

鉄筋コンクリート部材の引張剛性に関する解析的研究

AN ANALYTICAL STUDY FOR THE TENSION STIFFNESS OF REINFORCED CONCRETE MEMBERS ON THE BASIS OF BOND-SLIP MECHANISM

吉川 弘道*・田辺 忠顕**

By Hiromichi YOSHIKAWA and Tada-aki TANABE

Tension stiffening in a reinforced concrete member has been known to result from crack formation and bond-slip between the reinforcing bars and the surrounding concrete. The authors develop an analytical model for the stiffness of reinforced concrete uniaxial members with gradually forming cracks based on the bond-slip mechanism. Crack strain, defined by the derivative of the local slip, is introduced as inelastic strain and contributes to making reasonable formulation for the analysis of a cracked concrete field. In the paper, purely theoretical solutions of stress~total strain relations of cracked reinforced concrete are presented for both linear elastic and elastic brittle fracture models of local bond-slip relations. Finally, the authors' model is proposed and compared with experimental results from other researchers.

1. まえがき

板状の要素で構成される鉄筋コンクリート構造物の面内・面外変形は、種々の非線形性の複雑な複合効果によるものと考えられる。非線形効果のうち、引張ひびわれと共に伴う鉄筋～コンクリート間のすべりの影響は特に大きく、鉄筋降伏以前においては最も支配的な要因といえる。したがって、引張荷重下における鉄筋コンクリート部材のひびわれと付着すべり、およびこれらに基づく引張剛性の評価を的確に行うことができれば、鉄筋コンクリート構造物の変形機構が一層明確なものとなり、解析精度も向上することが期待される。そのため、多くの研究者によりそのモデル化が検討されてきた。

特に、引張荷重を受ける鉄筋コンクリート部材における引張硬化作用 (tension stiffening effect) については、Table 1 のような各種のモデル化が提案されている。しかし、これらの多くは、簡易的なモデルや実験結果によるもので、本質的なひびわれ機構に基づいた解析的アプローチは散見されるに過ぎない。

本研究は、田辺らの提唱するクラックひずみ法^{[16], [17]}を用い、ひびわれ発生・進展に伴う鉄筋コンクリート部材の非線形挙動、特に引張剛性的評価を行うための力学モデルを構築し、従来の経験的手法に力学的基礎づけを行うことを目的としている。クラックひずみ法 (crack strain method) は、ひびわれの発生に伴う特徴的な非弾性現象を、クラックひずみという概念を通して解析を行うもので、合理的な非線形解析が可能となる。

Table 1 Major Studies on Tension Stiffness.

Based Concept	Researchers	References
a) Tension Stiffening Method (Stress~strain relation of concrete in softening region is prescribed.)	Scanlon (1971) Lin, Scordelis (1975) Shirai, Satoh (1978) Milford, Schnobrich (1984)	15) 7) 11) 8)
b) Simplified Analytical Modeling for design use.	Isenberg, Adam (1975) CEB-Manual (1981) Leonhardt, Falkner (1977)	1) 2) 5)
c) Experimental Approach.	Vecchio, Collins (1982) Rizkalla, Hwang (1984)	18) 10)
d) Crack Strain Method	Tanabe, Yoshioka (1984)	16)
e) Analytical Modeling based on the Bond Characteristics.	Floegl, Mang (1982) Shirai, Satoh (1983)	3) 13)

* 正会員 (株)間組技術研究所
(〒338 与野市本町西4-17-23)

** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科
(〒464 名古屋市千種区不老町)

著者らの既報^[6]においては、これを有限要素法に組み込み、二次元応力場に適用し、増分法により数値解析を行った。これに対して、本文では、解析対象を単軸引張応力場に限定する一方、鉄筋～コンクリートの相互作用（付着機構）を考慮したクラックひずみを定義し、引張剛性に関する解析解を求めるものである。

なお、本研究の基本的考え方は、板状構造物に限らず、せん断、ねじり、曲げの作用する一般構造部材に対しても、適用可能と考えられる。著者らは、そのような一般化への検討も進めているが、ここではその基本的な考えを主として述べた。

2. クラックひずみを用いた引張剛性の評価

部材軸 x にわたって、一様な引張応力 σ を受ける鉄筋コンクリート(以下、RC とよぶ)の単軸部材を考える。任意断面の鉄筋とコンクリートの弹性ひずみを ϵ_s , ϵ_c とすると、ひびわれまたは鉄筋とコンクリートの相対的すべりにより、これら両者は必ずしも等しくない。すなわち、すべりの生じているある断面の全ひずみを ϵ とすれば、一般に鉄筋のひずみ ϵ_s はこれと等しく、コンクリートひずみ ϵ_c はこれより小さい値となる。この差をクラックひずみ (crack strain) ϵ_{cr} とすると、これらのはひずみの関係は次式となる。

また、鉄筋とコンクリートの応力を σ_s , σ_c , 弹性係数を E_s , E_c とすると、おののの材料構成則は次式で表わせる。

作用応力 σ と内力 σ_s, σ_c とのつり合い条件は、

と書けることは明らかである。ここで、 p は鉄筋比を表わし、 $p = A_s/A_c$ で求められる (A_s 、 A_c は鉄筋とコンクリートの断面積を表わす)。式(2)～(4)から、本研究の主目的である鉄筋+コンクリートの合成体 (composite material) としての応力～ひずみ関係を求めることができ、下式のように表わすことができる。

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_c + pE_s} + \frac{\varepsilon_{cr}}{1 + np} \dots \dots \dots \quad (5)$$

すなわち、全ひずみ ϵ は右辺第1項の全断面有効時の弾性ひずみと第2項のひびわれまたは相対すべりによる非弾性ひずみの和として表わせる。

また、RC 合成体としての見掛け上の弾性係数 E_{RC} (割線係数) を、

のように定義すると、次式のようにクラックひずみの値

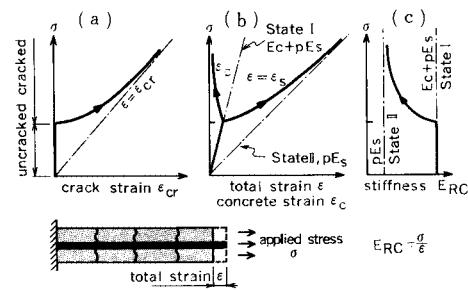


Fig. 1 Stress~Strain Relation and Stiffness of Cracked Reinforced Concrete based on “Crack Strain Concept”.

により、単軸引張応力を受けるRC部材としての両極端の剛性（これを状態Ⅰ、状態Ⅱとよぶ）を求めることができる。

- uncracked (state I):
 $\varepsilon_{cr}=0, (\varepsilon=\varepsilon_c) \Leftrightarrow E_{RC}=E_c + pE_s \dots \dots \dots (7 \cdot a)$
 - fully cracked (state II):

$\epsilon_{cr} = \sigma / pE_s$, ($\epsilon = \epsilon_{cr}$) $\Leftrightarrow E_{rc} = pE_s$ (7-b)

ϵ , ϵ_{cr} , E_{rc} と作用応力 σ との関係を Fig.1 に模式的に示す。さらに、これらの中間領域のクラックひずみ ϵ_{cr} を合理的に算定できれば、通常実験的に観察される応力～ひずみ関係 (Fig.1 (b)) のような両剛性間に遷移過程を忠実にシミュレートし、引張剛性を解析的に導出することが可能となる。

また、Fig.1(c)あるいは式(7)の両剛性は Leonhardt⁵⁾の定義した状態 I (Zustand I) と純粋な状態 II (nackter Zustand II), Isenberg¹⁾が用いたコンクリート寄与率 (ratio of contribution of concrete to stiffness), または CEB マニュアル²⁾で導入されている分布比 ζ に対応する (Appendix 1 参照). しかし, これらの提案式は, いずれも便宜的なモデル化によるもので, 本質的な力学機構に基づいたものとはいえない. これに対して, 本研究は, クラックひずみという概念を導入するとともに, これを付着特性から導いた理論的な解析モデルから求め定量化しようとするもので, これを次章にて詳述する.

3. 線形付着モデルに基づく定式化

(1) 付着基本式

規則的に分布するひびわれをもつRC単軸部材の、ひびわれ間隔 $2l_c$ における諸物理量の変化をFig.2に示す。応力 σ はこの間に一様に作用するものとする。

ひびわれを有するRC部材は、鉄筋とコンクリート両者の相対的変位（これをすべり量 g とする）によってせん断応力（これを付着応力 u とする）が生じ、これによって応力伝達が行われると考えられる。このときの微小区間 dx での応力伝達量と、鉄筋とコンクリートの応力増分 da_r 、 da_c は、つり合い条件から次式のよう

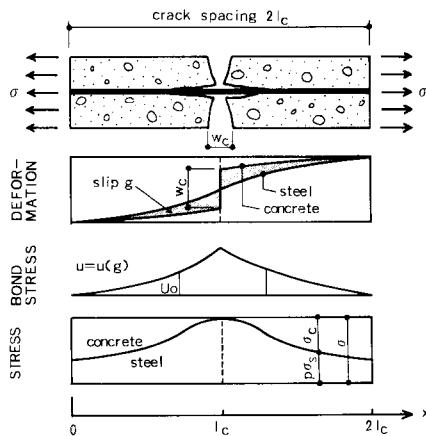


Fig. 2 General Aspects of Bond Characteristics of A Cracked Reinforced Concrete Member in Uniaxial Tension.

に示される（鉄筋の周長を ϕ とおく）。

$$\phi u dx = A_s d\sigma_s = -A_c d\sigma_c \quad (8 \cdot a)$$

または、

$$u = \frac{A_s}{\phi} \frac{d\sigma_s}{dx} = -\frac{A_c}{\phi} \frac{d\sigma_c}{dx} \quad (8 \cdot b)$$

また、任意点 x でのすべり量を次のように定義する。

$$g = \int_0^x \epsilon_s dx - \int_0^x \epsilon_c dx \quad (9)$$

これを 2 回微分して、式 (8) を適用すると、よく知られる付着の基本微分方程式が得られる¹⁹⁾。

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{\phi}{A_s E_s} (1 + np) u \quad (10)$$

上式は、局所付着応力～すべり関係式 $u = u(g)$ と、適当な境界条件を与えることによって、解くことができる（ただし、 $u(g)$ に軟化領域を含む非線形性の強い関係式を定義した場合、解析解はもちろんのこと数値解を求めることも困難な場合がある）。

$u = u(g)$ は、多くの研究者によって多種多様の非線形曲線が提案される一方、試験方法、測定位置によって異なるという報告⁹⁾もあり、統一的な評価には至っていないと判断される。そこで本研究では、局所付着応力～すべり関係として Fig. 3 に示すような、a) 線形弾性 (linear elastic) と b) 付着応力が最大値に達した場合ただちにその耐力を失う弾性破壊モデル (elastic brittle fracture) の 2 者について、その解析解を求めた。そして、それに基づきクラックひずみ ϵ_{cr} を定義し、全体の引張剛性式を誘導した。本章では、まず a) を採用したときのモデル化を述べる。

(2) 線形付着モデル

Fig. 3 に示すように、勾配 ku_0/g_0 をもつ次式のような線形付着応力～すべり関係を仮定する。

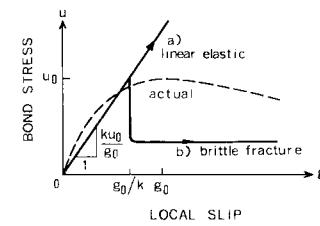


Fig. 3 Simplified Local Bond Stress Versus Local Slip Relations.

$$\frac{u}{u_0} = k \frac{g}{g_0} \quad (11)$$

ここで、 u_0 は付着強度、 g_0 はそのときのすべり量で、 k は無次元化した付着応力～すべり関係の勾配を示し、線形仮定に伴う補正係数となる。式 (11) を式 (10) に適用すると、

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{k u_0 \phi (1 + np)}{g_0 A_s E_s} \quad g = b^2 g$$

$$\text{ただし, } b^2 = \frac{k u_0 \phi (1 + np)}{g_0 A_s E_s} \quad (12)$$

となり、一般解として次式が得られる。

$$g = c_1 e^{bx} - c_2 e^{-bx} \quad (c_1, c_2 = \text{定数}) \quad (13)$$

ここで、 b を付着特性値 (bond characteristic coefficient) とよび、これは cm^{-1} の次元をもつ。境界条件として次の 2 式を与える。

$$x = 0 \longrightarrow g = 0$$

$$x = l_c \longrightarrow \frac{dg}{dx} = \epsilon_s - \epsilon_c = \frac{\sigma}{pE_s} \quad (14)$$

これを用い、定数 c_1, c_2 を求めると、式 (13) は最終的に下式のように導くことができる。

$$g = \frac{1}{b} \cdot \frac{\sinh(bx)}{\cosh(bl_c)} \cdot \frac{\sigma}{pE_s} \quad (15)$$

また、その x に関する 1 回微分は、

$$\frac{dg}{dx} = \epsilon_s - \epsilon_c = \frac{\cosh(bx)}{\cosh(bl_c)} \cdot \frac{\sigma}{pE_s} \quad (16)$$

のように記述することができる。ここで、すべり量 g は部材軸 x に沿って分布し、作用応力レベル σ によって異なるため、 $g = g(x, \sigma)$ のようにも考えられる。

次に、コンクリート応力 σ_c 、鉄筋応力 σ_s を求めるが、これらは、式 (8) を積分することによって得られる。すなわち、

$$\sigma_s = \frac{\phi}{A_s} \int_0^x u dx + c_3,$$

$$\sigma_c = -\frac{\phi}{A_c} \int_0^x u dx + c_4 \quad (17)$$

（ただし、 $c_3, c_4 = \text{定数}$ ）

ここで、上述の式 (11) と式 (15) を使って、 $u = u(g)$ を代入し、積分を実行するとともに、ひびわれ断面での

境界条件,

を用いると、式(17)は最終的に次式に至る。

$$\sigma_s(x, \sigma) = \frac{\sigma}{(1+np)p} \left\{ np + \frac{\cosh(bx)}{\cosh(bl_c)} \right\} \dots \dots \dots (19.a)$$

$$\sigma_c(x, \sigma) = \frac{\sigma}{1+np} \left\{ 1 - \frac{\cosh(bx)}{\cosh(bl_c)} \right\} \dots \quad (19.b)$$

以上の展開の中で、ひびわれ間隔は、付着特性値や作用応力によって変動する未知数であるが、これを次のようにして求める。

まず、ひびわれのない状態で最初のひびわれが発生する応力条件は、鉄筋とコンクリート両者の剛性とコンクリートの単軸引張強度 f_t を用いて

のように表わすことができるは明らかである。すなはち、この応力レベルを境にして、全断面有効状態 ($\epsilon_{cr} = 0$) からひびわれ断面 ($\epsilon_{cr} > 0$) へと移行する。その後の応力増加によって、ひびわれ間中点 ($x=0$ より $x=2 l_c$) におけるコンクリートの引張応力が f_t に達するとそこに二次ひびわれが生じ、ひびわれ間隔は半分になる。そこで、RC 部材の全体長さを l_0 とすれば、応力 σ の増加により、ひびわれ間隔は $l_0/2$, $l_0/4$, $l_0/8$ …と半減し、ひびわれ本数は倍増すると考える。

この二次ひびわれ以降の応力条件は、式(19・b)を用いて、

から求められ、これを整理すると次式が得られる。

すなわち、上式を満足するとき、ひびわれ間隔は現在の $2 l_c$ から l_c へと半減するもので、著者らはこれをひびわれ間隔に関する上界値 (upper bound) および下界値 (lower bound) と定義する。また、式 (22) を $2 l_c$ について解くと次式を得る。

$$2l_c = \frac{2}{b} \cosh^{-1} \left\{ \frac{\sigma}{\sigma - (1 + np)f_i} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

式 (22) よび式 (23) を用いて計算した結果を Fig. 4 に示す。Fig. 4 a) では、与えられた初期値 l_0 からひびわれ間隔が順次半減するステップ関数として表わし、Fig. 4 b) では、式 (23) から算出される $2 L_c$ を上界値、その半長を下界値として示した。Fig. 4 a), b) を比較することにより、式 (23) から算出される $2 L_c$ より L_c が、種々の異なる l_0 から出発する曲線群の上界値と下界値を包絡することが容易に判断される。また、Fig. 4 c) は、式 (23) を無次元化し

$$\mu \equiv b l_c = \cosh^{-1} \left(\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma} - 1} \right), \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 + np)f}, \quad \dots \dots \dots \quad (24)$$

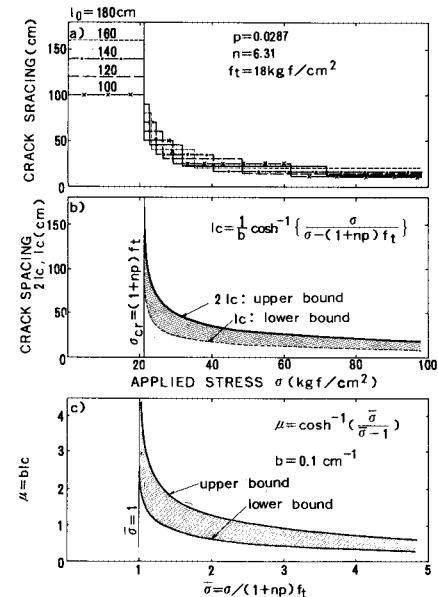


Fig. 4 Crack Spacing \sim Applied Stress Diagrams.
 a) Halving Crack-Spacing (Eq. (22))
 b) Continuously Decreasing Crack-Spacing
 (Eq. (23))
 c) Nondimensional Bond Parameter (Eq. (24))

によって表示したもので、力学特性値(b , np , f_i)に無関係なマスター曲線として用いることができる。また、無次元量 $\mu \equiv bl_c$ を付着指数（ひびわれ指数）とよび、付着特性値 b とともに、ひびわれの発生・進展に伴う非弾性挙動を支配する重要な指標となる (**Appendix 2** 参照)。

(3) 引張剛性式の算定

これまでの解析によって、与えられた力学特性値(b , n , p など)とそのときの応力レベル σ に対する各物理量を、 x 軸に沿った分布形として求めることができるが、さらにこれらの結果をもとに、前章で導入したクラックひずみ ϵ_{cr} を具体的に定義する。非弾性ひずみとしてのクラックひずみは、各点 x での鉄筋とコンクリートの相対変位(すべり量) g によって生じるものと考え、これを x の 1 回微分によって得られるひずみとして定義する。すなわち、下式のように仮定する。

これは、式(9)から

とも書くことができ、全ひずみとの関係式(1)を満足する。これを、ひびわれ間で一様な平均量に直すと、

$$\varepsilon_{cr} = \frac{1}{l_c} \int_0^{l_c} \varepsilon_{cr}(x) dx = \frac{1}{l_c} \int_0^{l_c} \frac{dg(x)}{dx} dx \dots\dots\dots(26)$$

のように表わせる。式(26)を整理し、式(15)を用いると下式に至る。

また、ひびわれ幅 ω_c は、式 (15) を使って、

$$\omega_c \equiv 2g(x=l_c) = \frac{2\tanh(bl_c)}{b} \cdot \frac{\sigma}{pE_s} \dots \dots \dots (28)$$

のように表わすことができることから、式(27)のクラックひずみは次式のようにも書き換えることができる。

これは、クラックひずみが、ひびわれ幅をひびわれ間隔で除して得られることを意味し、従来のいくつかの研究例と合致する。

このように得られたクラックひずみ(式(27))を式(5)に代入すると、RC 単軸部材としての応力～ひずみ曲線が得られる。すなわち、

$$\varepsilon = \left\{ 1 + \frac{1}{np} \cdot \frac{\tanh(b l_c)}{b l_c} \right\} \frac{\sigma}{E_c + p E_s} \dots \quad (29 \text{ a})$$

$$\varepsilon = \left\{ \frac{np + \frac{\tanh(b l_c)}{b l_c}}{np + 1} \right\} \cdot \frac{\sigma}{p E_s} \dots \quad (29 \text{- b})$$

同様に、式(6)に従い割線剛性を求めるとき、次式のように表わすことができる。

$$\frac{E_{rc}}{E_c + pE_s} = \frac{np}{np + \frac{\tanh(bL_c)}{bL_c}} \dots \dots \dots (30 \text{ - a })$$

$$\frac{E_{rc}}{pE_s} = \frac{np+1}{np + \frac{\tanh(bL_c)}{bL_c}} \quad \dots \dots \dots \quad (30 \cdot b)$$

また、式(30-b)に、式(24)を代入すると、引張剛性 E_{rc} が作用応力 σ の関数として表わし得る。すなわち、

$$E_{rc} = \frac{(1+np)pE_s}{np + \frac{\sqrt{s^2 - 1}}{s \cdot \cosh^{-1}(s)}} \dots \dots \dots (31)$$

$$\left(\text{ただし, } s = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma} - 1} = \frac{\sigma}{\sigma - (1 + np)f_1} \right)$$

以上までの展開は、線形付着応力～すべり関係を前提としたときのRC単軸部材の引張剛性を、クラックひずみを通して解析的に評価したものである。これを整理

Table 2 | Interrelation between Various Coefficients and Parameters at Two Extreme States

at Two Extreme States.						
State	Applied Stress σ	Bond Parameter $\mu = b/c$	Tension Stiffening Factor λ	Crack Strain ϵ_{cr}	Total Strain ϵ	Equivalent Stiffness E_{eq}
State I	$(1+np) f_t$	∞	0	0	ϵ_c	$E_c + pE_s$
State II	∞	0	1	$\frac{\sigma}{pE_c}$	ϵ_{cr}	pE_c

State I = uncracked State II = fully cracked

すると、Table 2, Fig. 5 のようにまとめることができる。

すなわち、Table 2 に示すように、外力 σ が $(1+np)f_t$ に達すると初ひびわれが生じ、その後の増大によって、付着指数は $\mu = \infty \rightarrow 0$ 、引張硬化係数は $\lambda = 0 \rightarrow 1$ に変化する。それによって、RC 部材の割線剛性は $E_c + pE_s \rightarrow pE_s$ に変化する。ここで、 λ は引張硬化係数 (tension stiffening factor) を表わし、次式によって定義した。

$$\lambda \equiv \frac{\tanh(b l_c)}{b l_c} = \frac{\tanh(\mu)}{\mu} \dots \dots \dots \quad (32)$$

Fig. 5 は、この間の遷移過程を式(23), (32), (30-b), (31)によって図示し、作用応力 σ と各係数との関係の計算例を示したものである。また、図中の点線は、 $\sigma = 35 \text{ kgf/cm}^2$ ($\bar{\sigma} = 1.64$) のときの諸物理量の対応を示したもので、これによれば、この条件の場合、RC 部材としての等価剛性が、 $E_{kc} = (0.067 \sim 0.049) \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ の間をとることがわかる。

上述の式(29), (30)は、式(24)を代入することにより、 $\mu = bl_c$ の関係式として与えられ、付着特性値 b とひびわれ間隔 l_c に依存しないことがわかる。これは、付着剛性が高い場合 (b が大きいとき) ひびわれ間隔は小さく、ひびわれ幅も小さくなり、一方付着性状が悪い場合 (b が小さいとき) はこの逆となるが、両者の比としても表わされるクラックひずみは変わらないためである。

もちろん、これは局所付着応力～すべり関係が線形と仮定した場合にのみあてはまるもので、一般的には、付着剛性がひびわれ性状に影響し、RC 部材全体としての引張剛性に反映される必要があろう(この点については、次章において、定式化と数値シミュレーションが示され

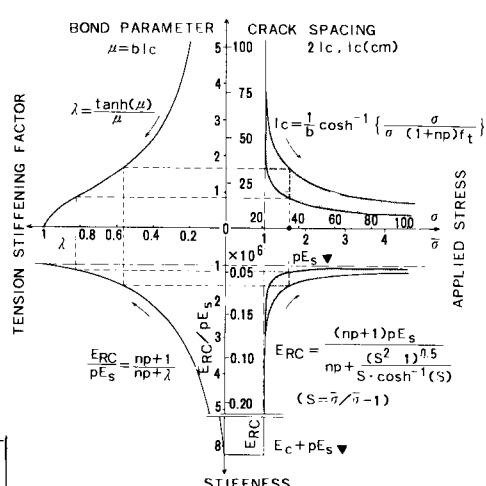


Fig. 5 A Numerical Example of Interrelation between Applied Stress and Some Major Factors. ($np = 7 \times 0.02 = 0.14$, $\sigma_{cr} = (1 + np)f = 21.4 \text{ kgf/cm}^2$, $b = 0.1 \text{ cm}^{-1}$)

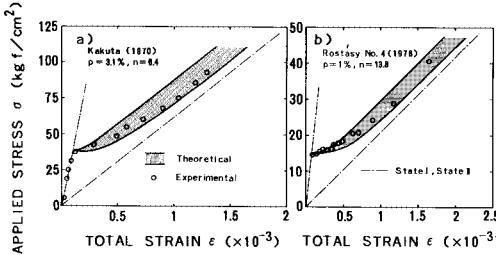


Fig. 6 Comparisons between Elastic Solutions and Experimental Results from KAKUTA (1970) and ROSTASY (1976).

る)。

Fig. 6 は、既往の実験結果 (角田 (1970)⁴⁾, Rostasy (1976)⁵⁾ に本理論を適用し、比較したものである。これによれば、2例とも実験値は理論解の範囲にあり、しかも初ひびわれ発生直後では上界値、その後の荷重の増加によって下界値に近づいていくことがわかる。このことは、線形弾性付着モデルによって、実験結果をある程度説明できることを示唆するものである。

4. 弹性破壊付着モデルに基づく定式化

(1) 弹性破壊付着モデル

次に、付着応力が最大値 ($u = u_0$) に達した後、ただちにその耐力を失う弾性破壊付着モデル (brittle fracture bond model) を用いて定式化を行い、クラックひずみと引張剛性を算出する。この場合、付着破壊領域では、鉄筋～コンクリート間の応力交換がないことを加味すれば、前章と同じ展開で導出することができる。

まず、付着破壊を開始する位置 x_0 を求める必要がある (Fig. 7 参照)。これは、式 (15) において

$$g(x_0) = \frac{g_0}{k} \quad \dots \dots \dots (33)$$

と置いて、これを x_0 について整理することにより得られる。すなわち、

$$x_0 = \frac{1}{b} \sinh^{-1} \left\{ \frac{g_0 b}{k} \cdot \frac{pE_s}{\sigma} \cosh(b l_c) \right\} \quad \dots \dots \dots (34)$$

ここで、すべり量 g は、弹性領域 ($0 \leq x \leq x_0$) では前章の式 (15) をそのまま適用し、付着破壊の生じている領域 ($x_0 < x \leq l_c$) では鉄筋のひずみ σ/pE_s に相当すると考えると、下式のように表わせる。

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{pE_s} \cdot \frac{\sinh(bx)}{b \cdot \cosh(bl_c)} \equiv g_1 & (0 \leq x \leq x_0) \\ \frac{\sigma}{pE_s} \left[(x - x_0) + \frac{\sinh(bx_0)}{b \cdot \cosh(bl_c)} \right] \equiv g_2 & (x_0 < x \leq l_c) \end{cases} \quad \dots \dots \dots (35)$$

クラックひずみ ϵ_{cr} は、前出の定義式 (25), (26) を用

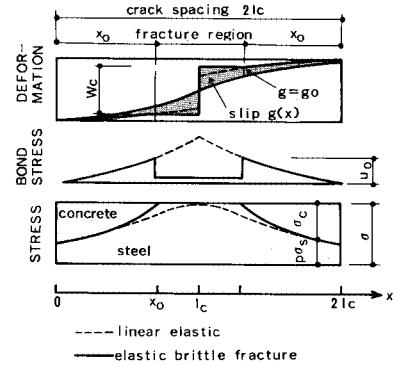


Fig. 7 Distributions of Stress, Bond Stress and Deformation along a Longitudinal Direction.

いて次式のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{cr} &= \frac{1}{l_c} \int_0^{l_c} \frac{dg(x)}{dx} dx \\ &= \frac{1}{l_c} \left(\int_0^{x_0} dg_1 + \int_{x_0}^{l_c} dg_2 \right) \dots \dots \dots (36) \end{aligned}$$

これを整理すると、次式に至る。

$$\epsilon_{cr} = \left\{ \frac{\sinh(bx_0)}{bl_c \cdot \cosh(bl_c)} + \left(1 - \frac{x_0}{l_c} \right) \right\} \frac{\sigma}{pE_s} \dots \dots \dots (37)$$

また、ひびわれ間隔についても、式 (35) を用い、前章と同じ展開を繰り返せば、次式のような結果を得る。

$$l_c = \frac{1}{b} \cosh^{-1} \left[\frac{\sigma}{(1+np)f_t} [\cosh(bx_0) - 1] \right] \dots \dots \dots (38)$$

ここで、ある応力レベルにおける式 (34) の算出結果が $x_0 \geq l_c$ となった場合は全領域が弾性であることを意味する。このとき、 $x_0 = l_c$ とおくと、上式のうち式 (37) は式 (27) に、式 (38) は式 (23) の線形弾性式に帰着することがわかる。

以上までの算出結果を用いると、弾性破壊付着モデルに基づく、引張剛性式または応力～全ひずみ関係を算出することができる。しかし、 x_0 を求める式 (34) には l_c が含まれ、 l_c を求める式 (38) では x_0 を必要とするため、正解を得るためにには収束計算を行わなければならない。このため、数値解析上は前章の弾性解に比べて複雑なものとなり、陽表現の解析解を得ることも不可能である。

(2) 線形弾性付着モデルとの比較

前節での算出結果を用いれば、線形モデルで考慮することのできなかった付着特性値 b の影響を反映した解析を行うことができる。これを、Fig. 8~9 の数値シミュレーションによって示す。

Fig. 8 は、a) 全ひずみ ϵ と作用応力 σ との関係および b) 全ひずみ ϵ と弾性領域 x_0/l_c との関係を、線形弾性モデルと弾性破壊モデルの両者について示したもので

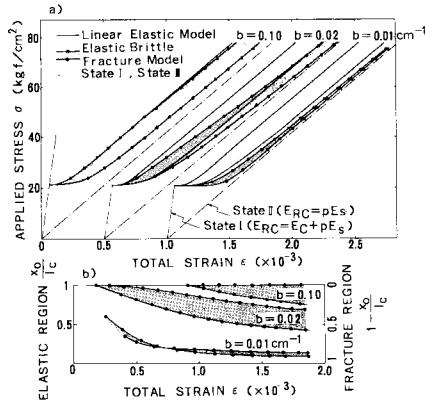


Fig. 8 Numerical Examples of a) Relation of Total Strain and Applied Stress, and b) Relation of Total Strain and Elastic Region of Bond Stress.

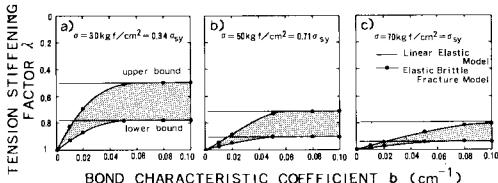


Fig. 9 Relationship between the Bond Characteristic Coefficient and the Tension Stiffening Factor at Different Stress Stages.

ある。これからわかるように、付着特性値 b を減少させると、破壊領域の占める割合が多くなり、 $E_{RC} = pE_s$ なる状態IIに近づいていくことがわかる。Fig. 9は、引張硬化係数 λ と付着特性値 b との関係を両モデルについて比較したものである。Fig. 9より、上記と同様のことが判断されるとともに、これが荷重の増大によって助長されることがわかる（図中の、 σ_{sy} はRC単軸部材としての降伏強度を表わし、鉄筋比 p と鉄筋の降伏強度 f_y を用い、 $\sigma_{sy} = pf_y$ によって定義した）。

また、両図から、 $b = 0.01 \text{ cm}^{-1}$ の場合、ひびわれ発生後、鉄筋とコンクリートの付着が急激に損なわれ、ほぼ状態IIの剛性 ($E_{RC} = pE_s$, $\lambda=1$) となっているのに対し、 $b = 0.1 \text{ cm}^{-1}$ ではひびわれ発生後も付着破壊の領域が小さく、全応力レベルにわたって線形弾性解とほぼ合致していることがわかる。

3. に示したFig. 6において、線形弾性付着モデルによる解析結果が、実験結果とよく一致したのは、 b 値が十分大きかったためと推察される。著者らの試算によれば、異形鉄筋を用いた通常の配筋状態では、 $b = 0.15 \sim 0.08 \text{ cm}^{-1}$ の値となり、この範囲では線形付着モデルによって十分な解析精度をもつことが判断される。

なお、両モデルいずれの場合も、ひびわれ間隔が $2 l_c$

$\sim l_c$ 間の値をとるため、それより得られた解がある幅を有し、確定値を算出することができない。

5. 非線形モデルの提案と実測値との比較

(1) 著者らの提案モデル

鉄筋～コンクリート間の付着挙動に関する最近のreviewによれば、局所付着応力～すべり関係 ($u \sim g$ relation) が研究者または試験方法によって大きく異なり（森田、藤井）⁹⁾、開放面からの距離（end distance）による影響を受けユニークな付着構成則が存在するかどうか疑わしい（ASCE）¹⁵⁾ことが、指摘されている。しかも、付着応力～すべり関係式の最大点 (u_0, g_0) を与える一般的な推定式が確立しているとはいひ難く、本理論で必要とする付着特性値 b を精度よく算出するのは困難であると考えられる（たとえば、Tassiosによれば、 $g_0 = 0.05 \sim 0.1 \text{ mm}$ （丸鋼）および $g_0 = 0.2 \sim 1 \text{ mm}$ （異形）としている²⁾のに対して、山本は $g_0 = 0.2 \sim 0.3 \text{ mm}$ （丸鋼）および $g_0 = 0.2 \sim 0.8 \text{ mm}$ （異形）を与えている²⁰⁾）。

また、本論文では2つの単純な $u \sim g$ 関係（Fig. 3の両モデル）を仮定したが、実際の付着挙動は最大点以降若干のひずみ軟化を示し、これら両モデルの中間に位置すると推察される。

3., 4. での定式化とシミュレーション結果によれば、異形鉄筋 ($b \geq 0.08 \text{ cm}^{-1}$) に対して、線形弾性モデルと弾性破壊モデルとの差異がほとんどなく、数値計算上は後者の方が非常に複雑になることがわかった。直接引張試験による実験結果を本理論にあてはめた場合（Fig. 6），実験値は線形弾性解の範囲にあり、しかも初期ひびわれ発生直後では理論解の上界値、その後荷重の増大により下界値に漸近していることが認められた。

以上のような考察のもとに、異形鉄筋を用い通常の配筋状態にあるRC単軸部材 ($b \geq 0.08 \text{ cm}^{-1}$) を対象とする次のような解析手法を提案する。

3. で導出された線形弾性式を基本とし、付着破壊の進行に伴う非線形性を、付着指数 μ を調整することによって表現する。式(24)で定義した付着指数を非線形パラメーター β を導入して次式のように拡張する。

$$\mu = \beta \cosh^{-1} \left\{ \frac{\sigma}{\sigma - (1+np)f_t} \right\} \quad (39)$$

この非線形パラメーターは、 $\beta=1$ のとき線形弾性解の上界値を、 $\beta=1/2$ のとき下界値を与えるが、著者らは新たに次式を提案する。

$$\beta = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma - \sigma_{cr}}{\sigma_{sy} - \sigma_{cr}} \quad (40)$$

ここで、 σ_{cr} は初期ひびわれ発生荷重、 σ_{sy} は鉄筋降伏荷重を示し、おのおの、 $\sigma_{cr} = (1+np)f_t$ 、 $\sigma_{sy} = pf_y$ で与えられるものとする。式(40)は、Fig. 10に示すように、

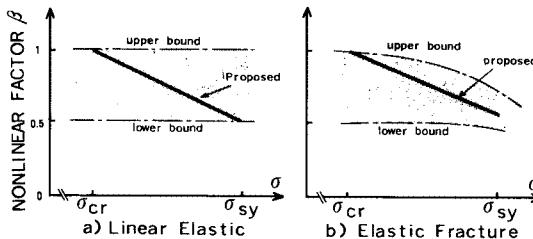


Fig. 10 Proposed Method for Determining Nonlinear Factor β and Corresponding Upper and Lower Bound Solutions.

初期ひびわれ発生時 ($\sigma = \sigma_{cr}$)において $\beta = 1$ 、鉄筋降伏時 ($\sigma = \sigma_{sy}$)で $\beta = 1/2$ となり、この間を線形補間したものである。これによって、ひびわれの進展と付着劣化の進行に伴う非線形性が間接的に評価され、異形鉄筋を用いた場合簡便でしかも有効な手法となろう。

(2) 実測値との比較

以上のような提案モデルを用いて、国内外8例の実測値と比較し、これを Fig. 11 に示した。これらのうち、a) はひびわれ位置での鉄筋応力 $\sigma_s (= \sigma/p)$ と全ひずみとの関係、b)～d) は作用応力 σ と全ひずみとの関係、e)～g) はRC部材としての等価剛性 E_{rc} (equivalent stiffness) の変化を示したものである。いずれの場合も、計算値と実測値はよく一致し、本提案モデルの有効性が確認されたといえる。

6. 一般化非線形モデルへの拡張

前章での提案式は異形鉄筋を対象にしたものであるが、実用的には十分なものであり、実測結果との対応も良好であった。さらに、これを一般化するにはアンボンドまで含む付着性状の違いを直接考慮した非線形モデルに一般化する必要性がある。そこで、式(40)をさらに次式のように拡張した。

$$\beta' = (1 - h_2) \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma - \sigma_{cr}}{\sigma_{sy} - \sigma_{cr}} \right)^{1/h_1} + h_2 \dots \dots \dots (41)$$

ここで、係数 h_1 , h_2 は付着特性値 b の関数、 $h_1(b)$, $h_2(b)$ として表わされるものとする。

h_1 , h_2 をパラメーターとしたときの数値シミュレーションを Fig. 12 に示す。Fig. 12a) は、式(41)によつて算出された非線形パラメーター β' を作用応力 σ の関数として示したものである。 h_1 は付着性状の良否によって異なるRC軸剛性の劣化速度を制御し、 h_2 は最終的な残留剛性を表わすもので、これら2係数の違いによって種々の非線形パラメーター β' を得ることができる。 $h_1=1$, $h_2=0$ のとき、前章での提案モデル(式(40))と合致する。

Fig. 12b) は、この非線形パラメーターを用い、RC部材としての応力～ひずみ関係を示し、線形弾性の上下界値とともに図示したものである。このときの算出方法は、式(41)および3.での算定結果に基づくものであり、これらを再記・整理すると次のようにまとめられる。

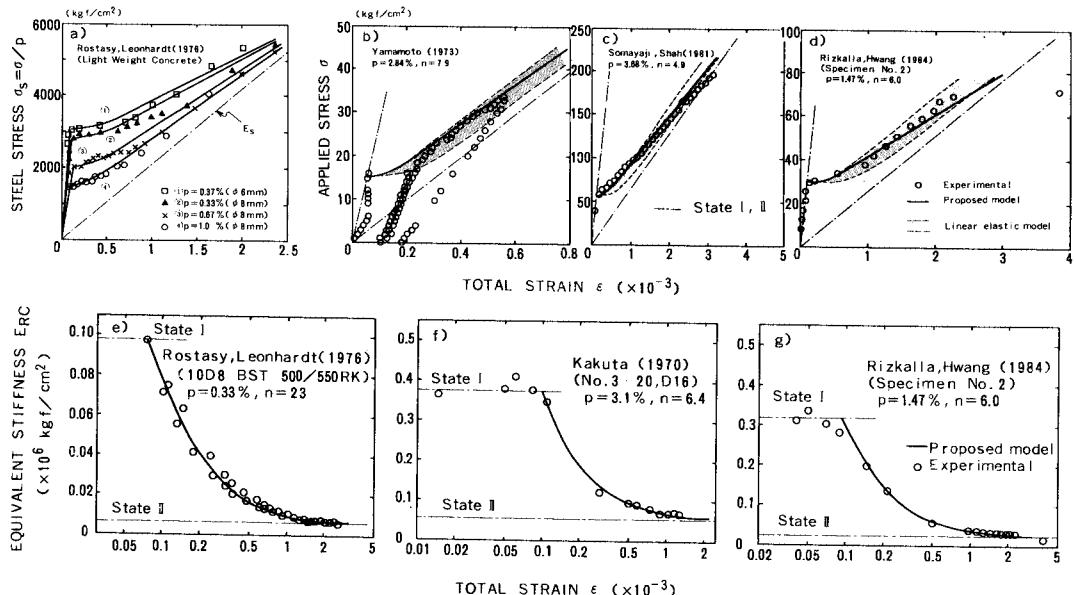


Fig. 11 Comparisons between Experimental Values and Authors' Proposed Model, a) Steel Stress and Total Strain Relation, b)～d) Applied Stress and Total Strain Relations, e)～g) Equivalent Stiffness and Total Strain Relations.

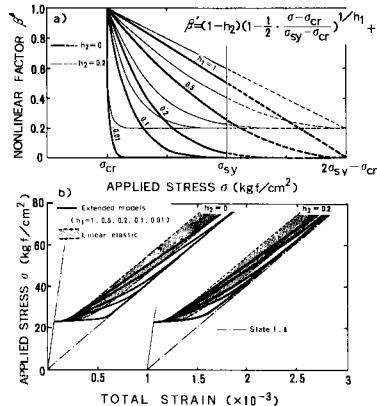


Fig. 12 Numerical Demonstrations on the Extended Nonlinear Model under Variable h_1 and h_2 ,
a) Nonlinear Factor β' , b) Total Strain ~ Stress Relation.

$$\varepsilon = \frac{np + \lambda}{np} \cdot \frac{\sigma}{E_c + pE_s} = \frac{np + \lambda}{np + 1} \cdot \frac{\sigma}{pE_s} \quad (42)$$

ここで

$$\lambda = \frac{\tanh(\mu)}{\mu} \quad (43)$$

$$\mu = \beta' \cosh^{-1} \left(\frac{\sigma}{\sigma - \sigma_{cr}} \right) \quad (44)$$

式(42)は式(29)を、式(43)は式(32)を、式(44)は式(39)を書き改めたものである（引張剛性 E_{rc} を与える式(30)も同様に書き直すことができる）。

すなわち、係数 h_1 , h_2 →非線形パラメーター β' →付着指数 μ →引張剛性係数 λ の順で諸数値（いずれも無次元量）が決定され、RC 部材としての応力～ひずみ関係と割線係数を任意の応力レベル（またはひずみレベル）で求めることができる。また、上式は、全体量によって陽形式で表わされており、増分計算や収束計算を必要とせず、容易に算出することができる。

最終的には、実験結果に基づいて係数 h_1 , h_2 を具体的に決定し、本モデルを完成する必要がある。しかし、現状の実験結果だけでは十分といえず、今後、広範囲な実験データの蓄積および計算値との対応づけを行わなければならない。

7. まとめ

本研究は、鉄筋～コンクリート間の付着すべり機構に基づき、RC 部材の引張剛性を理論的に求めたもので、本論文の成果として次のように要約される。

(1) 鉄筋～コンクリート間の相対変位（すべり量）の1回微分として定義したクラックひずみを導入することにより、ひびわれを有する RC 部材の非線形変形挙動を合理的に取り扱うことが可能となった。

(2) 局所付着応力～すべり関係を、線形弾性モデル

および弾性破壊モデルと仮定して、RC 単軸部材の引張剛性を解析的に導出することができた。これは、既往の実験式や簡易モデルとは異なり、ひびわれ進展および付着劣化の力学的メカニズムに基づく解析解であり、また、実験的に観測される引張剛性の劣化過程を定性的によく説明する。

(3) 本論文で定式化した引張剛性係数 λ は Isenberg, Falkner, CEB マニュアルで採用しているコンクリート寄与率と同じ物理量であることがわかり、著者らはこれを解析的に求めた。

(4) 上記の考察に基づき、著者らは非線形パラメーター β を導入した解析モデルを提案し、内外の実測結果と照合した結果、良好な適合性を確認した。

(5) さらに、非線形パラメーター β を拡張して、上記の理論モデルを発展させ、一般化非線形モデルを提案した。非線形パラメーターは、付着特性と荷重レベルによって定義されるが、これに含まれる諸係数を決定するには広範囲な実験データの蓄積が必要である。

また、以上の成果とは別に、本理論は、ひびわれ間隔、ひびわれ幅、鉄筋応力の算定、または RC 部材としての構成方程式の導出など、RC 構造に関する多くの応用性が期待される。また、多軸場への拡張、有限要素法への適用などが次の課題と考える。

Appendix 1

本研究で定義した引張硬化係数 λ (式(32)) と既往の簡易モデルで用いられる諸パラメーターとの対応関係を調べる。まず、式(32)を式(30)に代入し、整理すると次式が得られる。

$$\frac{1}{E_{rc}} = \frac{1-\lambda}{E_c + pE_s} + \frac{\lambda}{pE_s} \quad (a \cdot 1)$$

これは、Adham, Isenberg¹⁾ が導入したコンクリート寄与率 λ_1 と補数関係、

$$\lambda_1 = 1 - \lambda \quad (a \cdot 2)$$

にあることがわかる。また、式(29)から、CEB マニュアル²⁾で用いられている分布比 ζ と

$$\zeta = \frac{np + \lambda}{np + 1} \quad (a \cdot 3)$$

なる関係にあることがわかる。Leonhardt, Falkner による引張剛性モデルも同様な対応づけが可能である。

以上の λ_1 , ζ は、いずれも平均鉄筋応力またはひびわれ面での鉄筋応力の関数として便宜的に表わされており、ひびわれ性状や付着特性を反映したものとはなっていない。

Appendix 2

前出の式(12)で定義した付着特性値

$$b = \left(\frac{k u_0 \phi}{g_0} \cdot \frac{1 + np}{E_s A_s} \right)^{0.5} \quad \text{(a-4)}$$

の物理的意味を考える。ひびわれ間隔半材長 l_c の付着剛性 (bond stiffness) を K_{bond} 、構成材料 (コンクリートと鉄筋) の並列合成による剛性 (composite stiffness) を K_{comp} とすると、これらは次式で定義される (ともに、kgf/cm の単位をもつ。付図参照)。

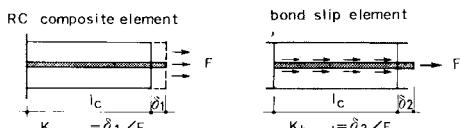
$$K_{\text{bond}} = \frac{u_0 \phi l_c}{g_0 / k} \quad \text{(a-5)}$$

$$K_{\text{comp}} = \frac{E_c A_c + E_s A_s}{l_c} = \frac{(1 + np) E_s A_s}{l_c} \quad \text{(a-6)}$$

式 (a-5), (a-6) を用いると、式 (a-4) は次のように表現できる。

$$b = \frac{1 + np}{l_c} \sqrt{\frac{K_{\text{bond}}}{K_{\text{comp}}}} \quad \text{(a-7)}$$

$K_{\text{bond}}/K_{\text{comp}}$ は、構成母材の剛性に対する付着すべり剛性の比率を表わすもので、付着特性値 b はこの剛性比の平方根を、 l_c で除すことにより単位長さに換算したものと解釈できる。



付図 K_{comp} と K_{bond} の定義

さらに、式 (24) で表わされる付着指数 $\mu = bl_c$ は、部材長 l_c にわたる剛性比となる。これらは、荷重レベル (ひびわれ進展) に対して、付着特性値 b の場合これに関係なく一定値 (material constant) をとり、付着指数 μ は順次減少し (state variable)、ともに付着性状を表わす重要なパラメーターとなる。

参考文献

- 1) Adham, S., Bhauamik, A. and Isenberg, J. : Reinforced Constitutive Relations, AFWL-TR-74-72, Feb., 1975.
- 2) CEB-Manual : Cracking and Deformation (Final Draft), Comite Euro-International du Beton, Bulletin D'Information, No. 143, Dec., 1981.
- 3) Floegl, H. and Mang, H. A. : Tension Stiffening Concept Based on Bond Slip, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 108, No. ST12, pp. 2681~2701, Dec., 1982.
- 4) 角田与史雄：鉄筋コンクリートの最大ひびわれ幅、コンクリート・ジャーナル, Vol. 8, No. 9, pp. 1~9, Sept., 1970.
- 5) Leonhardt, F. : Crack Control in Concrete Structures, IABSE Surveys, S-4/77, Aug., 1977.
- 6) レオンハルト, F. (横道英雄 監訳) : コンクリート構造物の限界状態と変形, 鹿島出版会, 1984.
- 7) Lin, C-S. and Scordelis, A. : Nonlinear Analysis of RC Shells of General Form, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 101, No. ST3, pp. 523~538, March, 1975.
- 8) Milford, R. V. and Schnobrich, W. C. : Behavior of Reinforced Concrete Cooling Towers, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois, May, 1984.
- 9) 森田司郎・藤井 栄：有限要素解析における付着モデルの現状と今後の課題, RC構造の有限要素解析に関するコロキウム, 日本コンクリート工学協会, pp. 35~42, Dec., 1984.
- 10) Rizkalla, S. H. and Hwang, L. S. : Crack Prediction for Members in Uniaxial Tension, Journal of the American Concrete Institute, Vol. 81, No. 6, pp. 572~579, Nov.-Dec., 1984.
- 11) 佐藤稔雄・白井伸明：鉄筋コンクリート造耐震壁の弾塑性性状に関する研究 (その6) 引張応力-ひずみ曲線にボンド特性を考慮した非弾性解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 1615~1616, Sept., 1978.
- 12) 佐藤稔雄・白井伸明・加藤庄二：RC耐震壁の履歴特性と非弾性解析 (解析用付着モデルとその検討), 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 1803~1804, Sept., 1980.
- 13) 白井伸明・佐藤稔雄：鉄筋コンクリートの付着～ひびわれモデル, 第2回RC構造のせん断問題に対する解析的研究に関するコロキウム, 日本コンクリート工学協会, pp. 9~16, Oct., 1983.
- 14) Somayaji, S. and Shah, S. P. : Bond Stress Versus Slip Relationship and Cracking Response of Tension Members, Journal of the American Concrete Institute, Vol. 78, No. 3, pp. 217~225, May-June, 1981.
- 15) State of the Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete : The Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures of the Structural Division Committee on Concrete and Masonry Structures, ASCE, 1981.
- 16) 田辺忠顯・吉川弘道：クラックひずみを導入したコンクリート構造物の有限要素モデル, RC構造物の有限要素解析に関するコロキウム, pp. 65~72, Dec., 1984.
- 17) Tanabe, T., Iwata, M. and Yoshikawa, H. : Introduction of Crack Strain to the Analysis of a Discontinuous Body, Proceedings of Numerical Methods in Geomechanics, Vol. 1, pp. 193~198, April, 1985.
- 18) Vecchio, F. and Collins, M. P. : The Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Stresses, University of Toronto, Department of Civil Engineering, No. 82-03, March, 1982.
- 19) たとえば, Watstein, D. and Bresler, B. : Bond and Cracking in Reinforced Concrete, pp. 151~193.
- 20) 山本康弘：鉄筋コンクリートの付着応力とひびわれおよび引抜鉄筋の復元性に関する研究：大成建設技術研究所報第6号, pp. 167~180, 1973.

(1985.3.13・受付)