

## 非対称形アーチの面内自由振動特性

## FREE IN-PLANE VIBRATION OF ARCHES WITH NONSYMMETRICAL AXIS

崎山 毅\*・松田 浩\*\*

By Takeshi SAKIYAMA and Hiroshi MATSUDA

A semianalytical method is developed to study the free in-plane vibration of arches with any shape. The fundamental differential equations are first translated into the integral equations. By applying the approximate solution of integral equation, semianalytical solutions of the original differential equations are obtained. The solutions have discrete type expressions concerned with the equally spaced points of the arch axis or the points on the arch axis corresponding to the equally spaced points of the horizontal distance between the supports. The method is applied to analyze the free in-plane vibration of arches with nonsymmetrical axis because of the unequal height of the supports. Numerical results for the cases of nonsymmetrical, 2-hinged and fixed arches with parabolical axis are compared with the solution of the symmetric arches.

## 1. ま え が き

架設地点の地形、地質的な要因により、左右の両支点間に高低差が生じ、そのため、軸線形状が左右非対称形となるようなリブアーチ橋などにおいて見受けられる、非対称形アーチの面内自由振動を解析した。

構造上の左右対称性をもつ2ヒンジアーチや固定アーチの振動問題に関しては、従来、多くの研究が行われてきている。その自由振動性状についても十分に明らかにされており、逆対称振動は、拱矢比のいかにかわかわらず、曲げ変形主体の振動であること、一方、対称振動は、拱矢比が小さな値から大きな値へと変化するにつれて、軸伸縮変形主体の振動から、軸伸縮変形と曲げ変形との連成振動、さらに、曲げ変形主体の振動へと移行することが知られているが、構造上の左右対称性をもたないリブアーチの自由振動性状に関してはほとんど明らかにされていないようである。

本研究は、左右両支点間の高低差のために、軸線形状が左右非対称となる2ヒンジアーチや固定アーチの自由振動を解析し、同一拱矢比をもつ対称軸線形アーチの自

由振動性状との比較を行うことにより、非対称形アーチの自由振動特性を明らかにしようとするものである。

## 2. 基礎微分方程式

放物線、カテナリー、円あるいはサイクロイドなどの一般的平面曲線を軸線とするアーチ部材において、その任意の微小要素は、十分正確に、円弧とみなすことができる。Fig. 1に示すアーチ微小要素に関して、弧長、曲率半径を、それぞれ、 $ds$ ,  $R(s)$ とすれば、この微小要素に関する力のつり合い条件は次の3式で与えられる。

$$\frac{dQ}{ds} + \frac{N}{R} + p = 0 \dots\dots\dots (1 \cdot a)$$

$$\frac{dN}{ds} - \frac{Q}{R} + q = 0 \dots\dots\dots (1 \cdot b)$$

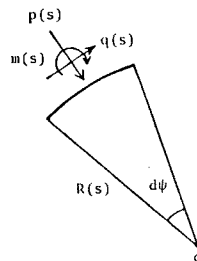


Fig. 1 Arch Element.

\* 正会員 工博 長崎大学助教授 工学部構造工学科  
(〒852 長崎市文教町1-14)

\*\* 正会員 工修 長崎大学助手 工学部構造工学科(同上)

$$\frac{dM}{ds} - Q - m = 0 \dots\dots\dots (1\cdot c)$$

ここに、 $Q, N, M$  は、それぞれ、せん断力、軸力、曲げモーメントである。また、 $p(s), q(s)$  はアーチに作用する荷重の、微小要素法線方向、接線方向の強度であり、 $m(s)$  はモーメント荷重強度である。

次に、アーチの断面力  $Q, N, M$  と変形、すなわち、アーチ軸接線回転角  $\theta$ 、接線方向変位  $w$ 、法線方向変位  $u$  との間には次の関係が成立する。

$$M = -EI \frac{d\theta}{ds} \dots\dots\dots (1\cdot d)$$

$$N = EA \left( \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R} \right) \dots\dots\dots (1\cdot e)$$

$$Q = \frac{GA}{\chi} \left( \frac{du}{ds} + \frac{w}{R} - \theta \right) \dots\dots\dots (1\cdot f)$$

ここに、 $I, A, E, G$  および  $\chi$  は、それぞれ、アーチ部材の断面二次モーメント、断面積、弾性定数、せん断弾性定数および平均せん断応力補正係数である。また、変位  $u, w, \theta$  の正方向は、Fig.1 に示す、荷重  $p, q, m$  の正方向とそれぞれ同じである。

次に、アーチ部材の単位体積質量を  $\rho$  とすれば、自由振動中の慣性力および回転慣性は

$$p = -\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad q = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad m = -\rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

となるゆえ、これらを式(1・a)~(1・c)に代入することにより、リブアーチの自由振動方程式が得られる。

アーチ軸長、アーチ支間、曲げ剛性および伸び剛性を、それぞれ、 $l, L, EI$  および  $EA$  として

$$X_1 = -\frac{L^2 Q}{EI}, \quad X_2 = -\frac{L^2 N}{EI}, \quad X_3 = -\frac{LM}{EI}$$

$$X_4 = \theta, \quad X_5 = \frac{w}{L}, \quad X_6 = \frac{u}{L}, \quad \eta = \frac{s}{l}$$

なる無次元量  $X_1 \sim X_6, \eta$  を導入する。次に、調和振動の前提のもとに、時間変数  $t$  を分離すれば、規準関数  $X_1 \sim X_6$  に関する基礎微分方程式が得られ、次式となる。

$$\frac{dX_i}{d\eta} = \sum_{k=1}^6 G_{ik} \cdot X_k \quad (i=1 \sim 6) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、

$$G_{12} = -\nu r, \quad G_{16} = \nu \lambda^4, \quad G_{21} = \nu r$$

$$G_{25} = \nu \lambda^4, \quad G_{31} = \nu, \quad G_{34} = -\nu \lambda^4 / a^2$$

$$G_{43} = \nu, \quad G_{52} = -\nu / a^2, \quad G_{56} = \nu r$$

$$G_{61} = -\nu / (\mu a^2), \quad G_{64} = \nu, \quad G_{65} = -\nu r$$

$$\text{other } G_{ik} = 0$$

$$\lambda^4 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI}, \quad a^2 = \frac{AL^2}{I}, \quad r = \frac{L}{R}, \quad \nu = \frac{l}{L}, \quad \mu = \frac{G}{\chi E}$$

$\omega$ ：固有円振動数

また、Fig.2 に示すように、アーチ軸接線の傾斜角を  $\varphi(s)$  とすれば、アーチ軸微小長さ  $ds$  と水平軸微小長さ  $dx$  との間には、 $ds = dx / \cos \varphi$  なる関係が成立するゆ

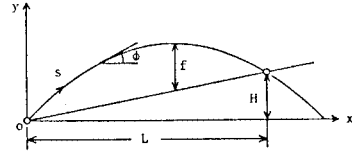


Fig. 2 Arch Axis.

え、水平軸座標系に関して、 $\zeta = x/L$  なる無次元量  $\zeta$  を導入すれば、

$$d\eta = \frac{1}{\nu \cos \varphi} \cdot d\zeta \dots\dots\dots (3)$$

となる。式(3)の関係を用いて、式(2)の変数  $\eta$  を  $\zeta$  に変換すれば、次式が得られる。

$$\frac{dX_i}{d\zeta} = \sum_{k=1}^6 \frac{G_{ik}}{\nu \cos \varphi} \cdot X_k \quad (i=1 \sim 6) \dots\dots\dots (4)$$

基礎微分方程式(2)または(4)を用いて、アーチの自由振動解析を行うことができるが、アーチ軸線形に応じて、アーチ軸座標系で表示された式(2)と水平軸座標系で表示された式(4)とを使い分けることにより、解析の簡易化を図ることができる。たとえば、円形アーチの場合には式(2)を用い、また、非円形アーチの場合には式(4)を用いることにより、曲率半径や接線傾斜角などの入力データの作成を簡易化することができる。なお、本論文においては、非対称形アーチの自由振動性状の解析を目的とするため、基礎微分方程式(4)を用いることとする。

### 3. 基礎微分方程式の近似的一般解

任意の平面曲線を軸線とするアーチの自由振動に関する基礎微分方程式(4)は、アーチ部材の曲率半径  $R(\zeta)$  および接線傾斜角  $\varphi(\zeta)$  を変数係数とする連立微分方程式である。アーチ部材の軸線形状に任意性を保持したまま、これらの変数係数連立微分方程式の一般解を解析的に求めることはほとんど不可能であると判断されるゆえ、本論文においては、近似的手法に基づいて一般解を求めることとする。

水平軸上の無次元変数  $\zeta$  の原点を部材左端にとり、基礎微分方程式(4)を変域  $[0, \zeta]$  で積分すれば、次の積分方程式が得られる。

$$X_i(\zeta) = X_i(0) + \int_0^\zeta \sum_{k=1}^6 \frac{G_{ik}(\xi)}{\nu \cos \varphi(\xi)} \cdot X_k(\xi) d\xi \dots\dots\dots (5)$$

次に、全変域  $[0, 1]$ 、すなわち、アーチ支間を  $m$  等分し、Fig.3 に示すように、左側等分点より順に、 $0, 1, 2, \dots, i, \dots, m$  なる番号を付け、任意点  $i$  に対応する諸量に添字  $i$  を付与することとして、積分方程式(5)に等間隔の数値積分法を繰り返し適用し、左側等分点より順に解を求めてゆけば、基礎微分方程式(4)の、任

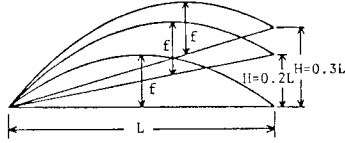


Fig. 3 Discrete Points on Arch Axis.

意点  $i$  に対応する、離散表示された近似的な一般解が求められ、次式となる。なお、この近似的一般解を求める方法の詳細については文献5)を参照されたい。

$$X_{ii} = \sum_{n=1}^6 d_{im} \cdot X_{n0} \dots \dots \dots (6)$$

$(t=1\sim 6, i=1\sim m)$

ここに、

$$d_{im} = \delta_{im} + \sum_{j=0}^i \sum_{k=1}^6 \beta_{ij} \frac{G_{ikj}}{\nu \cos \varphi_j} \cdot d_{kmj}$$

$\beta_{ij} = \alpha_{ij}/24m$ ,  $\delta_{im}$ : Kronecker's delta

なお、 $\beta_{ij}$  は数値積分法における重み係数であり、Simpson の多分割数値積分法を用いた場合の  $\alpha_{ij}$  値は文献5)を参照されたい。

近似的一般解(6)に含まれる左支点の諸量  $X_{n0}$  はいわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、任意点  $i$  に対応する諸量  $X_{ni}$  を積分定数  $X_{n0}$  に関係づける要素  $d_{im}$  は、伝達マトリクス法における伝達マトリクスに相当するものである。

### 4. 数値解析

本章で数値解析するリブアーチの軸線形は放物線とする。

左右両支点間に高低差をもつ非対称形アーチの面内自由振動特性を明らかにするため、Fig. 4 に示すような、やや大きめの高低差比  $H/L=0.2, 0.3$  をもつ、2ヒンジアーチおよび固定アーチの自由振動解析を行い、Fig. 4 に示す、同一スパン  $L$ 、同一拱矢比  $f/L$  をもつ対称形アーチの自由振動性状との比較を行った。なお、本論文においては、対称形アーチの逆対称振動および対称振動に対応する、非対称形アーチの振動を、それぞれ、逆対称的振動 (Semiantisymmetric Vibration) および対称的振動 (Semisymmetric Vibration) と称することとする。

ここで、2ヒンジアーチを例にとり、固有値の計算方法について簡単に述べる。まず左支点の境界条件  $M(0)$

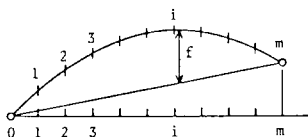


Fig. 4 Parabolic Arch with Unequal Height of Supports.

$= w(0) = u(0) = 0$ , より,  $X_{30} = X_{50} = X_{60} = 0$ , となる。したがって、近似的一般解(6)を用いて、右支点の境界条件  $M(L) = w(L) = u(L) = 0$ , すなわち,  $X_{3m} = X_{5m} = X_{6m} = 0$ , を書けば、積分定数  $X_{10}, X_{20}, X_{40}$  に関する次の連立方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} d_{31m} & d_{32m} & d_{34m} \\ d_{51m} & d_{52m} & d_{54m} \\ d_{61m} & d_{62m} & d_{64m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{10} \\ X_{20} \\ X_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

この係数行列式から振動数方程式が得られる。係数行列式の要素中に、振動数パラメーター  $\lambda$  が含まれているので、この係数行列式の値を0とする  $\lambda$  値を試行錯誤法によって求めることにより、固有値が計算される。

Fig. 5 に非対称2ヒンジアーチの逆対称的、二次振動および対称的、二次振動の固有振動数曲線を示す。

一般に、曲げ変形が主体となる逆対称的振動においては、高低差比  $H/L$  の増大に伴って、すなわち、非対称性の度合の増大に伴って、固有振動数は低下することが示されている。この曲げ振動数低下の主な原因としては、高低差比  $H/L$  の増大に伴って、非対称形アーチの支点間距離およびアーチ軸長が長くなることが考えられる。また、対称的振動においては、曲げ変形が主体となる場合、すなわち、固有振動数曲線のゆるやかな右下り部分においては、逆対称的振動の場合と全く同様に、高低差比  $H/L$  の増大に伴って、固有振動数は低下するが、軸伸縮変形が主体となる場合、すなわち、固有振動数曲線の右上り部分においては、高低差比  $H/L$  の増大に伴って、固有振動数は、逆に、高くなることが示されている。高低差比の増大に伴う軸伸縮振動数増加の主な原因としては、拱矢比  $f/L$  一定の場合でも、高低差比の増大に伴ってアーチ軸長と支点間距離との比が増加し、軸伸縮変形に対する振動系の剛性が増大するためと考えられる。こ

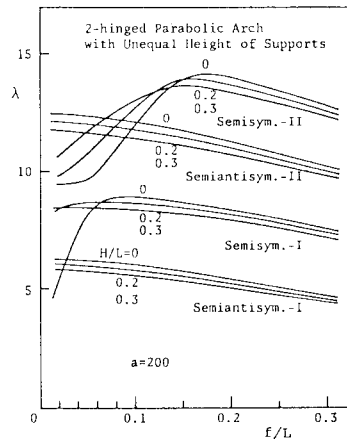


Fig. 5 Frequency Curves of 2-hinged Parabolic Arch with Unequal Height of Supports.

のことは、対称形アーチの軸伸縮振動において認められる、拱矢比の増加によるアーチ軸長と支点間距離との比の増加に伴う軸伸縮振動数の増加傾向と同様である。

次に、対称形アーチ ( $H/L=0$ ) においては、拱矢比  $f/L$  が 0 に近づけば、アーチは直線ばりに近づき、振動性も直線ばりのそれに近づくことは周知のとおりで、Fig. 5 においても十分にその傾向が示されているが、非対称形アーチ ( $H/L \neq 0$ ) においては、拱矢比  $f/L$  の 0 への接近はアーチクラウンの支点への接近を意味するのみで、 $f/L=0$  の極限においてもアーチ軸は直線とはならない。したがって、非対称形アーチにおける拱矢比  $f/L$  の 0 への接近に伴う固有振動数の変化は図示のようになり、直線ばりの固有振動数とは無関係である。

Fig. 6 は、細長比  $a=200$ 、拱矢比  $f/L=0.2$  の非対称形アーチと対称形アーチの振動モードを比較したものである。実線は高低差比  $H/L=0$  の対称形アーチの鉛直変位モードおよび水平変位モードであり、点線は高低

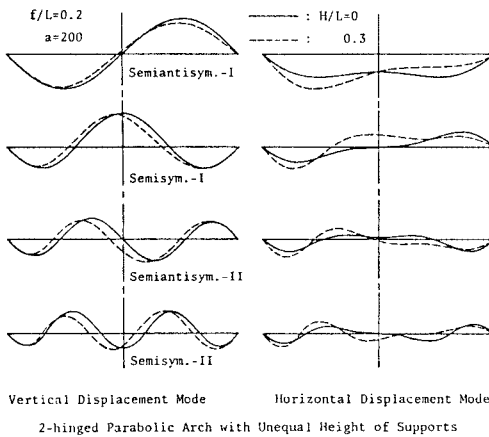


Fig. 6 Free Vibrational Modes.

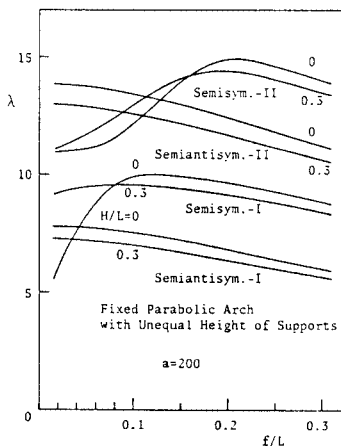


Fig. 7 Frequency Curves of Fixed Parabolic Arch with Unequal Height of Supports.

差比  $H/L=0.3$  の非対称形アーチの変位モードである。本例の非対称形アーチは、Fig. 4 に示すように、右支点が左支点より上部にあり、高低差比  $H/L$  の増大に伴って、アーチクラウンが右側に移行するようなアーチである。Fig. 6 により、鉛直変位モードおよび水平変位モードの節の位置は、高低差比の増大に伴って、アーチクラウンの移行方向とは逆の方向に移動することが明らかとなる。

Fig. 7 は、非対称形固定アーチの固有振動数曲線と対応する対称形アーチの固有振動数曲線を比較したものである。この非対称形アーチにおいても、2ヒンジアーチの場合と同様の、対応する対称形アーチに対する振動特性が認められる。

### 5. あとがき

任意軸線形をもつリブアーチの面内自由振動解析法を提示し、これを応用して、左右両支点間に高低差のある非対称形アーチの自由振動特性を明らかにすることができた。本文においては、支点間に高低差をもつ非対称形アーチの、対称形アーチに対する、自由振動特性を明らかにすることを目的として、両者間の相違が、比較的、明瞭であった高低差比  $H/L=0.2, 0.3$  の場合について解析結果を示した。なお、既設の非対称形アーチにおいて見受けられる程度の高低差比  $H/L=0.1$  の場合においては、固有振動数および振動モードに関して、対称形アーチとの相違は些少であることも確かめられた。数値解析は放物線形の2ヒンジアーチおよび固定アーチについて行ったが、カテナリー、円、サイクロイドその他の軸線形をもち、その他の境界条件をもつ非対称形アーチに関しても全く同様に解析することができること、また、変断面の非対称形アーチの解析にも応用できることはいうまでもない。

### 参考文献

- 1) Waltking, F.W. : Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Kreisbogenträgern, Ing. Arch., Bd. 5, pp. 429~449, 1934.
- 2) Austin, W.J. and Veletsos, A.S. : Free Vibration of Arches Flexible in Shear, Proc. ASCE, EM4, pp. 735~753, 1973.
- 3) Volterra, E. and Morell, J.D. : A Note of the Lowest Natural Frequency of Elastic Arcs, Trans. ASME, J. Appl. Mech., pp. 744~746, 1960.
- 4) Romanelli, E. and Laura, P.A. : Fundamental Frequencies of Non-Circular, Elastic, Hinged Arcs, Jour. Sound and Vibration, Vol. 24, pp. 17~22, 1972.
- 5) 崎山 毅 : 初期荷重を有する変断面任意形アーチの面内自由振動解析, 土木学会論文報告集, 第 287 号, pp. 33~44, 1979.

(1985. 6. 10. 受付)