2$  の流れについては従来の一般的な不等流計算でほとんど問題がないので、ここでは  $k_1 > k_2$  の流れについて上述の計算を行い、その計算結果および実測値の一例を図-16に示す。この場合には粗度急変点の近傍で  $\tau_0$  は等流と考えたときの  $\tau_0$  にならないために、粗度急変点で限界水深をとらずに、上流側  $k_1$  上で限界水深になることが知られる。

なお、粗度急変点上流では  $\tau_0$  が求められていないが、水深が求められたので、次式により近似的に  $\tau_0$  を求め、式 (23) により粗度急変点より上流へ水面形を求めることができる。

$$\tau_0 = \rho \left[ \frac{q}{h(6.0 + 2.5 \ln h/k_1)} \right]^2 \dots\dots\dots (24)$$

このようにして、下流で適切な境界条件を与え、 $\tau_0$  の近似値を用いることにより、図-16に示すように実測値に比較的近い水面形を求めることができ、同時に上流側  $k_1$  上の  $\tau_0$  の近似値を求めることができる。なお、 $k_1$  上の  $\tau_0$  の分布の計算値と実測値を図-17に示す。

これらの結果より、粗度急変流で  $k_1 > k_2$  の場合、下流側が射流、上流側が常流のとき限界水深が必ずしも急変点に生じないこと、底面せん断力は等流の場合よりも  $k_1$  上で相当増加すること、および限界水深点を流れが通過する場合  $F_r \approx 1$  の流れとなるため水面に波状の定在波が生ずることが知られる。

なお、このようにして水面形が求められれば、前述の  $dp/dx$  をこれにより補正し、より正しい底面せん断力を求めることができ、またそれにより水面形を補正することができる。



## 6. 結 論

粗度急変流について、風洞および開水路において実験を行い、この結果をもとに内部境界層および底面せん断力の理論的解析を行った。その結果、以下の結論を得ることができた。

(1) 粗度急変流の上流側および下流側の相当粗度を  $k_1$ ,  $k_2$  とするとき、 $k_1 < k_2$  と  $k_1 > k_2$  の流れでは流れの特性が少し異なる。

(2) 両者の流れに対し、内部境界層をコントロール・ボリュームと考えた運動量方程式を逐次近似の方法で解くことにより、 $\delta$  と  $\tau_0$  を算定できるようにし、その結果は実測値と適合性のよいことが知られた。

(3) 求められた  $\delta$  と  $\tau_0$  を用いて開水路での急変流の水面形を計算できるようにし、その計算結果は実測値との比較よりほぼ満足すべきものであることが知られた。

(4) 水面形が求められれば、(2) で求めた  $\delta$ ,  $\tau_0$  の精度を圧力勾配を補正することにより向上できるようにした。

(5) 水面形の計算から粗度急変点上流の  $\tau_0$  を推定できるようにした。

(6) 風洞および開水路について、実験および解析を

行った結果、開水路で水面変化の著しい場合の流れの特性をある程度明らかにすることができた。

## 参 考 文 献

- 1) 吉川秀夫・石川忠晴・吉川秀勝：開水路の内部境界層に関する研究，土木学会論文報告集，第235号，1975。
- 2) Elliot, W.P. : Growth of the atmospheric internal boundary layer, A. G. U., Vol. 39, No. 6, 1954.
- 3) Antonia, R. A. and Luxton, R. E. : The response of a turbulent boundary layer to a step change in a surface roughness, Part I., J. F. M. Vol. 48, pp. 721~761, 1971.
- 4) Antonia, R. A. and Luxton, R. E. : The response of a turbulent boundary layer to a step change in a surface roughness, Part II., J. F. M. Vol. 53, pp. 737~757, 1972.
- 5) Townsend, A. A. : The response of a turbulent boundary layer to abrupt change in surface condition, J. F. M. Vol. 22, pp. 799~822, 1965.
- 6) 片山道夫・福井吉孝・吉川秀夫：段落ち部近傍の底面せん断力，土木学会論文報告集，第342号，1984。
- 7) 橋本 進・福井吉孝・吉川秀夫：開水路狭さく部における底面せん断応力の一評価法，土木学会論文集，No. 357 / II -3, 1985。
- 8) 齊藤 隆：二次元乱流壁面噴流に関する研究，土木学会論文報告集，第264号，1977。

(1985. 4. 8・受付)