

二次元フォーストプルームの連行係数に関する理論的研究

THEORETICAL ANALYSIS OF TURBULENT ENTRAINMENT IN PLANE FORCED PLUME

室田 明*・中辻啓二**・中井正則***

By Akira MUROTA, Keiji NAKATSUJI and Masanori NAKAI

The behavior throughout all over a plane forced plume is predicted by a differential and integral hybrid model. The differential boundary layer equations are used to develop an integral formulation which can describe the streamwise variations of mass, momentum and buoyancy fluxes. The eddy viscosity coefficient connects with the entrainment coefficient in this theoretical derivation. It enables to derive a relationship between the entrainment velocity and the Richardson number theoretically. It shows that the entrainment coefficient increases from 0.065 for a jet to 0.156 for a plume with an increase of the Richardson number. It is found that this model reasonably predicts the distributions of mean velocity, mean buoyancy and Reynolds stress and their streamwise variations.

1. 緒 言

フォーストプルームは周囲流体と密度の異なる噴流の流動を示す。その流動形態は、初期には運動量流束の卓越した噴流的挙動 (jet-like flow) を呈する。放流口からの距離が大きくなるにつれて浮力流束がしだいに優勢となり、それはプルーム的挙動 (plume-like flow) に移行する。均質噴流あるいはプルームの解析理論は枚挙にいとまがないほど数多く提案されている。しかし、噴流からプルームに至るフォーストプルームの全行程にわたる水理特性を明確にするような理論はない。

Phillips¹⁾ は任意点での水理諸量を断面積分量と無次元の分布関数との積で表現することにより、従来の微分モデルと積分モデルの利点をうまく活用した理論展開 (以下では混成モデルと称する) を提案している。それは、流速や温度の分布関数形を特定することなく、連行係数とリチャードソン数との関数関係を理論的に誘導できるという特色を有する。

しかしながら、Phillips 自身が指摘するように、その

関数関係は Fox²⁾ の提案式と少し異なっている。また、著者らの検討³⁾によっても、その混成モデルは連行係数を少し過小評価する傾向にある。フォーストプルームの全行程にわたる流動特性を予測するためには、物理的に容認しがたい、極端に小さな乱流プラントル数を導入しなければならないという欠陥がある。その原因として、乱流せん断応力の表現のまずさが考えられる。最近の精度よい測定結果⁴⁾によれば、軸上の流速および浮力で基準化した乱流せん断応力や乱流熱流束を比較した場合、プルームの値は均質噴流の値より 1.4~1.6 倍大きいことがわかってきた。この差異が連行現象にもたらす影響は非常に大きい。

そこで、本研究では乱流せん断応力の流下方向変化を理論的に評価することにより混成モデルの改善を図り、フォーストプルームの全行程の特性を一貫して記述する理論展開を試みる。つまり、乱流境界層の微分方程式を基礎に、運動量流束、浮力流束および流量の流下方向保存則との結合から、連行係数を理論的に求める。さらに実験結果との比較から、提案モデルの適合性を検証する。

2. 基礎方程式

鉛直上向きに放出された二次元フォーストプルームに境界層近似とブーシネスク近似が適用できるものと仮定

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科
(〒565 吹田市山田丘 2-1)

** 正会員 工博 大阪大学助教授 工学部土木工学科(同上)

*** 学生会員 大阪大学大学院工学研究科前期課程学生(同上)

する。連続方程式、ブルームの軸方向運動方程式ならびに浮力の拡散方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = B + \epsilon_M \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \dots\dots\dots(2)$$

$$U \frac{\partial B}{\partial x} + V \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\epsilon_M}{Pr} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \dots\dots\dots(3)$$

また、境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} V(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad U(x, \infty) = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad B(x, \infty) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

である。ここに、 x ：ブルーム軸（鉛直）方向座標、 y ：ブルーム軸直角（横）方向座標、 $U(x, y)$ ： x 方向平均流速、 $V(x, y)$ ： y 方向平均流速、 $B(x, y) = (\rho_a - \rho)g/\rho_a$ ：浮力、 ρ ：密度、 ρ_a ：周囲環境水密度、 g ：重力加速度、 $\epsilon_M(x)$ ：渦動粘性係数、 $\epsilon_K(x)$ ：渦動拡散係数、 $Pr = \epsilon_M/\epsilon_K$ ：乱流プラントル数である。

3. Phillips の混成モデルの概要

(1) 変数分離

Phillips が提案したモデルの特徴の1つは、微分モデルと積分モデルの利点をうまく活用するために、任意点での水理量を断面積分した水理量と無次元の横方向分布関数形との積で表現する変数分離を採用したことである。

古典的微分モデルにおいては流速あるいは温度は軸上代表値と相似分布関数との積で $x^n \cdot f(y/x^m)$ で表示され、支配方程式を直接解くことによって解が得られる。したがって、微分モデルでは、浮力流束が0の均質噴流か、あるいは運動量流束と浮力流束とが均衡して分布形状が流下方向に変化しないブルームに対してのみ、解が存在することになる。つまり、両流束が同時に影響を及ぼすようなフォーストブルームに対して微分モデルは適用できない。

一方、積分モデルは流速・温度の相似分布形（たとえば、 $U_\xi(x) \cdot f(y/W_0)$ 、ここに、 $U_\xi(x)$ ：軸上流速、 W_0 ：流速の半値半幅を示す）をブルーム軸に直交する断面で積分した流束の流下方向保存則を基礎に展開される。運動量流束と浮力流束が流下方向に変化するフォーストブルームに対しても、積分モデルは適用可能である。その反面、方程式の数の不足から周囲流体の連行量を付加的条件として実験的に定めざるを得ないという欠点がある。このように、フォーストブルームの全行程の流動を記述できる理論はない。

そこで、Phillips は両モデルを融合する目的で、流れ

関数 $\phi(\partial\phi/\partial y = U, \partial\phi/\partial x = -V)$ 、浮力 B および y 方向距離 ξ に対して次式のような変数分離を採用した。

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, y) = Q(x) \cdot f(\xi) \\ B(x, y) = D(x) \cdot \theta(\xi) \\ \xi(x, y) = y/W(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= 2 \int_0^\infty U(x, y) dy \\ D(x) &= \frac{2}{W(x)} \int_0^\infty B(x, y) dy \\ W(x) &= Q^2(x)/2 \int_0^\infty U^2(x, y) dy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

すなわち、微分方程式系における未知分布関数形 $f(\xi)$ 、 $\theta(\xi)$ と積分方程式系における断面積分量 $Q(x)$ 、 $D(x)$ およびブルーム幅 $W(x)$ との積で任意点での流速 $U(x, y)$ 、 $V(x, y)$ および浮力 $B(x, y)$ を表現した。

流れ関数は式(1)の関係を満たしているのので、式(5)、(6)を式(2)~(4)に代入すると、微分方程式系の基礎式として次式が得られる。

$$f''' + \frac{W}{\epsilon_M} \frac{dQ}{dx} (ff'' - f'^2) + \frac{Q}{\epsilon_M} \frac{dW}{dx} f'^2 + \frac{DW^3}{\epsilon_M Q} \theta = 0 \dots\dots\dots(7)$$

$$\theta'' - \frac{Pr}{\epsilon_M} \frac{WQ}{D} \frac{dD}{dx} f' \theta + \frac{PrW}{\epsilon_M} \frac{dQ}{dx} f \theta' = 0 \dots\dots\dots(8)$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'(\infty) = 0 \\ \theta'(0) = 0, \quad \theta(\infty) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

また、式(5)を代入した、運動方程式(2)と浮力拡散方程式(3)を ξ に関して0から ∞ まで積分することによって、運動量流束ならびに浮力流束の流下方向保存方程式が誘導される。その過程で分布関数形 $f(\xi)$ 、 $\theta(\xi)$ が消去されて、断面積分量 $Q(x)$ 、 $D(x)$ 、 $W(x)$ のみで表現される積分方程式系の基礎式が得られる。

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{W} \right) = DW \dots\dots\dots(10)$$

$$\frac{d}{dx} (QD) = 0 \dots\dots\dots(11)$$

(2) 連行方程式の導入

混成モデルの第2の特徴は連行を表現する式に渦動粘性係数 ϵ_M を導入したことである。すなわち、式(10)、(11)はそれぞれ運動量流束ならびに浮力流束の保存式であり、従来の積分モデルと同様に、未知量 Q 、 D 、 W の数が方程式の数を上回っており、解くことはできない。そこで、次式に示す連行方程式を導入した。

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{\lambda \epsilon_M}{W} \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 λ は無次元の比例定数である。上式は次元を合わせるように採用した関係式であり、いわゆる、Morton et al.⁵⁾ 流の連行速度の表示とは異なる。その結果、

式 (10)~(12) が積分方程式系の基礎式となる。

次に、式 (10)~(12) を式 (7), (8) に代入すれば、断面積分量はうまく整理されて、分布関数 f, θ に関する常微分方程式が次式のように得られる。

$$f''' + \lambda(f \cdot f'' + f'^2) + \gamma(\theta - f'^2) = 0 \dots\dots\dots(13)$$

$$\theta'' + P_r \lambda (f \theta' + f' \theta) = 0 \dots\dots\dots(14)$$

ここに、

$$\gamma = DW^3 / \epsilon_M Q \dots\dots\dots(15)$$

$\gamma = 0$ とすれば、式 (13) は均質噴流の微分方程式となる。境界条件を考慮して 2 回積分すれば、その解は Görtler⁶⁾ が求めた解 $U/U_\xi = 1 - \tanh^2 \xi$ と一致する。

フォーストブルームの場合には λ と γ を 1 つにまとめるために、Phillips はさらに変数変換を行った。

$$\left. \begin{aligned} F(\xi) &= \frac{J}{G(0)} f(\xi) \\ G(\xi) &= \left(\frac{J}{G(0)} \right)^4 \frac{1}{\lambda^2} \theta(\xi) \\ \xi &= \frac{\lambda G(0)}{J} \xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

ここに、

$$J = 2 \int_0^\infty F' d\xi = 2 F(\infty) \dots\dots\dots(17)$$

式 (16) を式 (13), (14) に代入すると、微分方程式系の基礎式として最終的に次式を得る。

$$F''' + FF'' + F'^2 + (\gamma/\lambda)(G - F'^2) = 0 \dots\dots\dots(18)$$

$$G'' + P_r \cdot (F \cdot G)' = 0 \dots\dots\dots(19)$$

このときの境界条件は式 (4) より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= 0, F'(\infty) = 0, F''(0) = 0 \\ G(0) &= 1, G'(0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

また、式 (12) で導入した比例定数 λ は、

$$\lambda = J^3 / K \dots\dots\dots(21)$$

である。 $K = 2 \int_0^\infty F'^2 d\xi$ であることから、 λ の値は流速分布形状により規定される。

(3) 混成モデルの問題点の検討

以上の誘導の結果、断面積分量の x 方向変化を表現する積分方程式系として式 (10), (11), (12) を、また流速および浮力の y 方向分布形状を表現する微分方程式系として式 (18), (19) と境界条件式 (20) を得る。ただし、常微分方程式の係数は断面積分量の関数となっており、基礎方程式は完全な変数分離になっていない。すなわち、分布形状は均質噴流の解にみられるような相似関数ではなく、流下方向に変化する。したがって、混成モデルは両方程式系を連立させて解かなければならない。

両方程式系を連結するのは連行方程式 (12) に導入された渦動粘性係数 ϵ_M である。一般に、連行量 dQ/dx は、次元的考察から代表流速 Q/W に比例するものと仮定して、次式のように表現される。

$$\frac{dQ}{dx} = E \cdot \frac{Q}{W} \dots\dots\dots(22)$$

ここに、 E は連行係数と称される。

いま、連行が乱れ速度 $\sqrt{|\overline{uv}|}$ に比例すると考えると、 dQ/dx は Prandtl⁷⁾ の混合距離 l と渦動粘性係数 ϵ_M を用いて次式のように表わされる。

$$\frac{dQ}{dx} \propto \sqrt{|\overline{uv}|} \propto \frac{\epsilon_M}{l}$$

混合距離 l として代表幅 W を採用すれば、この関係式は式 (12) の連行方程式となる。渦動粘性係数と連行係数とは現象のとらえ方の違いはあるものの、乱流輸送という同一現象を記述するものであり、式 (12) の連行過程の表示は式 (22) と同程度に有効であると考えられる。

微分方程式系基礎式 (18) と (19) に含まれる係数のうち P_r は ϵ_M/ϵ_K で表わされる乱流プラントル数であり、その意味は物理的に明瞭である。一方、係数 γ/λ の物理的意味は明らかでない。いま、式 (12) と式 (22) の関係に式 (15) を考慮すると、 γ/λ は次のように求まる。

$$\frac{\gamma}{\lambda} = \left(\frac{DW^3}{Q^2} \right) \frac{1}{E} = \frac{R_i}{E} \dots\dots\dots(23)$$

ここに、 $R_i \equiv D \cdot W^3 / Q^2$ は断面平均リチャードソン数である。

つまり、係数 γ/λ は浮力効果とせん断効果の度合いを表わす断面平均リチャードソン数 R_i と連行係数 E の比で表現される変数である。その値は噴流からブルームへの遷移過程で流動とともに変化する。

4. 乱流フォーストブルームへの適用

(1) 渦動粘性係数の表現

渦動粘性係数 ϵ_M に対して Prandtl⁷⁾ の第二理論を適用すれば、 ϵ_M はブルーム軸上の流速 U_ξ と代表幅 W との積で表現されて、次式のようになる。

$$\epsilon_M = \kappa \cdot U_\xi \cdot W \dots\dots\dots(24)$$

ここに、 κ は実験的に定められる定数である。Phillips は Reichardt⁸⁾ の実験に基づいて $\kappa = 0.01086$ をフォーストブルームの全流程にわたって与えた。その結果、均質噴流での連行係数が Görtler の解析解の約 2 倍にもなるという不合理な結果を得ている。

一方、近年の精度高い乱流計測によれば、噴流からブルームへと移行するに伴って、軸上の流速で基準化した乱流せん断応力 $-\overline{uv}/U_\xi^2$ が増大することが明らかになってきた。たとえば、Ramaprian-Chandrasekhara⁴⁾ は軸対称ブルームでのレイノルズ応力 $-\overline{uv}$ の測定データから、 $\epsilon_M/U_\xi \cdot W_v$ (ここに、 W_v は流速分布の半値半幅) の値を求め、ブルームでの値は均質噴流のその約 1.6 倍になることを報告している。つまり、Phillips の論文¹⁾ ならびに著者らの前論文³⁾ においては、渦動粘性係数 ϵ_M

の値は流動の遷移，換言すれば流下距離に無関係に一定であると仮定していたが，それは合理的でない。理論展開に際して， ϵ_M の流下方向変化を考慮する必要がある。

そこで，もう一度基礎方程式(1)，(2)を用いよう。簡単のために，流速および浮力の分布関数形を次式のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} U/U_{\bar{q}} &= F_1(\zeta) \\ B/B_{\bar{q}} &= G_1(\zeta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

連続方程式(1)を ζ に関して0から ζ まで積分して得られる横方向流速 V を x 方向運動方程式(2)に代入して整理すれば，次式が得られる。

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\epsilon_M F_1'}{Q} \right) = f'(0) \left\{ \frac{W}{U_{\bar{q}}} \frac{dU_{\bar{q}}}{dx} \left(F_1^2 - \frac{dF_1}{d\zeta} \int_0^\zeta F_1 d\zeta \right) - \frac{dW}{dx} \cdot \frac{dF_1}{dx} \int_0^\zeta F_1 d\zeta - \frac{W}{U_{\bar{q}}^2} B \right\} \dots\dots(26)$$

上式に，積分方程式系(10)，(11)，(22)から導かれる次式

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{1}{2-(\gamma/\lambda)} \cdot \frac{Q}{W} \cdot \frac{dW}{dx} \dots\dots\dots(27)$$

$$\frac{dD}{dx} = \frac{-1}{2-(\gamma/\lambda)} \cdot \frac{D}{W} \cdot \frac{dW}{dx} \dots\dots\dots(28)$$

ならびに，ブルーム軸上の流速値

$$U_{\bar{q}} = f'(0) \frac{Q}{W} \dots\dots\dots(29)$$

を代入し，0 \sim ζ の範囲で ζ に関して積分すると，渦動粘性係数 ϵ_M は次のように求まる。

$$\epsilon_M = \frac{f'(0)}{F_1'(\zeta)} \cdot Q \cdot \frac{dW}{dx} \left\{ \frac{1}{2-(\gamma/\lambda)} \left(2 \int_0^\zeta F_1^2 d\zeta - F_1 \int_0^\zeta F_1 d\zeta \right) - \int_0^\zeta F_1^2 d\zeta - \frac{(\gamma/\lambda)}{2-(\gamma/\lambda)} \frac{\theta(0)}{f'(0)^2} \int_0^\zeta G_1 d\zeta \right\} \dots\dots(30)$$

同様な方法で，浮力の拡散方程式を0 \sim ζ の範囲で ζ に関して積分すると，渦動拡散係数 ϵ_K が求まる。

$$\epsilon_K = -f'(0) \frac{1}{2-(\gamma/\lambda)} \frac{Q}{W} \frac{dW}{dx} \frac{G_1(\zeta)}{G_1'(\zeta)} \int_0^\zeta F_1 d\zeta \dots\dots(31)$$

乱流プラントル数 P_r は式(30)，(31)の比として表わ

される。これは最初に仮定した P_r と恒等的に一致する。

ϵ_M および ϵ_K は基礎方程式(2)，(3)において流下距離 x のみの関数と定義しているのので，上式中の積分範囲は任意の横方向位置 ζ までとなる。本論文では $\zeta = \infty$ を採用して積分値を求めた。

(2) 混成モデルの展開

上述した混成モデルの概要を図で示すと，図—1のようになる。乱流プラントル数 P_r および係数 γ/λ を仮定することにより，分布関数 F, G に関する非線形微分方程式系(式(18)，(19))を解くことができ，流速と浮力の分布形状が求まる。得られた分布関数形を用いて渦動粘性係数 ϵ_M (式(30))を算出する。次に，渦動粘性係数 ϵ_M より連行係数 E が求まり，式(23)の $\gamma/\lambda = R_i/E$ の関係より，断面平均リチャードソン数 R_i と連行係数 E の関係が理論的に求まる。この $E \sim R_i$ の関係を用いて積分方程式系(式(10)，(11)，(12))を初期値問題として解けば，断面積分量 Q, D, W の流下方向変化が求まる。

(3) 数値解析法

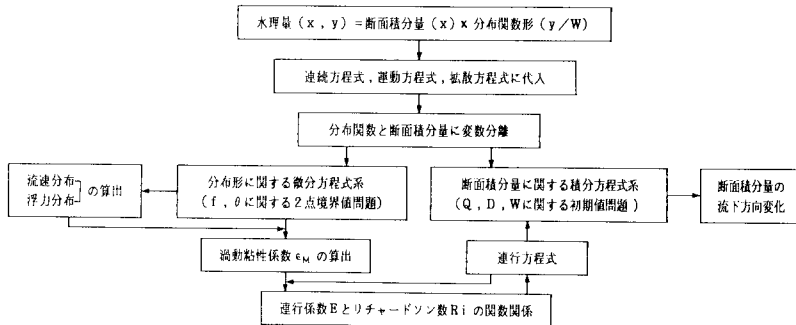
微分方程式系の分布関数 F, G に関する非線形3階常微分方程式系は2点境界値問題となり，解析的には解けない。そこで，Bellmanの準線形化法⁹⁾に基づいて線形漸化式で近似して解いた。特解，斉次解を求める場合にはRunge-Kutta-Gill法を採用している。

また，断面積分量 Q, D および W に関する積分方程式系は初期値問題となる。放出口での Q_0, D_0, W_0 を適宜初期条件として与え， $E \sim R_i$ の関係を用いることにより，容易に解ける。

5. 数値解の性質

(1) 平均流速と平均浮力の分布形状

乱流プラントル数 P_r と係数 $\gamma/\lambda (= R_i/E)$ の任意の値を式(18)，(19)に代入して解くことにより，流速と浮力の分布形状が求まる。 P_r および γ/λ を変化させたときの分布形状を図—2, 3に示す。縦軸は軸上の値で



図—1 モデル展開の概要

無次元表示した流速と浮力を示し、横軸は流速の半値半幅 W_U で無次元表示した横方向距離 $\eta (= y/W_U)$ を示す。

数値解 $F(\xi)$ および $F'(\xi)$ は P_r や γ/λ の値にかかわらずほとんど変化しない。したがって、無次元表示した流速分布 U/U_{ξ} はほぼ同一の曲線で近似でき、しかも均質噴流に対する Görtler の解と同一である。また、 $y/W_U < 1.5$ の範囲の分布形はガウス分布で近似できる。これに対して、浮力分布 B/B_{ξ} は P_r および γ/λ の値によって鋭敏に変化する。すなわち、 P_r と γ/λ の値が小さくなるにつれて、軸上浮力が減少し、横方向の拡がりが増加する傾向がみられる。軸上浮力 B_{ξ} で無次元表示したために B_{ξ} の減少は同図中に表わせないが、たとえば、図-2 に示す $P_r=0.5$ での B_{ξ} の値は $P_r=1.0$ の場合の 67.5% になる。乱流プラントル数 P_r は渦動粘性係数と渦動拡散係数との比であり、 P_r の減少は渦動拡散係数の増加、すなわち浮力の分布形の拡がりを意味し

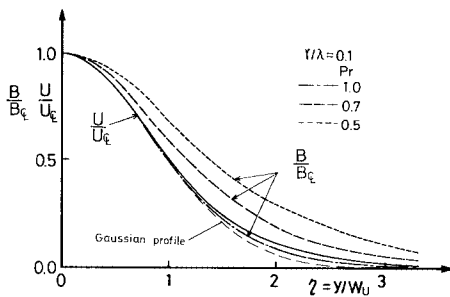


図-2 分布形状に及ぼす P_r の影響

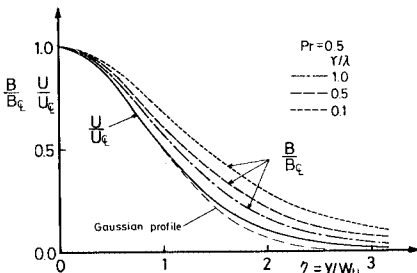
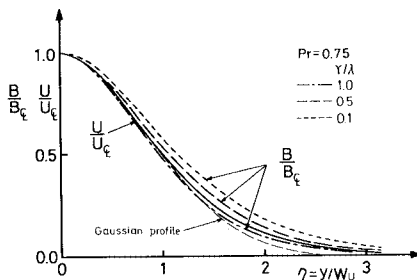


図-3 分布形状に及ぼす γ/λ の影響

ている。このことは図-2 において本混成モデルで矛盾なく表現されている。

一方、図-3 は P_r を一定にして γ/λ を変化させた場合の分布形状を示す。上図は $P_r=0.75$ 、下図は $P_r=0.5$ の計算結果である。係数 γ/λ の増加は運動方程式 (18) 中の浮力項の増大を意味しており、 γ/λ の増加に伴って浮力分布は流速分布に漸近する傾向にある。つまり、 P_r を一定にして分布形を推算しても、浮力の影響が増大するにつれて、実質的な乱流プラントル数が増大することを意味している。

後述するように、実験により得られたフォーストブルームの P_r の値は 0.7~0.8 の範囲である。その範囲では γ/λ の値の変化が分布形状に及ぼす影響は小さいことが図-3 の上図からわかる。つまり、噴流からブルームへの遷移過程において、流速ならびに浮力の分布形状はあまり変化しないことが予想でき、式 (5) の変数分離は近似的に成立する。

また、図-2, 3 を浮力分布の半値半幅 W_B を用いて無次元表示して示せば、今度は流速分布 U/U_{ξ} が P_r あるいは γ/λ の値に従って変化するのに対して、浮力分布 B/B_{ξ} はガウス分布で近似できる一本の曲線で描かれることになる。ただし、その定性的傾向は図-2, 3 と何ら変わることはない。

(2) 連行係数と断面平均リチャードソン数

式 (12), (22) より連行係数 E は渦動粘性係数 ϵ_M と次式のような関係にある。

$$E = \frac{\lambda}{Q} \cdot \epsilon_M = \lambda \cdot \frac{f'(0)}{F_1'(\xi)} \cdot \frac{dW}{dx} \left\{ \frac{1}{2 - (\gamma/\lambda)} \cdot \left(2 \int_0^{\xi} F_1^2 d\xi - F_1 \int_0^{\xi} F_1^2 d\xi \right) - \int_0^{\xi} F^2 d\xi - \frac{(\gamma/\lambda)}{2 - (\gamma/\lambda)} \frac{\theta(0)}{f'(0)^2} \int_0^{\xi} G_1 d\xi \right\} \dots (32)$$

つまり、流速ならびに浮力の分布形状が求まれば、 dW/dx をパラメーターとして E を算出できる。また、そのときの γ/λ の値より、断面平均リチャードソン数は $R_i = (\gamma/\lambda) \cdot E$ のように求まることになる (式 (23) 参照)。未知量 dW/dx は積分方程式系基礎式 (10), (11) と式 (22) とを連立させることにより、次式のように表わされる。

$$\frac{dW}{dx} = 2E - R_i \dots (33)$$

よって、 P_r と γ/λ の値を仮定することにより得られる分布形状 $F(\xi)$, $G(\xi)$ のもとで、式 (32) → 式 (23) → 式 (33) を繰り返し計算することにより、 dW/dx の値が理論的に求まる。

上述の手法により求まる連行係数 E と断面平均リチャードソン数 R_i との関係を乱流プラントル数 P_r をパラメーターに示したのが図-4 である。縦軸は実験値

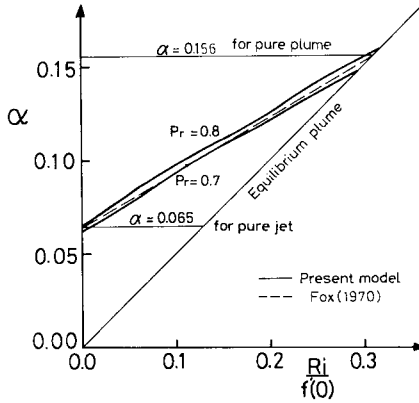


図-4 連行係数とリチャードソン数の関係

および他の解析結果との比較のために、 $dQ/dx=2\alpha \cdot U_{\xi}$ で定義される慣用的な連行係数 $\alpha (=E/2f'(0))$ を採用している。

さて、設定した γ/λ (すなわち、 R_i/E) の値から E と R_i の関係を求めるが、その拘束条件を考えてみよう。いま、 R_i を x で微分して式 (10), (11), (22) を用いれば

$$\frac{dR_i}{dx} = \frac{3R_i}{W} (E - R_i) \dots \dots \dots (34)$$

となる。断面平均リチャードソン数が流下方向に変化しないという条件は $R_i=0.0$ と $R_i=E$ となり、前者は均質噴流に、後者は平衡ブルームに対応している。つまり、同図中で $R_i=0.0$ と $R_i=E$ で囲まれる領域が混成モデルの適用範囲となる。このことは、 $\gamma/\lambda (=R_i/E)$ の値は均質噴流からブルームへの遷移に伴い 0.0 から 1.0 の範囲で変化することを意味している。

同図には、乱流プラントル数 Pr を 0.7 と 0.8 に仮定した場合の $E-R_i$ の関数関係を実線で示す。 Pr の流下方向変化を特定するためには、基礎方程式の数不足している。たとえば、運動エネルギー式を導入することにより ϵ_M の導出が可能であることから、この ϵ_M と x 方向運動方程式から求まる式 (30) とが合致するように繰り返し計算を行って、 γ/λ に対する乱流プラントル数 Pr の値を求めることは理論的に可能である。しかしながら、図-3 の上図にみられるように、 $Pr=0.75$ では γ/λ に対する F と G の分布形状の違いはわずかであり、その差異は数値積分する過程で計算誤差の中に埋没してしまう。その結果、 γ/λ に対する Pr の微妙な変化を正確に求めることは困難であった。このことから、 Pr を 0.7 と 0.8 に固定して、 $E-R_i$ の関係を図-4 のように求めた。

理論的に得られた連行係数 α は乱流プラントル数によって少し異なるが、均質噴流では 0.065、ブルームで

は 0.156 となる。それらの値はそれぞれ Görtler⁶⁾, Rouse et al.¹⁰⁾ の実験結果とよく一致している。つまり、噴流からブルームへと発達するフォーストブルームにおける乱流プラントル数 Pr は 0.7 から 0.8 の範囲にあることが推察される。この値は中辻・平田¹¹⁾ の実験値 0.71, 著者ら¹²⁾ の実験値 0.65~0.85, および水科・荻野ら¹³⁾ の軸対称ブルームの実験値 0.73 と比較して妥当な値である。

前論文³⁾においては、i) 均質噴流の連行係数を既往の実験値に合致するように与えなければならないこと、また、ii) $Pr=0.2$ という実験値からはるかに離れた不適当な乱流プラントル数を採用しなければ、連行係数とリチャードソン数との関係を矛盾なく説明することができないという欠点があった。本混成モデルにおいては、渦動粘性係数 ϵ_M の流下方向変化を考慮することにより、その矛盾を解消できた。

比較のために図中に破線で示した Fox²⁾ の表現式 $\alpha = a_1 + a_2 \cdot R_i$ は質量・運動量の保存式と運動エネルギー式とを連立させて求めた式であり、本混成モデルの傾向とよく一致している。

以上のように、本混成モデルはフォーストブルームの連行に及ぼす浮力効果を理論的に誘導できた点で非常に興味深い。

(3) 乱流せん断応力の分布形状

乱流せん断応力 $-\overline{uv}$ は式 (30) の ϵ_M を用いて表示できる。特に、均質噴流 ($\gamma/\lambda=0.0$) とブルーム ($\gamma/\lambda=1.0$) に対する乱流せん断応力 $-\overline{uv}$ は無次元表示して次式のように表わされる。

$$-\frac{\overline{uv}}{U_{\xi}^2} = \frac{dW}{dx} \left(\frac{1}{2} F_1 \int_0^{\xi} F_1 d\xi \right) \text{ for jet} \dots \dots \dots (35)$$

$$-\frac{\overline{uv}}{U_{\xi}^2} = \frac{dW}{dx} \left[\int_0^{\xi} F_2^2 d\xi - F_1 \int_0^{\xi} F_1 d\xi - \frac{\theta(0)}{f'(0)^2} \int_0^{\xi} G_1 d\xi \right] \text{ for plume} \dots \dots \dots (36)$$

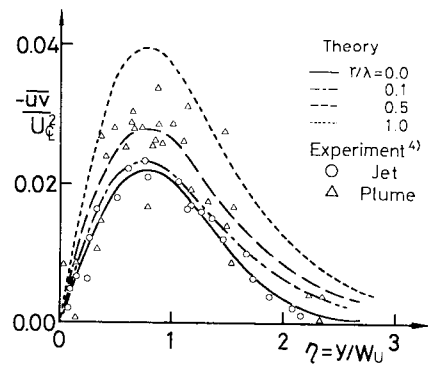


図-5 乱流せん断応力の分布形状

図-5は乱流せん断応力の分布形状 $-\bar{u}v(\eta)/U_{\xi}^2$ を γ/λ をパラメーターとして示す。ただし、 $\gamma/\lambda=0.0$ の噴流解は式(35)に実験値 $dW_0/dx=0.112^{14)}$ を代入して求めた。同図より、 γ/λ の値の増大、すなわち浮力効果の増大に伴い、無次元乱流せん断応力の絶対値は増加することがわかる。たとえば、ブルームでの $-\bar{u}v(\eta)/U_{\xi}^2$ の最大値は噴流のその約1.7倍に達している。図中のプロットはRamaprian-Chandrasekhara⁴⁾の実験値を示す。実験値は噴流では理論解とよく一致するが、ブルームではやや小さくなる。しかしながら、全体の分布形状に対する理論値と実験値との一致度は満足すべき結果である。

6. 解析結果の検証

(1) 水理実験の概要

検証のための水理実験は前面ガラス張りの水槽(高さ130 cm, 幅90 cm, 奥行90 cm)の前面15 cmを仕切って行った。計測水槽の下方から上方へ約2 cm/sで流れる一様流中に、幅0.4 cm, 長さ15 cmのスリットから温水を鉛直上向きに放流した。実験装置ならびに実験方法は著者らの論文¹⁵⁾に詳述してある。流速および温度は計測技研製電磁流速計と高感度サーミスターを用いて計測した。実験条件は噴流流動とブルーム流動とを網羅するように、初期密度フルード数 $F_{d0}(=U_0/\sqrt{B_0 W_0})$ を3.5~64.4の広範囲に設定した。ここに、 W_0 は放出口

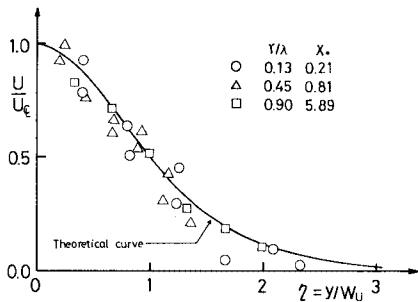


図-6 流速の分布形状

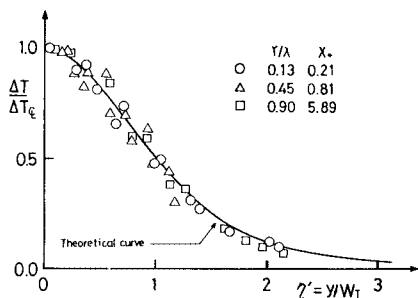


図-7 温度差の分布形状

幅である。なお、解析に用いた乱流プラントル数 P_r は、図-4を参考にして、全流程にわたって一定値 $P_r=0.7$ を採用している。

(2) 流速と温度差の断面内分布特性

図-6, 7に流速 U/U_{ξ} と温度差 $\Delta T/\Delta T_{\xi}$ の分布形状に関する理論値と実験値との比較を示す。ここに、 $\Delta T(=T-T_a)$ は周囲流体の温度 T_a との温度差を示す。 X_* は後述するChen-Rodi¹⁴⁾の無次元距離であり、 $X_* < 0.5$ は噴流領域、 $X_* > 5.0$ はブルーム領域に対応する。また、横方向距離は流速ならびに温度差の半値半幅で無次元表示している。解析条件は測定位置 X_* での水理条件に合わせて決定しており、係数 γ/λ の値はそれぞれ、0.13, 0.45, 0.90である。それらの値は後述する R_i, α と X_* との関係(図-10と11)から算出した。 $y/W_0 > 1.4$ の範囲で流速の実験値が理論値に比べて少し小さくなる点を除いて、流速と温度差の理論値は実験値と良好に一致している。

(3) 水理諸量の流下方向変化特性

図-8, 9はブルーム軸上の平均流速 U_{ξ} ならびに平均温度差 ΔT_{ξ} の遞減特性を示したものである。縦軸と横軸はChen-Rodiの提唱した次式で表わされる無次元量 U_* , T_* および X_* で表わした。

$$\left. \begin{aligned} U_* &= \frac{U_{\xi}}{U_0} F_{d0}^{2/3} \left(\frac{\rho_0}{\rho_a} \right)^{-1/3} \\ T_* &= \frac{\Delta T_{\xi}}{\Delta T_0} F_{d0}^{2/3} \left(\frac{\rho_0}{\rho_a} \right)^{2/3} \\ X_* &= \frac{x}{W_0} F_{d0}^{-1/3} \left(\frac{\rho_0}{\rho_a} \right)^{2/3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

図中の太線は本混成モデルによる理論解であり、プロットが実験値である。初期密度フルード数 F_{d0} は64.4, 23.7, 6.6, 3.5であり、Chen-Rodi¹⁴⁾の半経験式を満たす、いわゆる確立領域では、それぞれ噴流領域、噴流から遷移領域、遷移領域、ブルーム領域に相当する。両図より理論解は軸上流速 U_* と軸上温度差 T_* の遞減に関して実験値と非常によく合致していることがわかる。また、理論解はChen-Rodiの遞減則、すなわち、噴流

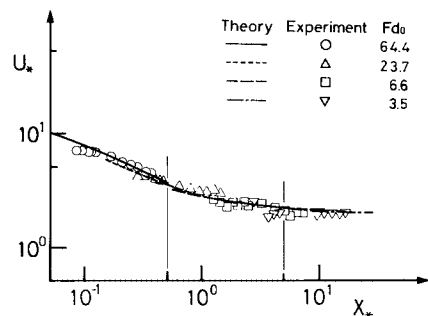
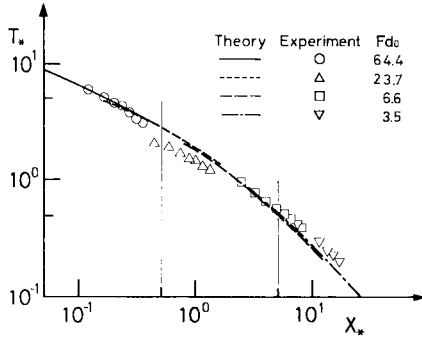


図-8 軸上流速の流下方向変化



図—9 軸上温度差の流下方向変化

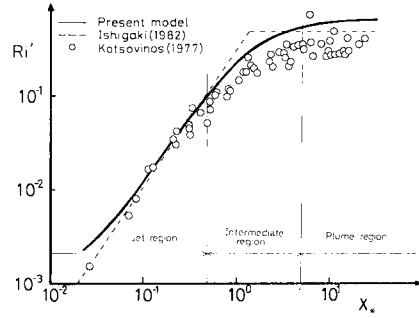
領域 ($X_* < 0.5$) では $U_* \propto X_*^{-1/2}$, $T_* \propto X_*^{-1/2}$, またブルーム領域 ($X_* > 5.0$) では $U_* = \text{一定}$, $T_* \propto X_*^{-1}$ の減速率と合致するばかりでなく、彼らが多数の実験データの比較から定めた半経験式ともきわめてよく一致している。ただし、 $F_{00} = 23.7$ の実験値は少し下方に平行移動した形でプロットされている。これは後述する断面流量の流下方向変化特性においても少し特異な傾向を有することから、実験の測定誤差に原因するものと推察される。

次に、初期条件 $F_{00} = 9.0$ で計算した遷移領域からブルーム領域における拡がり率の流下方向変化を表—1 に示す。流速の半値半幅の拡がり率 dW_v/dx は少し増大する傾向にあるのに対して、浮力のそれ (dW_b/dx) は減少する傾向にある。最終的には流速の拡がり率の方がわずかに大きい。ブルーム領域での漸近値は均質噴流の既往の実験値 $dW_v/dx = 0.112^{14)}$ より 16% 程度大きいことがわかる。また、それらの値 (0.130, 0.128) は dW_b/dx に関する実験値、たとえば Rouse et al.¹⁰⁾ の 0.13, Kotsovinos¹⁶⁾ の 0.12, Anwar¹⁷⁾ の 0.131, Lee-Emmons¹⁸⁾ の 0.13 と非常によく一致している。

表—1 半値半幅の拡がり率

x/W_0	20	40	60	100	150
dW_v/dx	0.126	0.127	0.128	0.130	0.130
dW_b/dx	0.132	0.128	0.127	0.128	0.128

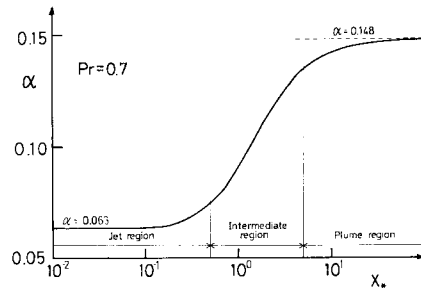
図—10 は、積分方程式系から導出される断面平均リチャードソン数 $R_i' = (DW^2/Q^2) \cdot (\theta(0)/f'(0)^2)x$ の流下方向変化を示す。流下方向距離は図—8, 9 に合わせて X_* で示した。また、図中のプロットは Kotsovinos¹⁴⁾ の実験値である。理論解は流下方向に滑らかに増大して $X_* > 30$ のブルーム領域で一定値に漸近する様相を示す。Kotsovinos の実験値は遷移領域ならびにブルーム領域で理論値と比較して少し小さめの値となっているが、全体の傾向は理論解のそれとよく一致している。両者の差異については石垣¹⁹⁾ が指摘しているように、ブルーム領域において拡がり幅を算出する際に含まれる誤差に起因



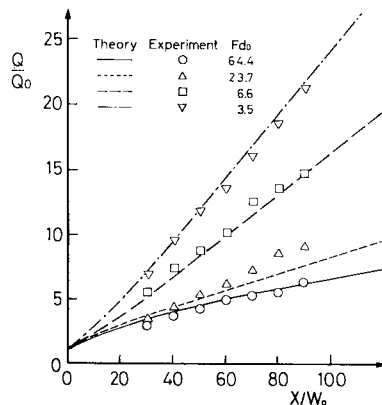
図—10 断面平均リチャードソン数の流下方向変化

しているのかもしれない。また、図中に示した石垣の理論解は噴流領域とブルーム領域においてのみ適用可能である。これに対して、混成モデルの解は両領域での石垣の値とよく一致すると同時に、 R_i' の変化を流下方向に連続的に記述できるという点に特徴がある。

図—4 の $\alpha - R_i'/f'(0)$ の理論曲線を用いることによって、 R_i' の流下方向変化から連行係数 α を算出できる。 α の流下方向変化を示したのが図—11 である。同図より、 α は $X_* < 0.1$ では 0.063 の一定値であるが、遷移領域にさしかかると α の値は急激に増加して、やがて $X_* > 9.0$ の領域では 0.148 の一定値に漸近してゆくことがわかる。つまり、ブルームと噴流とは連行能にお



図—11 連行係数の流下方向変化



図—12 流量の流下方向変化

いて約 2.3 倍の差があることを示している。

最後に、断面積分した流量 Q の流下方向変化の理論値と実験値との比較を示したのが図-12 である。図中の曲線は理論解であり、プロットは実験値である。理論解 ($Q(x)/Q_0$) は実験値と非常によく一致しており、初期密度フルード数 $F_{\rho 0}$ が小さくなるにつれて Q/Q_0 の増加率が大きくなるというフォーストブルームの特性を理論解析はうまく表現している。また、 Q/Q_0 の流下方向の増加率は $F_{\rho 0}$ の大きい間は非線形に増大してゆくが、流下に伴って $F_{\rho 0}$ が小さくなると、ほぼ線形に増加してゆくという理論的結論を、実験結果が裏付けている。

7. 結 語

渦動粘性係数の流下方向変化を考慮した微分・積分混成モデルを展開することにより、フォーストブルームの全流程にわたる流動特性を一貫して記述できる理論を構築した。本研究で得られた主要な結果は以下のとおりである。

(1) 混成モデルの特徴は、任意点での水理量を断面積分量と無次元の分布関数との積で表現することにより、従来の微分モデルと積分モデルの利点をうまく活用した理論展開が可能となる点にある。

(2) 渦動粘性係数の流下方向変化を厳密に評価した結果、連行係数と断面平均リチャードソン数の関数関係が理論的に誘導できた。その結果、連行係数 α は断面平均リチャードソン数 R_i の増大に伴って、均質噴流の $\alpha=0.065$ からブルームの $\alpha=0.156$ へと非線形に増大することがわかった。

(3) その過程で、乱流プラントル数は 0.7 から 0.8 の範囲で変化する。この値は既往の実験値とよく一致する。

(4) 理論的に導出される平均流速、平均浮力および乱流せん断応力の断面内分布は乱流プラントル数 P_r と係数 $\gamma/\lambda (=R_i/E$, 換言すれば、浮力効果の度合い) によって変化する。理論的に求まる分布形状は実験結果を良好に予測している。

(5) 積分方程式系と連行係数に関する理論式とを連立させて、断面積分量の流下方向変化を推算した。その結果、Chen-Rodi の提唱した遞減則ならびに実験結果とよく合致していることがわかった。

最後に本研究の遂行に熱心に協力して頂いた大阪大学学生 (現・日本道路公団勤務) 日置洋平氏に感謝の意を表します。また、貴重なご指摘を頂いた査読者に敬意を表します。

参 考 文 献

- 1) Phillips, W.F. : The effect of Froude number on en-

- trainment in two dimensional line plume, Jour. Fluids Eng., Trans. of the ASME, Vol.103, pp.471~477, 1981.
- 2) Fox, G.D. : Forced plume in a stratified fluid, Jour. Geophy. Res., Vol.75, pp.6818~6835, 1970.
- 3) 室田 明・中辻啓二・日置洋平 : 二次元フォーストブルームの微分・積分混成モデル, 第30回海岸工学講演会論文集, pp.571~575, 1983.
- 4) Ramaprian, B.R. and Chandrasekhara : Study of Vertical plane turbulent jets and plumes, IIHR Report 257, Univ. of Iowa, p.402, 1983.
- 5) Morton, B.R., Taylor, G.I. and Turner, J.S. : Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources, Proc. Roy. Soc. London, A 234, pp.1~23, 1956.
- 6) Görtler, H. : Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes, ZAMM, Vol.22, pp.244~254, 1942.
- 7) Prandtl, L. : Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz., ZAMM, Vol.22, pp.241~243, 1942.
- 8) Reichardt, H. : Impuls- und Wärmeaustausch in freier Turbulenz., ZAMM, Vol.24, pp.268~272, 1944.
- 9) 日野幹雄 : 境界値問題の解法, 朝倉書店, p.210, 1981.
- 10) Rouse, H., Yih, C.S. and Humphreys, H.W. : Gravitational convection from a boundary source, Tellus, Vol.4, pp.201~210, 1952.
- 11) 中込秀樹・平田 賢 : 二次元サーマルブリュームの乱流拡散機構, 日本機械学会論文集 (B), 46 巻, 410 号, pp.2023~2032, 1980.
- 12) 室田 明・中辻啓二・石田悦一 : 鉛直上向きブリュームの混合希釈特性について, 土木学会関西支部講演概要, II-15, 1983.
- 13) 水科篤郎・萩野文丸・武内 洋・和田洋幸 : 鉛直浮力噴流の乱流機構, 第19回日本伝熱シンポジウム講演論文集, pp.109~111, 1982.
- 14) Chen, C.J. and Rodi, W. : Vertical turbulent buoyant jets—A review of experimental data, Pergamon Press, p.83, 1980.
- 15) 室田 明・中辻啓二・石田悦一・日置洋平 : 二次元フォーストブリュームの水理特性, 第31回海岸工学講演会論文集, pp.640~644, 1984.
- 16) Kotsovinos, N.E. : Plane turbulent, buoyant jets, Jour. Fluid Mech., Vol.81, pp.25~44 and pp.45~62, 1977.
- 17) Anwar, H.O. : Experiment on an effluent discharging from a slot into stationary or slow moving fluid of greater density, Jour. Hydr. Res., Vol.7, No.4, pp.411~430, 1969.
- 18) Lee, S.L. and Emmons, H.W. : A study of natural convection above a line fire, Jour. Fluid Mech., Vol.11, pp.353~368, 1961.
- 19) 石垣 博 : 乱流噴流の特性に関する研究, 第4報, 日本機械学会第918回講演会講演論文集, No.820-17, 1982. (1985.3.22・受付)