

## 断面変形を考慮した変断面直線多室箱桁橋の一解析法

### AN ANALYSIS OF MULTI-CELL BOX GIRDER BRIDGES WITH VARIED CROSS SECTIONS UNDER CONSIDERATION OF CROSS SECTIONAL DISTORTION

白木恒雄\*

By Tsuneo USUKI

This paper describes an extended engineering beam theory that has been developed for the analysis of cellular box girder bridges in the linear elastic range. The solution includes the distortion of the cross section and the influence of shear deformation. The numerical analysis is based on the modified transfer matrix method, which enables to analyse long span beams. As a numerical example a four span continuous concrete box girder bridge with a cross section of four cells and of variable web-height was treated.

#### 1. まえがき

土木構造物は、近年長大薄肉化しているが、その代表的なものに橋梁の上部構造が挙げられる。特に箱桁形式のものには広幅員、長支間の橋梁が増えている。幅員が広くなると、単一箱桁では不経済な断面となるため、多室箱桁にせざるを得ない。プレストレストコンクリート橋は死荷重を軽減する目的で断面は薄く、隔壁間隔は大きくする傾向にあるので断面の変形による応力を正しく把握する必要がある。鋼箱桁橋では、断面変形を許容しないために密に中間隔壁を設けているが、最適な隔壁間隔の決定および隔壁剛度の設定を行うには、やはり断面変形の挙動を正しく知る必要がある。

断面変形を考慮して多室箱桁を解析する方法としては、折板理論による方法、構造系を有限個の要素に分割して解く方法、構造系を格子桁に変更して解く方法、拡張曲げ理論による方法などがある。しかし、長大な多室箱桁を解析する場合、折板理論では種々の境界条件に対する適応性がきわめて悪く、有限要素法などのごとく構造系を細分する方法では経済性がきわめて悪く、格子桁

による構造近似では解析結果の信頼性が薄い。したがって、箱桁を扱うには、はりの曲げ理論を断面変形にまでひろげた「拡張曲げ理論」による方法が最も有効な解析手段と思われる。ところが、単一箱桁橋に比べて、多室箱桁橋の断面変形をはりの理論で扱った報告はきわめて少ない。特に、中間隔壁をもつ長大な連続多室箱桁橋を解析した報告は、著者の知るかぎりでは、ない。

以上の観点より、本報告では、はりの理論を用いて多室箱桁の断面変形の挙動を定式化し、曲げ、ねじりなどの断面形不変の変形パターンと並列に解析する方法を示した。単一箱桁の断面変形については、すでに著者の報告<sup>1),2)</sup>があるので、本論文では、多室箱桁に的を絞って取り扱っている。

長大な連続桁橋は、中間支承部でウェブ高さを大きくし、スパン中央部付近で小さくする変断面桁を採用することが多い。そこで、本報告でも変断面桁を扱えることを考慮して理論の展開を行った。

数値計算例として、4径間連続4室箱桁橋に偏載荷重が作用する場合を取り上げ、求められた応力値に対し若干の考察を加えた。本例題は全長360mの長大橋梁なので、通常の伝達マトリックス法に精度の改善を施した「修正伝達マトリックス法<sup>3)</sup>」を用いて解を得た。

\* 正会員 Dr.-Ing., 工博 東京理科大学助教授 理工学部 土木工学科 (〒278 野田市山崎 2641)

## 2. 座標と仮定

断面重心を通る橋軸方向の座標を  $x$  軸とし、それに直角に断面主軸  $y, z$  を選ぶ。また、 $x$  軸に直角の断面において、各板の肉厚中心線を通る輪郭線座標を  $s$ 、それに直角で板厚方向の座標を  $n$  とする (図-1)。輪郭線座標  $s$  の原点は断面重心に一致させておき、板厚  $t=0$  の仮定の薄板で重心とはりを構成する板を結合しておく。この仮定板の考えは文献4) による。

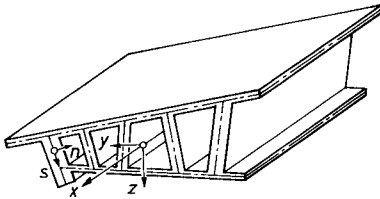


図-1 座標系

本論文で使用した主な仮定を以下に記す。

- a) 断面は肉厚中心線が直線となる板を組み合わせた中空閉断面をもつ。
- b) 板ごとに板厚  $t$  は一定とし、その板の幅  $b$  に比べて十分小さい。
- c) 構造材料は Hooke の弾性則を満足する。
- d) 輪郭線座標方向の伸縮ひずみは零とする。
- e) 断面が変形するときの重心点  $S$  およびせん断中心点  $M$  の変位は微小として無視する。
- f) 断面変形による変位量の算定において、系は隅角部をヒンジ結合された折板構造とみなす。
- g) 断面変形による横曲げモーメントの算定では、系は隅角部を剛結されたラーメン構造とみなす。

## 3. 基礎方程式の誘導

### (1) ひずみと変位

はりのある断面の肉厚中心線上の任意の点  $A$  の座標を  $x, y, z$  とする。この点  $A$  の  $x, y, z$  軸方向の変位をそれぞれ  $u, v, w$  とするならば、その点における変位とひずみの間には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1 \cdot a \sim f)$$

また、点  $A$  の輪郭線座標  $s$  の方向の変位を  $f$  と表わすならば、 $x$ - $s$  平面のせん断ひずみは次のごとくなる。

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \dots\dots\dots (2)$$

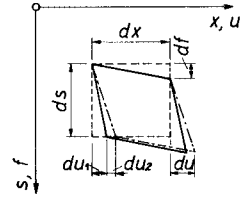


図-2 せん断変形

上式は二次せん断ひずみを考慮していないが、これを考慮するために軸方向反り  $u$  を低減させる。すなわち、二次せん断ひずみを無視したときの反りを  $u$ 、二次せん断ひずみによる反りの減少量を  $u_2$  と表わすならば、最終的な軸方向反り量  $u_1$  は図-2 より次式となる。

$$u_1 = u - u_2 \dots\dots\dots (3)$$

初等せん断ひずみおよび二次せん断ひずみを、それぞれ  $\gamma_{xs,pr}$  および  $\gamma_{xs,se}$  と表わすならば、総合せん断ひずみ  $\gamma_{xs}$  は次式で与えられる。

$$\gamma_{xs} = \gamma_{xs,pr} + \gamma_{xs,se} \dots\dots\dots (4)$$

式 (3)、(4) を用いて式 (1)、(2) を書き直すところとなる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5 \cdot a \sim f)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xs,pr} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \gamma_{xs,se} = \frac{\partial}{\partial s} (-u_2) \\ \gamma_{xs} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6 \cdot a \sim c)$$

### (2) 基本条件式

#### a) ひずみの条件

構造物が何らかの作用を受けて変形するとき、内部に発生するひずみ  $\gamma_{ij}$  は、断面剛のひずみ成分 ( $\gamma_{ij}$ )<sub>R</sub> と断面変形ひずみ成分 ( $\gamma_{ij}$ )<sub>D</sub> との和として与えられる。変位量も同様に考えられる。

断面剛の仮定をひずみで表現すると、次式となる。

$$(\epsilon_y)_R = 0, \quad (\epsilon_z)_R = 0, \quad (\gamma_{yz})_R = 0 \dots\dots\dots (I)$$

これに対し、断面変形のときのひずみの状態は、 $(\epsilon_y)_D \neq 0, (\epsilon_z)_D \neq 0, (\gamma_{yz})_D \neq 0$  である。しかし、仮定 f) に示したごとく、部材角のみの変形を考えるならば、仮定 d) も考慮すると次式を得る。

$$(\epsilon_y)_D = 0, \quad (\epsilon_z)_D = 0, \quad (\gamma_{yz})_D = 0 \dots\dots\dots (II)$$

#### b) 軸方向反りの連続条件

閉じた部屋 [i] をもつ直線ばりの軸方向反り  $u_i$  の連続条件は、二次せん断変形を考慮するとき、式 (3) より反り  $u$  および反り  $u_2$  の両方に対して次の条件式が成立しなければならない。



$$\left. \begin{aligned} y(s) &= \int_0^s \cos \alpha ds \\ z(s) &= \int_0^s \sin \alpha ds \\ w_r(s) &= \int_0^s \left( r_r - \frac{\Psi_r}{t} \right) ds \\ w_{r_i}(s) &= \int_0^s \left( r_{r_i} - \frac{\Psi_{r_i}}{t} \right) ds \quad (i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15 \cdot a \sim d)$$

上の式 (14) において  $\xi'(x)$  は  $s$  に関する積分により発生した積分定数 (すなわち,  $x$  のみの関数) であり, 物理的には重心点  $S$  の  $x$  軸方向の変位の大きさに  $-1$  を掛けたものである。

(5) 応 力

式の誘導を簡潔に表現するため, ベクトル表記を導入する。変位関数ベクトル  $V$ , 方向ベクトル  $r$ , 初等せん断流ベクトル  $\Psi$ , 単位反り関数ベクトル  $w$  を次のごとく定義する。ただし, ベクトル右肩の  $T$  は転置を意味する。

$$\left. \begin{aligned} V^T &= (\xi \quad \eta \quad \zeta \quad \varphi \quad \gamma_1 \dots \gamma_m) \\ r^T &= (0 \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha \quad r_r \quad r_{r_1} \dots r_{r_m}) \\ \Psi^T &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad \Psi_r \quad \Psi_{r_1} \dots \Psi_{r_m}) \\ w^T &= (1 \quad y \quad z \quad w_r \quad w_{r_1} \dots w_{r_m}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16 \cdot a \sim d)$$

これらを用いると, 軸方向反りの式 (14) は  $u(x, s) = -w^T V'$  ..... (17)

と表わせる。この式は, 式 (3) の関係を用いて  $u_1(x, s) = -w^T V'_1$   $u_2(x, s) = -w^T V'_2$  ..... (18 \cdot a, b)

と分解できる。ただし, 次の関係式が存在する。

$$V_1 = V - V_2 \dots\dots\dots (19)$$

垂直ひずみの定義式 (5 \cdot a) に式 (18 \cdot a) を代入して, Hooke 則を併用すると, 次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -w^T V'_1 \\ \sigma_x &= -E w^T V'_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20 \cdot a, b)$$

ただし,  $\sigma_x$  は垂直応力,  $E$  は縦弾性係数である。

初等せん断ひずみの定義式 (6 \cdot a) と軸方向反りの連続条件式 (III) を用いて, Hooke 則を併用すると

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{x_s, \sigma r} &= \frac{\Psi^T}{t} V' \\ \tau_{x_s, \sigma r} &= G \frac{\Psi^T}{t} V' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21 \cdot a, b)$$

を得る。ただし,  $\tau_{x_s, \sigma r}$  は初等せん断応力,  $G$  は横弾性係数である。

二次せん断ひずみおよび二次せん断応力は二通りの方法で求められる。すなわち, 二次せん断ひずみの定義式 (6 \cdot b) に式 (18 \cdot b) を代入し, Hooke 則を用いれば,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\gamma}_{x_s, se} &= \dot{w}^T V'_2 \\ \tilde{\tau}_{x_s, se} &= G \dot{w}^T V'_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22 \cdot a, b)$$

となる。ただし,  $\cdot$  印は輪郭線座標  $s$  に関する微分を意味する。また, 波印  $\sim$  は次に求める二次せん断ひずみおよび応力と区別するために付記した。

他の方法とは, 応力のつり合い条件式 (V) を用いる方法である。式 (V) に垂直応力の式 (20 \cdot b) を代入し,  $s$  に関して積分し, 軸方向反りの連続条件 (IV)' を用いて積分定数を決定するならば, Hooke 則を用いて,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{x_s, se} &= \frac{E}{G} \frac{(S - \Phi)^T}{t} V'_1 - \frac{1}{G} \frac{f_N - q_N}{t} \\ \tau_{x_s, se} &= E \frac{(S - \Phi)^T}{t} V'_1 - \frac{f_N - q_N}{t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23 \cdot a, b)$$

と与えられる。ただし, 次のごとく定義している。

$$\left. \begin{aligned} S(s) &= \int_{s_0}^s w dF \\ f_N(x, s) &= \int_{s_0}^s p_N dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24 \cdot a, b)$$

ベクトル  $\Phi$  と関数  $q_N$  は断面の室ごとに一定値をとる。

以上より, 総合せん断ひずみ  $\gamma_{x_s}$  および総合せん断応力  $\tau_{x_s}$  は, 式 (21) および (23) の和として次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{x_s} &= \frac{\Psi^T}{t} V' + \frac{E}{G} \frac{(S - \Phi)^T}{t} V'_1 - \frac{1}{G} \frac{f_N - q_N}{t} \\ \tau_{x_s} &= G \frac{\Psi^T}{t} V' + E \frac{(S - \Phi)^T}{t} V'_1 - \frac{f_N - q_N}{t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25 \cdot a, b)$$

二通りの方法で求められた二次せん断ひずみおよび応力において, それらのなす仕事の等価性を仮定するならば, 次のごとき仮想荷重および仮想変位の式が成立する<sup>5)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \int_V \delta \tau_{x_s, se} \gamma_{x_s, se} dV &= \int_V \delta \tau_{x_s, se} \tilde{\gamma}_{x_s, se} dV \\ \int_V \tau_{x_s, se} \delta \gamma_{x_s, se} dV &= \int_V \tau_{x_s, se} \delta \tilde{\gamma}_{x_s, se} dV \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26 \cdot a, b)$$

ただし,  $\delta$  は仮想の応力またはひずみを意味し,  $\int_V dV$  は体積積分を意味する。この式 (26 \cdot a) に式 (21) および (22) を代入し, 整理すると次式を得る。

$$\frac{E}{G} R V'_1 - \frac{1}{G} \int_F \frac{(S - \Phi)}{t} \frac{(f_N - q_N)}{t} dF + F(V' - V'_1) = 0 \dots\dots\dots (27)$$

ただし, 反り抵抗マトリックス  $F$  およびせん断修正マトリックス  $R$  は次のごとく定義して用いた。

$$\left. \begin{aligned} F &= \int_F w w^T dF \\ R &= \int_F \frac{(S - \Phi)}{t} \frac{(S - \Phi)^T}{t} dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28 \cdot a, b)$$

(6) 直交条件

軸方向反りの連続条件式 (III) に式 (17) を代入した式および軸方向反りの連続条件式 (IV)' に式 (23 \cdot a) を代入した式のそれぞれに前から定数ベクトル  $\Psi$  を掛けると次のごとき直交条件式を得る。

$$\int_F \frac{\Psi}{t} \frac{\partial}{\partial s} w^T dF = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{G} \int_F \frac{\Psi}{t} \frac{(S-\Phi)^T}{t} dF V_1'' - \frac{1}{G} \int_F \frac{\Psi}{t} \frac{(f_N - q_N)}{t} dF = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29 \cdot a, b)$$

(7) 横曲げモーメント

箱桁の断面を単位幅のラーメンとみなすと、隅角部ごとに発生する未知横曲げモーメントのベクトル  $m$  と隅角部の角度変化量のベクトル  $\gamma$  の間には応力法の関係式

$$\Delta m - E\gamma = 0 \dots\dots\dots (30)$$

が存在する (図-4)。ただし、マトリックス  $\Delta$  は通常の応力法の係数マトリックスの縦弾性係数倍されたものである<sup>6)</sup>。隅角部の角度変化量のベクトル  $\gamma$  は断面の変形状 (図-3) より決まる変換マトリックス  $T$  を用いて変位関数ベクトル  $V$  と次のごとく対応づけられる。

$$\gamma = TV \dots\dots\dots (31)$$

これらの式 (30), (31) より  $\gamma$  を消去して、結局、横曲げモーメントベクトル  $m$  は次のごとく表わせる。

$$m = E\Delta^{-1}TV \dots\dots\dots (32)$$

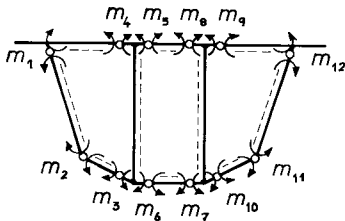


図-4 未知力を解放した基本系

(8) 支配微分方程式

外力の仮想仕事を  $A_a$ , 内力の仮想仕事を  $A_i$  と表わすと、仮想変位の原理より

$$\delta A_a + \delta A_i = 0 \dots\dots\dots (33)$$

となる。この式の各項は次のごとく与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \delta A_a &= \iint_F p_q \delta v_q ds dx + \iint_F p_N \delta u_1 dF dx \\ &\quad + \sum_i P_{qi} \delta v_{qi} + \sum_j P_{Nj} \delta u_{1j} \\ \delta A_i &= - \iint_F (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_s \delta \epsilon_s + \sigma_n \delta \epsilon_n + \tau_{xs} \delta \gamma_{xs} \\ &\quad + \tau_{sn} \delta \gamma_{sn} + \tau_{nx} \delta \gamma_{nx}) dF dx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34 \cdot a, b)$$

ただし、 $p_q$  および  $P_q$  は、はりの軸線に直角で板の表面に作用する分布荷重および集中荷重である。 $p_N$  および  $P_N$  は、はりの軸線に平行に作用する分布荷重および集中荷重である。

薄肉構造物の仮定 b) より、上式において  $\sigma_n = \tau_{sn} = \tau_{nx} = 0$  とおける。また、断面変形により発生する垂直応力  $\sigma_s$  の仮想仕事は、横曲げモーメント  $m$  の仮想仕事に書き換えることができる。すなわち、式 (34・b) は

次のごとき式となる。

$$\delta A_i = - \iint_F \left[ \int_F (\sigma_x \delta \epsilon_x + \tau_{xs} \delta \gamma_{xs}) dF + m^T \delta \gamma \right] dx \dots\dots\dots (34 \cdot b')$$

横方向荷重  $p_q$  または  $P_q$  の作用方向変位  $v_q$  は

$$v_q(x, s) = r^{*T} V \dots\dots\dots (35)$$

と与えられる。ただし、荷重作用方向ベクトル  $r^*$  は

$$r^{*T} = (0 \quad \cos \alpha^* \quad \sin \alpha^* \quad r_1^* \quad r_{p1}^* \dots r_{pm}^*) \dots\dots\dots (36)$$

となる。 $\alpha^*$  は  $y$  軸と荷重とのなす角、 $r_1^*$  はせん断中心  $M$  より荷重までの距離、 $r_{pi}^*$  は断面変形の基本変形 (i) のときの回転中心  $V$  より荷重までの距離である。

仮想変位の原理式 (33) に式 (34) を代入し、すでに求められた式 (18・a), (20), (25) を代入し、式 (26・b) の関係を用いて整理するならば、最終的に次のごとき支配方程式と 2 つの境界条件式を得る。

$$\left. \begin{aligned} EFV_1'' - GJV'' + EI_k \psi &= \int_F p_q r^* ds + \int_F p'_N w dF \\ EFV_1'' - GJV'' - \int_F p_N w dF + \sum_i P_{qi} r_i^* \Big|_{x_0}^{x_1} &= 0 \\ EFV_1'' + \sum_j P_{Nj} w_j \Big|_{x_0}^{x_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37 \cdot a-c)$$

ただし、ねじり抵抗マトリックス  $J$  およびラーメン抵抗マトリックス  $I_k$  は次のごとく定義して用いた。

$$\left. \begin{aligned} J &= \int_F \frac{\Psi}{t} \frac{\Psi^T}{t} dF \\ I_k &= T^T \Delta^{-1} T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38 \cdot a, b)$$

(9) 断面力

反りモーメントベクトル  $M$ , 初等せん断力ベクトル  $Q_{Dr}$ , 二次せん断力ベクトル  $Q_{se}$ , そして総合せん断力ベクトル  $Q$  を次のごとく定義する。

$$\left. \begin{aligned} M &= \int_F \sigma_x w dF \\ Q_{Dr} &= \int_F \tau_{xs,Dr} r dF \\ Q_{se} &= \int_F \tau_{xs,se} r dF \\ Q &= \int_F \tau_{xs} r dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39 \cdot a-d)$$

これらの要素を具体的に表わすと次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} M^T &= (N_x \quad M_z \quad M_y \quad M_{wT} \quad M_{wp1} \dots M_{wpm}) \\ Q_{Dr}^T &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad M_{T,Dr} \quad Q_{p1,Dr} \dots Q_{pm,Dr}) \\ Q_{se}^T &= (0 \quad Q_y \quad Q_z \quad M_{T,se} \quad Q_{p1,se} \dots Q_{pm,se}) \\ Q^T &= (0 \quad Q_y \quad Q_z \quad M_T \quad Q_{p1} \dots Q_{pm}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40 \cdot a-d)$$

ただし、次なる関係式が存在している。

$$\left. \begin{aligned} M_T &= M_{T,Pr} + M_{T,se} \\ Q_{p1} &= Q_{p1,Dr} + Q_{p1,se} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ Q_{pm} &= Q_{pm,Dr} + Q_{pm,se} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

上式 (39) の応力の項に式 (20・b), (21・b), (23・b) を代入, 整理すると, 次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} M &= -EFV_1' \\ Q_{pr} &= GJV' \\ Q_{se} &= -EFV_1'' + \int_F p_N w dF \\ Q &= GJV' - EFV_1'' + \int_F p_N w dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42 \cdot a \sim d)$$

これらの式より, 次なる関係式が見出せる.

$$Q_{se} = M' + \int_F p_N w dF \dots\dots\dots (43)$$

(10) 反り抵抗マトリックスの直変化

座標系として主軸を採用し, ねじりの回転中心としてせん断中心を考えているため, 断面剛の仮定による単位反り関数はすべて直交する. しかし, 断面変形は図—3のごとく任意に基本変形を選んであるため, 反りは互いに連成している. これらの連成を解除するには, 次のとき3つの条件設定を行い, 順次直変化してゆく.

- i) 「断面変形の反り」と「軸力および曲げ変形の反り」は互いに直交する.
- ii) 「断面変形の初等せん断ひずみ」と「ねじりの初等せん断ひずみ」は互いに直交する.
- iii) 「断面変形の反り」は互いに直交し, 同時に, 「断面変形の初等せん断ひずみ」も互いに直交する.

以上の3条件を満足する直変化マトリックス  $K$  を求め, 式 (44) に示すように変換するならば, (部分) 直変化された反り抵抗マトリックス  $F$  および直変化されたせん断抵抗マトリックス  $J$  が与えられる. 条件設定 ii) に示したごとく, ねじりと断面変形はせん断ひずみを用いて直変化したため, 反り抵抗マトリックスのねじりと断面変形の連成項は零にならない. また, ラーメン抵抗マトリックスの断面変形の成分はすべて互いに連成する.

$$\left. \begin{aligned} K^T F K &\Rightarrow F \\ K^T J K &\Rightarrow J \\ K^T I_k K &\Rightarrow I_k \\ K^T R K &\Rightarrow R \\ K^T w &\Rightarrow w \\ K^T \frac{(S-\Phi)}{t} &\Rightarrow \frac{(S-\Phi)}{t} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} K^T r &\Rightarrow r \\ K^T r^* &\Rightarrow r^* \\ K^T M &\Rightarrow M \\ K^T Q_{pr} &\Rightarrow Q_{pr} \\ K^T Q_{se} &\Rightarrow Q_{se} \\ K^T Q &\Rightarrow Q \\ K^{-1} V &\Rightarrow V \\ TK &\Rightarrow T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

(11) 応力の断面力による表示

初等せん断応力を断面力で表わす. 式 (21・b) および式 (42・b) からマトリックス  $V'$  を消去すると次式を得る.

$$\tau_{x,pr} = \frac{\Psi^{*T}}{t} J^{*-1} Q_{pr}^* \dots\dots\dots (45)$$

ただし,  $J^*$  は対角マトリックス  $J$  において, 対角要素の零となる項の行および列を削除した正則な対角マトリックスを意味する. また,  $\Psi^*$  および  $Q_{pr}^*$  は  $J$  から  $J^*$  への変換に対応する列を除いて得られるベクトルである.

同様に, 式 (20・b), (42・a) から  $V_1'$  を, そして, 式 (23・b), (42・c) から  $V_1''$  を消去すると, 垂直応力および二次せん断応力は次のごとく断面力で表わせる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= w^T F^{-1} M \\ \tau_{x,se} &= -\frac{(S-\Phi)^T}{t} F^{-1} Q_{se} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46 \cdot a, b)$$

ただし, ここでは荷重項は省略して記述した.

(12) 連立1階常微分方程式

変位関係ベクトル  $V_1$  を  $x$  で微分したものを「たわみ角ベクトル」とよび, 次式で定義する.

$$\theta_1 = V_1' \dots\dots\dots (47)$$

そして, 状態量のベクトル  $z$  を次のように定義する.

$$z^T = (V : \theta_1 : M : Q) \dots\dots\dots (48)$$

式 (42) を用いて  $z$  に関する連立1階常微分方程式

$$\frac{dz}{dx} = Az + b(x) \dots\dots\dots (49)$$

を求めるならば, 係数マトリックス  $A$  および荷重項ベクトル  $b(x)$  は式 (51), (52) で与えられる. ただし, この式中の  $E$  は単位マトリックス,  $D$  は次式で定義した.

$$D = F^{-1} R F^{-1} \dots\dots\dots (50)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & (E+DJ)^{-1} & 0 & \frac{1}{G}(E+DJ)^{-1}D \\ 0 & 0 & -\frac{1}{E}F^{-1} & 0 \\ 0 & -GJ(E+DJ)^{-1} & 0 & E-J(E+DJ)^{-1}D \\ EI_k & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (51)$$

$$b(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{G}(E+DJ)^{-1} \left\{ F^{-1} \int_F \frac{(S-\Phi)}{t} \frac{(f_N - q_N)}{t} dF - D \int p_N w dF \right\} \\ 0 \\ -J(E+DJ)^{-1} \int_F \frac{(S-\Phi)}{t} \frac{(f_N - q_N)}{t} dF - [E - J(E+DJ)^{-1}] \int_F p_N w dF \\ - \int p_Q r^* ds \end{bmatrix} \dots\dots\dots (52)$$

4. 解析方法

(1) 伝達マトリックスの作成

求められた連立1階常微分方程式(49)を解いて伝達マトリックスを作成することができる。格間①の伝達マトリックスの断面形に依存するマトリックスを  $U_i$ 、荷重に依存するベクトルを  $g_i$  とおくと

$$z_{i+1} = U_i z_i + g_i \dots\dots\dots (53)$$

の関係が存在する。定断面のはりでは、マトリックス  $U_i$  およびベクトル  $g_i$  は文献1)のごとくに与えられる。変断面のはりの場合(図-5)、始点(i)、中間点、端点(i+1)における係数マトリックスをそれぞれ  $A_0, A_1, A_2$ 、荷重項ベクトルを同様に、 $b_0, b_1, b_2$  とおくならば、 $U_i$  および  $g_i$  は文献7)を参考にして、次のごとくに与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U_i &= E + \frac{h}{6}(A_0 + 4A_1 + A_2) + \frac{h^2}{6}(A_1 A_0 + A_2 A_1 \\ &\quad + A_1^2) + \frac{h^3}{12}(A_1^2 A_0 + A_2 A_1^2) + \frac{h^4}{24} A_2 A_1^2 A_0 \\ g_i &= \frac{h}{6} \left\{ \left[ E + hA_1 + \frac{h^2}{2} A_1^2 + \frac{h^3}{4} A_2 A_1^2 \right] b_0 \right. \\ &\quad \left. + \left[ 4E + h(A_1 + A_2) + \frac{h^2}{2} A_2 A_1 \right] b_1 + b_2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54 \cdot a, b)$$

変断面のはりの解析において、精度を上げるには、格間をなるべく細かく分割する必要がある。これらの分割された小格間長の伝達マトリックスをすべて求めた後、最初の大格間長の伝達マトリックスに組み立てるには、周知のごとく、荷重項を含んだ小格間長の伝達マトリックスを順次後から掛けあわせてゆけばよい。

(2) 無次元化について

桁落ちによる精度の低下を避けるためには、状態量の無次元化は不可欠である。状態量  $z$  を無次元化するマ

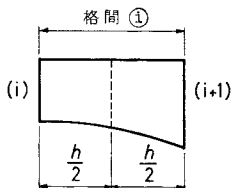


図-5 変断面ばりの格間

トリックスを  $X$  とすると、無次元化された状態量  $z^*$  は  $z^* = X^{-1} z \dots\dots\dots (55)$

と与えられる。これから、式(49)を書き直すと

$$\frac{dz^*}{dx} = A^* z^* + b^*(x) \dots\dots\dots (56)$$

となる。ただし、 $A^*$  および  $b^*(x)$  は次のごとく定義した。

$$\left. \begin{aligned} A^* &= X^{-1} A X \\ b^*(x) &= X^{-1} b(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57 \cdot a, b)$$

(3) 固定支承の水平反力の算出について

連続桁橋の固定支承は、一般に桁の中央付近に設けられている。この支承には、軸方向の反りの拘束により、水平方向の反力が発生する。多室箱桁の固定支承部の支承の数を  $n$  個とすると、軸方向反りの拘束に関して  $n$  本の条件式(58)が成立する。

$$w_k^T V_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (58)$$

これより、 $n$  個の水平反力が定められる。

(4) せん断力の分解

総合せん断力ベクトル  $Q$  は初等せん断力ベクトル  $Q_{pr}$  と二次せん断力ベクトル  $Q_{se}$  の和である。いま、連立1階常微分方程式の係数マトリックス  $A$  の上から全行の1/4までの行をあらためてマトリックス  $A_v$  と名付け、抜き出すと、軸方向の分布外力が存在しないならば、

$$V' = A_v z \dots\dots\dots (59)$$

と与えられる。これを、式(42-b)に代入して、初等せん断力および二次せん断力は次のごとく計算される。

$$\left. \begin{aligned} Q_{pr} &= G J A_v z \\ Q_{se} &= Q - G J A_v z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60 \cdot a, b)$$

5. 数値計算例

プレストレストコンクリートの4径間連続変断面4室箱桁橋(1等橋)を取り上げる。コンクリートの設計基準強度を  $400 \text{ kgf/cm}^2$  ( $39200 \text{ kPa}$ ) とすると、縦弾性係数および横弾性係数は「道路橋示方書」<sup>8)</sup>よりそれぞれ、 $3.5 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$  ( $34.3 \text{ MPa}$ )、 $1.5 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$  ( $14.7 \text{ MPa}$ )となる。ただし、ポアソン比は1/6とした。

構造系の側面図および支持状態を図-6に示す。断面を構成する各部材の寸法は、ウェブ高さ $h$ と下フランジ厚さを除いてすべて一定とする(図-7)。ウェブ高さ  $H$  を上下フランジの板厚の中心線間の距離と定義し、下フランジ厚さ  $T$  とともに、径間ごとに橋軸方向に二次放

物線関数で変化している。この連続桁の両端の支承 A および F 上の桁断面のウェブ高さ  $H$  は 4.0 m, 下フランジ厚さ  $T$  は 40 cm である。中間支点 B, C, E 上の桁断面のウェブ高さ  $H$  は 6.0 m, 下フランジ厚さ  $T$  は 50 cm である。さらに、最小断面となる第 2, 第 3 径間の中央部の点  $K_2$  および D 上の桁断面のウェブ高さ  $H$  は 2.5 m, 下フランジ厚さ  $T$  は 25 cm となっている。中間隔壁は「道示Ⅲ.8.1」の解説に従い 40 m 間隔で配置してある。

荷重の種類としては、死荷重、活荷重、プレストレス力などが考えられるが、本報告の主たる課題である断面変形を生じさせる荷重として偏載活荷重を取り上げる。この偏載活荷重は図-6 および図-8 に示すように、3

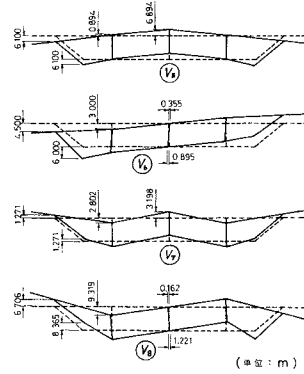


図-9 断面変形の 4 種類の基本変形

種類の衝撃を含む L 荷重であり、第 3 径間の最小断面 D に最大のずり変形を発生させることを意図している。

各断面ごとに重心点およびせん断中心点を求めた後に、断面変形の任意の基本変形を仮定する。この例題の断面形の中空四角形の数は 4 つだから、独立な断面変形の基本変形は 4 種類である。この基本変形を前述の方法で直交化する。たとえば、最小断面 D における直交化後の 4 つの断面変形のパターンを示すと、図-9 のようになる。

本報告の理論を用いて数値計算を行った。求められた状態量のうち、特に重要なものの分布を図-10~14 に示す。曲げおよびねじりに関する状態量は通常の計算より与えられる結果と一致している。ただし、ねじりの反りモーメントは断面変形の反りとの連成によって従来より複雑な分布となっている。この結果より、おおまかにではあるが、本理論およびその計算プログラムの妥当性を確認した。

橋軸方向の引張応力の最大値は、断面 D において左端のウェブと下フランジの交点で発生し、 $20.3 \text{ kgf/cm}^2$  ( $1990 \text{ kPa}$ ) の値となった。ねじりと断面変形による応力は  $3.6 \text{ kgf/cm}^2$  ( $350 \text{ kPa}$ ) となり、曲げ応力  $16.7 \text{ kgf/cm}^2$  ( $1640 \text{ kPa}$ ) に対する割合は約 22 % である。せん断応力の最大値は中間隔壁  $K_1$  の右側断面において、中央ウェブと下フランジとの結合点の右側で発生し、 $5.22 \text{ kgf/cm}^2$  ( $512 \text{ kPa}$ ) の値となる。このうち、反り拘束ねじりおよび断面変形によるせん断応力は、 $0.87 \text{ kgf/cm}^2$  ( $85 \text{ kPa}$ ) となり、曲げによるせん断応力  $1.35 \text{ kgf/cm}^2$  ( $132 \text{ kPa}$ ) に対する割合は約 64 % であり、単純ねじりによるせん断応力  $3.0 \text{ kgf/cm}^2$  ( $294 \text{ kPa}$ ) に対する割合は約 29 % である。断面の設計においては、上記の偏載荷重のほか、種々の荷重による応力を加えて検討を行うので、上記の数値のみで断面形の安全を論じることはできないが、反り拘束ねじりおよび断面変形による応力の影響はかなり大きいといえる。

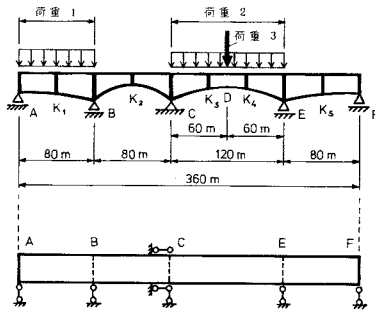


図-6 4 径間連続桁の境界条件

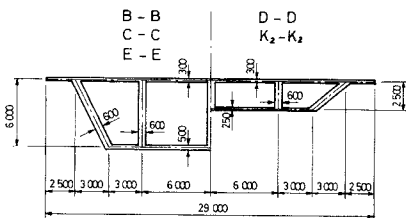


図-7 断面図

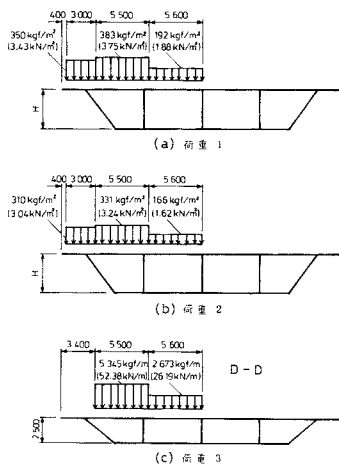


図-8 荷重の種類



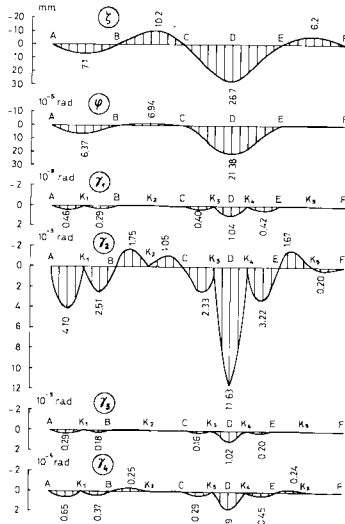


図-10 変形量

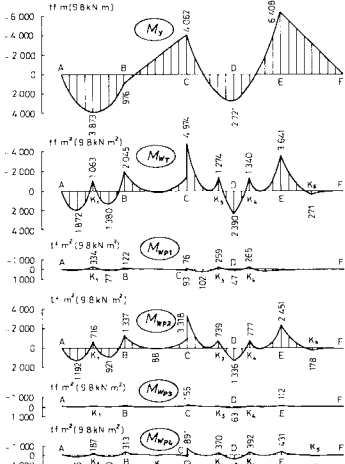


図-11 反りモーメント

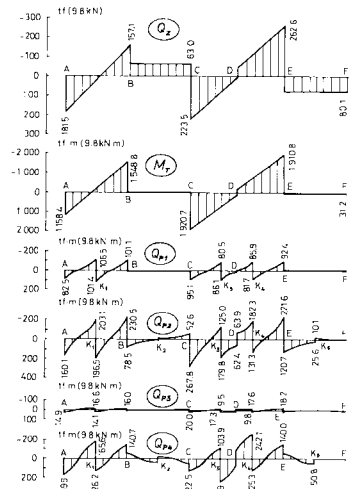


図-12 せん断力

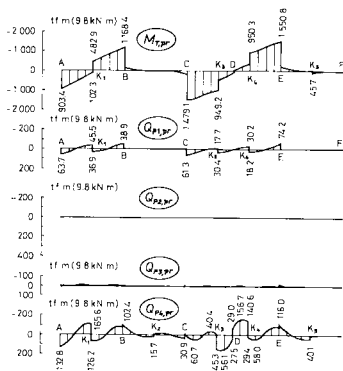


図-13 初等せん断力

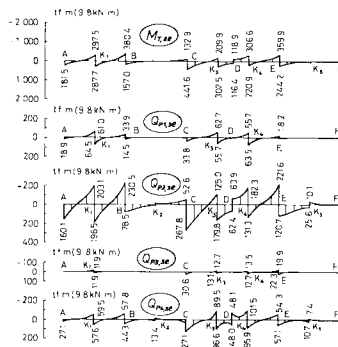


図-14 二次せん断力

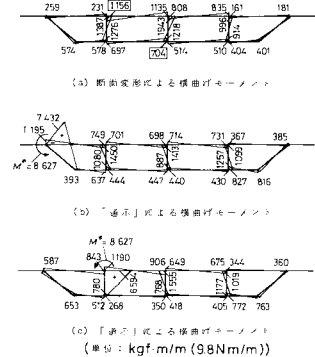


図-15 横曲げモーメント

次に、横曲げモーメントによる断面内方向の垂直応力  $\sigma_s$  に対して考察してみる。横曲げモーメントの最大となる断面は、断面変形が最大となる位置 D 点である。この断面に発生している横曲げモーメントの分布を図-15(a)に与える。断面内方向の垂直応力の最大値は、左から2つ目のウェブと上フランジとの結合点の右側で発生し、ポアソン比を考慮すると、 $7.49 \text{ kgf/cm}^2$  ( $734 \text{ kPa}$ )となる。断面の設計では、この荷重以外に、自重およびプレストレス力などを考える必要があるが、ただちに断面の適否を判定することはできないが、この垂直応力が大きな影響をもつことはまちがいない。比較のため、現行の「道示Ⅲ.8.2」より、床版の活荷重による支点上の曲げモーメントを作用させたときの横曲げモーメントの分布を、図-15(b), (c)に与える。ただし、図-15(b)は、左端のウェブの上端に「道示Ⅲ.5.5」の規定により算出される床版の活荷重による支点上の曲

げモーメントを作用させた場合であり、図-15(c)は左端より2つ目のウェブの上端にこの曲げモーメントを作用させた場合である。本報告の結果(a)と「道示Ⅲ.8.2」の結果(b), (c)を比較すると、「道示」の曲げモーメントの分布はウェブでは過大となり、下フランジでは過小となることがわかる。特に、中央のウェブと下フランジの結合する点の左側におけるフランジ曲げモーメントは  $704 \text{ kgf}\cdot\text{m/m}$  ( $6900 \text{ N}\cdot\text{m/m}$ )であるが、「道示Ⅲ.8.2」による同じ点の曲げモーメントの最大値は  $447 \text{ kgf}\cdot\text{m/m}$  ( $4380 \text{ N}\cdot\text{m/m}$ )となり、約63%にしかならない。以上の考察より、現行の「道示Ⅲ.8.2」を用いて下フランジの応力度の照査を行うのは問題を含んでいると思われる。

## 6. あとがき

多室箱桁の理論を構成し、伝達マトリックス法と組み

合わせて、その解析法を示した。本理論において、従来無視されていた反り拘束ねじりの反り応力と二次せん断応力、断面変形の反り応力と初等および二次せん断応力、そして断面変形の横曲げモーメントを考慮した方程式を誘導した。本理論の特長を列記すると以下のごとくなる。

- (1) ひずみの仮定を用いて、断面変形を起こすときの各板の回転中心を定義し、ねじりの理論と並列的に扱った。
- (2) 軸方向の変位を一次成分と二次成分に分解し、反りの連続条件より各単位応力関数間の直交条件式を定めた。
- (3) そり抵抗とせん断抵抗の3段階の直交化の過程を示し、他の諸量の直交関係式を誘導した。
- (4) 解析の対象を定断面桁より変断面桁に拡張する手法を示し、また固定支承の水平反力の算定法も与えた。

数値計算例として、4径間連続4室変断面箱桁橋を解析した。この構造系のはかに断面諸量を変えて数種の橋梁について計算を行い考察した。その結果として、現行の「道示Ⅲ」に関して以下の問題提起をする。

- (1) PC箱桁橋は長大薄肉化しているが、従来無視してきた反り拘束ねじりおよび断面変形の垂直応力およびせん断応力は、かなり大きな値になる場合が考えられる。したがって、これらの応力の検討も格子桁による構造近似によらずに行うべきである。
- (2) 「道示Ⅲ. 8.2」による下フランジの応力度の照査は実際よりも小さな値を与える可能性がある。

本文中の数値計算例は東京大学大型計算機センターの

HITAC M-280 H を用いて行われた。

最後に、本研究は財団法人小川育英会の研究助成金により行われたことを付記し、関係各位に感謝いたします。また、本論文作成にあたり、種々協力してくれた東京理科大学土木工学科構造研究室の平山 博君、高木慎悟君に感謝いたします。

#### 参 考 文 献

- 1) Usuki, T. : Ein Beitrag zur Theorie dünnwandiger prismatischer Stäbe mit offen-geschlossenem Profil aus vier Scheiben, Die Bautechnik, Vol. 60, Heft 1, pp. 14~23, 1983.
- 2) 白木恒雄：コンクリート1室箱桁の弾性解析法、橋梁と基礎, Vol. 18, No. 7, pp. 37~43, 1984.
- 3) 中村秀治：数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法の提案, 土木学会論文報告集, No. 289, pp. 43~53, 1979.
- 4) 西野文雄・長谷川彰夫・名取悦朗：断面変形とせん断変形を考慮した長方形薄肉断面はりの理論, 土木学会論文報告集, No. 248, pp. 25~40, 1976.
- 5) Sedlacek, G. : Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges für prismatische Stäbe mit dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Profilverformung. Fortschrittbericht VDI-Z. Reihe 4, Heft 8, VDI-Verlag, 1968.
- 6) Hees, G. : Querschnittsverformung des einzelligen Kastenträgers mit vier Wänden in einer zur Wölbkrafttorsion analogen Darstellung. Die Bautechnik, Vol. 48, Heft 11, pp. 370~377, 1971, Vol. 49, Heft 1, pp. 21~28, 1972.
- 7) Schäfer, H. : Die numerische Ermittlung von Übertragungsmatrizen, Der Stahlbau, Vol. 39, Heft 2, pp. 54~60, 1970.
- 8) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説Ⅲ. コンクリート橋編, 昭和53年1月.

(1985. 6. 12・受付)