

混雑した道路網における交通均衡およびその数値解法

TRAFFIC EQUILIBRIUM IN CONGESTED NETWORKS AND THEIR NUMERICAL SOLUTION

井上博司*

By Hiroshi INOUE

Traffic equilibrium in congested networks is dealt by considering queues at intersections. The travel time on a link with congested flow is expressed as the sum of running time at non-congested flow regime and imaginary waiting time at the end of link. Not only traffic volume but also waiting time in queues are required through equilibrium conditions. The problem is formed as a convex programming, by adding capacity restraints explicitly to the traditional equilibrium problem. The Lagrange multiplier associated with a capacity restraint implies the waiting time in a queue. The problem can be solved numerically by constrained optimization methods. A solution using Lagrange multiplier method and some examples are showed. If queues do not extend to their upstream links, then the solution is unique. Elsewhere, signal control conditions should be added to the problem to require a rational solution.

1. はじめに

交通均衡の概念^{1),2)}は、道路網における交通量の予測理論を形成するうえで、これまできわめて重要な役割を果たしてきた。しかし従来の交通均衡理論は、交通流が渋滞していないことを前提としたものであり、このため今日日常茶飯時になっている混雑した交通流に対してこの理論を適用しようとするとき、いくつかの問題点が生じてきている。それらはリンクの中では交通流は一様であり、またリンクの走行所要時間はそのリンクの交通量に関する単調増加関数として取り扱われていることに起因している。このことが渋滞した交通流における所要時間ならびに交通均衡の解釈をあいまいなものにしているが、この点についてはこれまであまり議論されていない。

一般にリンクの走行所要時間は、渋滞領域まで考慮すると交通量に関する二価関数となり、臨界密度以下の自由流領域では単調増加であるが、臨界密度を越えた渋滞領域では逆に単調減少となる。このため、両者の関係を単調増加とする従来の理論においては渋滞流を取り扱うことができない。従来の交通均衡理論において走行時間関数が単調増加と仮定されているのは、1つには交通均

衡を数理計画問題として取り扱うとき凸計画となるようにするためであり、また1つには交通量が容量に近づくとき所要時間が無限に大きくなるような関数形を仮定することによって、リンクでの容量制限を付加することができるためである。しかし実際には、交通量が容量に到達しても所要時間が無限に大きくなることはないから、このような仮定は非現実的である。

最近奥谷は、走行時間関数を二価関数として交通均衡問題を取り扱う方法を提案しているが³⁾、この場合問題はもはや凸計画ではないから均衡点が多数生じ、それらのうちでどれが実際に起こり得るものか判定が難しい。混雑した流れを取り扱うための興味ある方法がNewellによって示されている⁴⁾。Newellは、フリーウェイにボトルネックが存在するときに生じる定常的な待ち行列が、フリーウェイと街路の間の経路選択にどのように影響するかを分析しているが、この研究は混雑した道路網における交通均衡を取り扱ううえで大変示唆に富んでいる。一般の道路網を対象とするとき、主要なボトルネックは交差点である。これは交差点での交通容量が単路部での交通容量よりも小さいため、交差点を先頭とする渋滞が生じることは日常よく経験するところである。

本研究は、朝夕のラッシュ時にみられるような渋滞流を有する道路網における交通量ならびに渋滞長、渋滞に

* 正会員 工博 岡山大学助教授 工学部土木工学科
(〒700 岡山市津島中 3-1-1)

よる遅れ時間などの予測を行い得る均衡交通配分理論を形成しようとするものである。このため本研究においては混雑した道路網を対象として、交差点での渋滞による待ち行列を考慮に入れた交通均衡の概念を提案する。その特徴は、渋滞したリンクの走行所要時間を自由流領域での走行所要時間とリンクの終端における待ち時間との和として表わし、リンク交通量および待ち時間の双方を交通均衡条件より決定するということにある。この場合の交通均衡を求める問題は、従来の交通均衡問題に容量制限式を明示的に付加した凸計画問題として取り扱うことができることを明らかにするとともに、その数値的解法および2, 3の計算例を示す。さらに渋滞が上流リンクに延伸する場合の取り扱いについて若干の考察を加える。

2. 混雑したリンクにおける交通量-所要時間の関係

いま道路網がノードおよびリンクの集合として与えられ、また各ノード間の交通需要が与えられるものとする。道路網における交通流は多分に非定常なものであるが、時間帯を適当に区切れば各時間帯の中での変動は比較的小さく、流れは定常的であるとして取り扱うことができる。そこで比較的短時間の交通需要を対象として、交通流は定常的であるものと仮定する。

図-1に示すように任意のリンク ij を考え、この区間の交通量を q とする。またこの区間の単路部の交通容量を C_{max} 、終端 j における端末交通容量を C とする。リンク端末容量は信号による流れの中断のため通常単路部容量よりも小さいので、一時的に C よりも大きい交通量が流れるとこの区間に貯留され、リンクの終端を先頭とする渋滞流が形成される。ここで $q > C$ であれば渋滞がさらに後方に延伸し、 $q < C$ であれば渋滞は解消に向かう。もし交通量が増減を伴いながらしだいに $q = C$ に収束していくならば、渋滞の長さはある一定値に近づいていくものと考えられる。このときの時間が十分に経過した後の平衡状態を定常渋滞流とよぶことにする。これは1つの理想的な状態であり、現実の交通量では短時間の間には平衡状態には達しないし、また交通流が一定値にとどまることはない。しかし、交通現象は毎日繰り返されているものであり、日々の体験によってしだいに一定の平衡状態に近づくことが期待される。本稿におい

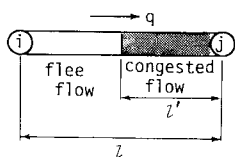


図-1 混雑したリンクの交通量

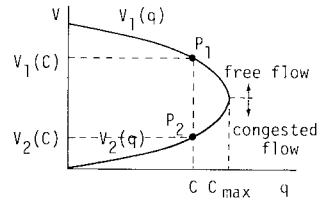


図-2 交通量-速度の関係

ては交通流は定常的であると仮定しているが、それは上に述べたような交通量の変動の後の収束状態を意味するものとする。

ここで定常渋滞流の長さを l' 、区間長を l とする。また図-2に示すように、この区間の速度-交通量関係を自由流領域で $V_1(q)$ 、渋滞領域で $V_2(q)$ とする。 $V_1(q)$ は単調減少、 $V_2(q)$ は単調増加である。このとき自由流部分の速度は $V_1(C)$ 、渋滞部分の速度は $V_2(C)$ となるから、このリンクの走行所要時間は、

$$t = \frac{l-l'}{V_1(C)} + \frac{l'}{V_2(C)}$$

$$= \frac{l}{V_1(C)} + \left\{ \frac{l'}{V_2(C)} - \frac{l'}{V_1(C)} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

で与えられる。右辺第1項はリンクの全区間を仮想的に自由流領域での速度で走行したときの所要時間に等しく、したがって第2項は渋滞による遅延時間を表わしていると考えられる。後者をリンクの終端における仮想的な待ち時間として取り扱うことにする。

実際の交通流ではさらに信号による流れの中断によって生じる遅れ時間がある。すなわちリンクの終端に到達したときに、緑現示であれば待つことなくただちに交差点に進入できるが、赤現示であれば緑現示になるまで待たなければならない。このため交通量が容量以下の場合でも待ち行列が発生する。ただしこの待ち行列は信号の1周期を周期としてサイクリックに変化するものであり、先に述べた定常的な渋滞流とは性質の異なるものである。この信号による流れの中断によって生じる遅れ時間の期待値は、交通量に関する単調増加な関数として表わすことができる^(付録1)。ただしこの遅れ時間には、オフセット不整合による遅れや、交通のランダム変動による遅れは考慮していない。

このとき渋滞部分を有する任意のリンクの走行所要時間は、仮想的な自由流領域での走行所要時間とリンクの終端における仮想的な待ち時間、および信号による平均遅れ時間の和として表わすことができる。ここで自由流領域での走行所要時間と信号による平均遅れ時間はともに交通量の関数であるから、これらの和を関数 $f(q)$ として表わす。明らかに $f(q)$ は単調増加である。よって任意のリンクの走行所要時間 t は、

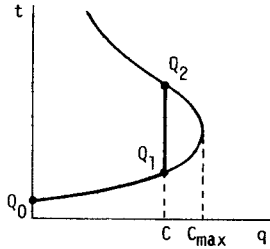


図-3 交通量-所要時間の関係

$$t = \begin{cases} f(q) & (0 \leq q < C) \\ f(q) + w & (q = C) \end{cases} \quad (2)$$

となる。ここで $0 \leq w \leq l$ であることより、

$$0 \leq w \leq \frac{l\{V_1(C) - V_2(C)\}}{V_1(C)V_2(C)} \quad (3)$$

であり、また待ち時間 w は長さ

$$l = \frac{wV_1(C)V_2(C)}{V_1(C) - V_2(C)} \quad (4)$$

の渋滞に相当する。

図-3は所要時間と交通量の関係を示しており、容量以下の自由流領域では (t, q) は Q_0Q_1 上に、容量に到達した渋滞領域では (t, q) は Q_1Q_2 上にある。点 Q_2 はリンクの全長が渋滞となった場合に相当する。

なおここでのボトルネックはリンクの終端の交差点にあるとしているが、もしリンク中に何らかのボトルネックがありその容量がリンク末端容量よりも小さいなら、その点を新たにノードとしまた分割されたそれぞれのリンクに容量を設定すればよい。

3. 交通均衡

いま図-4に示すように、ノード i とノード j の間に2本のリンク1, 2があるものとし、 i, j 間の需要交通量を D 、リンク1, 2の交通量を q_1, q_2 、走行時間関数を $f_1(q), f_2(q)$ 、リンクの終端での交通容量を C_1, C_2 とする。また道路の利用者は、起終点間の走行所要時間が最短の経路を選択するものとする。

このとき、需要交通量が小さいときにはいずれか一方のリンクにのみ交通量が流れるが、 D が大きくなると所要時間が等しくなるように両方のリンクに交通量が流れる。さらに需要交通量が大きくなると、いずれかのリンクで交通量が容量に到達する。仮にリンク1で容量に到達したとすると、需要交通量がこれよりも大きくな

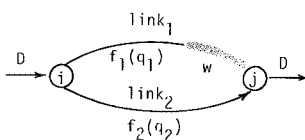


図-4 2経路間の交通均衡

ると、リンク1の終端部から渋滞流が形成されてくる。このときの渋滞流の長さは、道路の利用者は起終点間の所要時間が最短の経路を選択するという仮定から、両リンクの走行所要時間が等しくなるような長さで均衡を保つ。すなわちリンク1の渋滞による待ち時間を w とすると

$$f_1(q_1) + w = f_2(q_2) \quad (5)$$

となる。また交通量に関しては明らかに、

$$q_1 + q_2 = D \quad (6)$$

$$q_1 = C_1 \quad (7)$$

でなければならない。

未知数 q_1, q_2 および w は上の3つの方程式によって決定することができ、

$$q_1 = C_1 \quad (7')$$

$$q_2 = D - C_1 \quad (8)$$

$$w = f_2(D - C_1) - f_1(C_1) \quad (9)$$

となる。ただしこのような状態が現出するのは $D < C_1 + C_2$ および $f_1(C_1) < f_2(D - C_1)$ の場合である。 $D \geq C_1 + C_2$ の場合には需要量が容量を越えてしまうので、定常的な均衡解は存在しない。

次に一般の道路網を対象として、渋滞による待ち時間を考慮した交通均衡を定式化する。いま目的地を k とするリンク ij 上のフローを x_{ij}^k 、リンク ij 上のトータルフローを X_{ij} 、 i から k への需要交通量を D_i^k 、 i から k への最短経路の所要時間を t_i^k 、リンク ij の末端の交通容量を C_{ij} で表わす。また道路の利用者は経路するリンクの走行時間と待ち時間との和からなる起終点間の走行所要時間が最短の経路を選択すると仮定する。このときネットワーク交通均衡は次の式 (10)~(15) によって表現することができる。

$$X_{ij} = \sum_k x_{ij}^k, \quad \forall ij \quad (10)$$

$$\sum_j x_{ij}^k - \sum_j x_{ji}^k = D_i^k, \quad \forall i, k \quad (11)$$

$$X_{ij} \leq C_{ij}, \quad \forall ij \quad (12)$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \quad \forall ij, k \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{ij}(X_{ij}) + w_{ij} + t_i^k &= t_i^k \quad (x_{ij}^k > 0) \\ f_{ij}(X_{ij}) + w_{ij} + t_i^k &\geq t_i^k \quad (x_{ij}^k = 0) \end{aligned} \right\} \quad \forall i, k \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{ij} &= 0 \quad (X_{ij} < C_{ij}) \\ w_{ij} &\geq 0 \quad (X_{ij} = C_{ij}) \end{aligned} \right\} \quad \forall ij \quad (15)$$

式 (10), (11) はフローの連続および需給に関する条件式であり、式 (12) は容量制限式、式 (13) はフロー非負条件式、式 (14) は所要時間の均衡条件式、式 (15) は待ち行列の形成に関する条件式である。

ところで、これらの条件式 (10)~(15) を満足する変数値を求めることは、次の数理計画問題 (P) と等価である。

(P)

$$\min F = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}^k} f_{ij}(X) dX \dots\dots\dots (16)$$

sub. to

$$X_{ij} = \sum_k x_{ij}^k, \quad \forall ij \dots\dots\dots (10')$$

$$\sum_j x_{ij}^k - \sum_j x_{ji}^k = D_i^k, \quad \forall i, k \dots\dots\dots (11')$$

$$X_{ij} \leq C_{ij}, \quad \forall ij \dots\dots\dots (12')$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall ij, k \dots\dots\dots (13')$$

なぜならば、式 (11'), (12') に関するラグランジュ乗数を λ_i^k, μ_{ij} として、問題 (P) に対するラグランジュ関数を

$$\begin{aligned} \phi(x, \lambda, \mu) = & \sum_{ij} \int_0^{\sum_k x_{ij}^k} f_{ij}(X) dX \\ & + \sum_i \sum_k \lambda_i^k \left(\sum_j x_{ij}^k - \sum_j x_{ji}^k - D_i^k \right) \\ & + \sum_{ij} \mu_{ij} \left(\sum_k x_{ij}^k - C_{ij} \right) \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

とすると、 x^* が問題 (P) の最適解であるための必要十分条件は、Kuhn-Tucker 条件より次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i^k} &= 0, \quad \forall i, k \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mu_{ij}} &\leq 0, \quad \mu_{ij} \geq 0, \quad \mu_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \mu_{ij}} = 0, \quad \forall ij \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_{ij}^{k*}} &\geq 0, \quad x_{ij}^{k*} \geq 0, \quad x_{ij}^{k*} \frac{\partial \phi}{\partial x_{ij}^{k*}} = 0, \quad \forall ij, k \end{aligned}$$

これらより次の式 (18)~(23) を得る。

$$\sum_j x_{ij}^{k*} - \sum_j x_{ji}^{k*} = D_i^k, \quad \forall i, k \dots\dots\dots (18)$$

$$X_{ij}^* \leq C_{ij}, \quad \forall ij \dots\dots\dots (19)$$

$$x_{ij}^{k*} \geq 0 \quad \forall ij, k \dots\dots\dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{ij}(X_{ij}^*) + \mu_{ij} + \lambda_i^k &= \lambda_i^k \quad (x_{ij}^{k*} > 0) \\ f_{ij}(X_{ij}^*) + \mu_{ij} + \lambda_i^k &\geq \lambda_i^k \quad (x_{ij}^{k*} = 0) \end{aligned} \right\} \quad \forall i, k \dots\dots\dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_{ij} &= 0 \quad (X_{ij}^* < C_{ij}) \\ \mu_{ij} &\geq 0 \quad (X_{ij}^* = C_{ij}) \end{aligned} \right\} \quad \forall ij \dots\dots\dots (22)$$

ここに、

$$X_{ij}^* = \sum_k x_{ij}^{k*}, \quad \forall ij \dots\dots\dots (23)$$

式 (18)~(23) において、 $x_{ij}^{k*} = x_{ij}^k, X_{ij}^* = X_{ij}, \lambda_i^k = t_i^k, \mu_{ij} = w_{ij}$ とすると、これらは式 (10)~(15) と全く同じになる。よって混雑した道路網における交通均衡条件 (10)~(15) は数理計画問題 (P) と等価であることがいえる。ここでリンクの終端における待ち時間 w_{ij} は容量制限式 (12') に対するラグランジュ乗数値に等しい。したがって渋滞リンクにおける待ち時間は、式 (12') に対するラグランジュ乗数値を求めることによって得られる。

問題 (P) においては、容量制限式以外は従来の均衡

問題の場合と全く同じである。したがって渋滞による待ち時間を考慮した交通均衡は、リンクでの容量制限式を従来の均衡問題に明示的な形で付加するのみでよいことになる。また問題 (P) においてはリンク全交通量 X_{ij} に関しては制約領域は明らかに凸集合であり、かつ目的関数は狭義凸であるから均衡解は唯一である。目的地ノードごとのリンク交通量 x_{ij}^k については、解は一意的ではないが問題は凸計画の性質を保っており、このため種々の非線形最適化手法の適用が可能である。

なお従来の交通均衡理論では、走行時間関数を交通量が容量に近づくときと走行時間が無限に大きくなるような形に設定することによって容量制限が図られている。たとえば容量制限条件がある場合の計算法を示した Daganzo の研究^{5), 6)} でもこのような仮定が設けられている。これに対して本研究では、容量制限を走行時間関数形によってではなく、制約条件として問題に加えることによって取り扱っている。これによって走行時間関数の設定に柔軟性を与えることができ、また走行時間を通常の走行時間と遅れ時間とに分離することが可能となった。

ところで、問題 (P) においては最大待ち時間に関する条件 (3) が考慮されていない。式 (3) はこの問題ではラグランジュ乗数に関する条件となるから、これを直接に制約条件式に付加することは困難である。したがって、式 (3) が侵されるときには何らかの別の取り扱いが必要となる。これは渋滞がリンクの全長に及び、さらに上流側にまで延伸する場合であり、このときには均衡解は一意的ではなく、また信号現示が待ち行列の形成に関与してくるものと思われる。これらの点については後述する。

4. 解 法

問題 (P) においては、単に均衡フローを求めるだけであれば、種々の制約付き非線形最適化手法の適用が可能である。しかしこの問題の特徴は、道路網中に生じる渋滞による待ち時間ないしは待ち行列長まで含めて交通量を予測することができるという点にある。このためには変数値とともに、制約条件特に容量制約条件に対するラグランジュ乗数値を求めることが必要であり、そのようなことの可能な解法を用いることが望ましい。ところで、最近制約条件付き非線形最適化の有力な解法となりつつあるラグランジュ乗数法⁷⁾ はそのような手法の 1 つである。この手法は、制約条件を外点ペナルティ関数としてラグランジュ関数に加えた拡張ラグランジュ関数に対して、その主問題および双対問題を順次反復して解いていくことによって最適点に接近するものであり、変数値およびラグランジュ乗数値の双方が求められるとい

う利点がある。また単に等式制約条件のみではなく、不等式制約条件も取り扱うことができ、ペナルティー法よりも収束性のよいことが明らかにされている。

さて乗数法を問題 (P) に対して適用するとき、制約条件は、式 (11')~(13') となるから、拡張ラグランジェ関数は

$$Lr, s, t(x, \lambda, \mu, \nu) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}^k} f_{ij}(X) dX + \sum_i \sum_k \lambda_i^k h_i^k(x) + \frac{1}{2} r \sum_i \sum_k |h_i^k(x)|^2 + \sum_{ij} \frac{1}{2s} [\max\{0, \mu_{ij} + sg_{ij}(x)\}^2 - \mu_{ij}^2] + \sum_{ij} \sum_k \frac{1}{2t} [\max\{0, \nu_{ij}^k - tx_{ij}^k - |\nu_{ij}^k|\}^2] \dots \dots \dots (24)$$

となる。ここに、

$$h_i^k(x) = -\sum_j x_{ij}^k + \sum_j x_{ji}^k + D_i^k \dots \dots \dots (25)$$

$$g_{ij}(x) = \sum_k x_{ij}^k - C_{ij} \dots \dots \dots (26)$$

であり、また $\lambda_i^k, \mu_{ij}, \nu_{ij}^k$ はそれぞれ制約条件式 (11'), (12'), (13') に対するラグランジェ乗数、 r, s, t はペナルティー・パラメーターである。問題は拡張ラグランジェ関数の制約なし最小化であるが、これには種々の制約なし非線形最適化の手法を用いることができる。たとえばネットワークがあまり大きくなければ Newton 法は有力な方法であり、またネットワークが大きければ拡張ラグランジェ関数のヘッセ行列の逆行列を求めるのが困難となるので、Davidon-Fletcher-Powell の可変計量法を用いるのがよいであろう。乗数法による計算のアルゴリズムは次のようになる。

ステップ0 $x, \lambda, \mu, \nu, r, s, t$ の初期値を定める。 $n = 0$ とする。

ステップ1 $Lr, s, t(x, \lambda, \mu, \nu)$ の x に関する制約なし最小化を行い^(付録2)、その解を $x^{(n)}$ とする。

ステップ2 $h_i^k(x^{(n)}) = 0, \quad \forall i, k$
 $g_{ij}(x^{(n)}) \leq 0, \quad \forall ij$
 $x_{ij}^{kn} \geq 0, \quad \forall ij, k$
 ならばストップ。

ステップ3 ラグランジェ乗数値を更新する。
 $\lambda_i^{k(n+1)} = \lambda_i^{kn} + r^{(n)} h_i^k(x^{(n)}), \quad \forall i, k$
 $\mu_{ij}^{(n+1)} = \mu_{ij}^{(n)} + s^{(n)} g_{ij}(x^{(n)}), \quad \forall ij$
 $\nu_{ij}^{k(n+1)} = \nu_{ij}^{kn} - t^{(n)} x_{ij}^{kn}, \quad \forall ij, k$

ステップ4 ペナルティー・パラメーターを大きくする。
 $r^{(n+1)} = \alpha \cdot r^{(n)}$
 $s^{(n+1)} = \beta \cdot s^{(n)}$
 $t^{(n+1)} = \gamma \cdot t^{(n)}$
 ステップ1に戻る。

以上のアルゴリズムにおいては、 x, λ, μ, ν の初期値は0とおいてもよいが、適当な値を設定するのが望ましい。 r, s, t の初期値は1~100程度であり、また α, β, γ は2~10程度の値を用いる。

なおまた、以上のアルゴリズムは乗数法での基本的な計算方法であり、計算の能率を向上するためには制約式のスケールリングやペナルティー・パラメーターの選択等において種々の改良が考えられる。

5. 計算例

(1) 例 1

図-5に示す道路網において、乗数法による均衡フローおよび待ち時間を求める計算を行ってみる。各リンクの交通条件は表-1のとおりとし、また需要交通量は表-2に示すとおりとする。なお例題においては、リンクの識別にリンク番号を用いている。

変数およびラグランジェ乗数の初期値をゼロとし、拡張ラグランジェ関数の最適化には Newton 法を用いた。

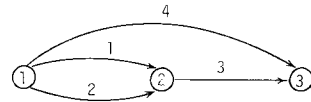


図-5 例1の道路網

表-1 例1のリンク特性

リンク番号(j)	$f_j(x)$	C_j
1	$10^{-4} X^2 + 10$	600
2	$2 \times 10^{-4} X^2 + 17$	500
3	$0.25 \times 10^{-4} X^2 + 9$	800
4	$5 \times 10^{-4} X^2 + 60$	400

表-2 例1の需要交通量

2	3	D	O
600	400	1	
	600	2	

表-3 例1の計算過程

繰返し回数	初期値	1	2	3	
r, s, t		1	10	10^2	
変数	x_1^2	0.0	511.0	502.6	500.0
	x_2^2	0.0	63.4	97.9	100.0
	x_3^2	0.0	-9.0	-0.5	0.0
	x_4^2	0.0	-9.0	-0.5	0.0
乗数	x_1^3	0.0	0.0	0.0	0.0
	x_2^3	0.0	248.3	204.3	200.0
	x_3^3	0.0	821.4	802.6	800.0
	x_4^3	0.0	90.2	194.0	200.0
ラグランジェ乗数	λ_1^2	0.0	34.6	35.2	35.0
	λ_1^3	0.0	61.5	78.6	80.0
	λ_2^3	0.0	26.9	43.4	45.0
	μ_1	0.0	0.0	0.0	0.0
	μ_2	0.0	0.0	0.0	0.0
	μ_3	0.0	1.9	18.3	20.0
	μ_4	0.0	0.0	0.0	0.0

表—4 例1の計算結果

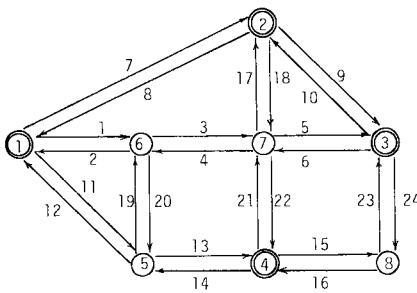
j	X _j	f _j (X _j)	w _j
1	500	35	0
2	300	35	0
3	800	25	20
4	200	80	0

このときの計算の過程は表—3に示すとおりである。変数値およびラグランジェ乗数値は3回のイテレーションで十分収束した。求められた結果は表—4に示すとおりであり、均衡フローのもとではリンク3に20分の待ちが生じている。

この例ではペナルティー・パラメーターの初期値を $r = s = t = 1$ としたが、この値をさらに大きくすると収束性が早くなる。初期値を $r = s = t = 10^4$ くらいにすると、1回のイテレーションでほとんど最適解に接近している。ただし乗数法では、ペナルティー・パラメーターの初期値があまり大きいと目的関数形が険しくなるため、十分な精度で計算を行わないと最適化計算が困難となる場合があり、徐々にペナルティー・パラメーターを大きくしていくことが望ましい。

(2) 例 2

道路網を図—6に、また各リンクの交通条件を表—5に、需要交通量を表—6に示す。



図—6 例2の道路網

表—5 例2のリンク特性

リンク番号(j)	f _j (X)	C _j
1, 2, 4, 5	$5 \times 10^{-6} X^2 + 5$	1000
3, 6	$5 \times 10^{-6} X^2 + 5$	800
7, 8	$25 \times 10^{-6} X^2 + 20$	600
9, 10, 11, 12	$15 \times 10^{-6} X^2 + 10$	600
13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 24	$10 \times 10^{-6} X^2 + 7$	600
18, 21	$10 \times 10^{-6} X^2 + 7$	500

表—6 例2の需要交通量

0	1	2	3	4
1	—	300	900	400
2	300	—	500	600
3	900	500	—	400
4	400	600	400	—

表—7 例2の計算過程

リンク番号 j	初期値 X _j	$(r = s = t = 10^2)$			$(r = s = t = 10^3)$	
1	930.0	801.3	0.0	800.0	0.0	
2	930.0	800.3	0.0	800.0	0.0	
3	790.0	800.2	19.37	800.0	19.85	
4	790.0	799.7	0.0	800.0	0.0	
5	790.0	800.1	0.0	800.0	0.0	
6	790.0	800.2	19.33	800.0	19.85	
7	330.0	302.7	0.0	300.0	0.0	
8	330.0	303.9	0.0	300.0	0.0	
9	580.0	600.1	6.29	600.0	6.80	
10	580.0	600.1	6.26	600.0	6.80	
11	400.0	492.4	0.0	500.0	0.0	
12	400.0	491.4	0.0	500.0	0.0	
13	540.0	492.5	0.0	500.0	0.0	
14	540.0	492.8	0.0	500.0	0.0	
15	590.0	589.2	0.0	600.0	0.0	
16	590.0	589.1	0.0	600.0	0.0	
17	490.0	500.4	0.0	500.0	0.0	
18	490.0	500.2	23.61	500.0	24.40	
19	140.0	0.1	0.0	0.0	0.0	
20	140.0	-0.3	0.0	0.0	0.0	
21	490.0	500.2	23.57	500.0	24.40	
22	490.0	500.2	0.0	500.0	0.0	
23	590.0	588.7	0.0	600.0	0.0	
24	590.0	589.5	0.0	600.0	0.0	

この計算例では需要交通量を適当に配分した結果を初期値とし、ペナルティー・パラメーターの初期値を $r = s = t = 10^2$ として計算を行った。拡張ラグランジェ関数の最適化には同様に Newton 法を用いており、2回のイテレーションによって、変数値およびラグランジェ乗数値は十分収束した。このときの各イテレーションにおけるリンク交通量および待ち時間の値は表—7に示すとおりである。渋滞は6か所のリンクにおいて発生している。特にノード7に流入する4本のリンクにおいては交差点容量の不足のため長い渋滞が生じている。

なお以上の計算例においては複雑性を避けるため、フローの発生・吸引を一般の中間ノードにおいて行っているが、実際の配分計算にあたっては、フローの発生・吸引を特定の架空のノードにおいて行い、これらと実際のリンクを結ぶダミー・リンクを設定することが望ましい。このような場合においても、本計算法は一般性を失わない。

6. 渋滞が上流リンクに延伸するとき

問題(P)においては待ち時間についての制約条件(3)が考慮されていない。したがって、待ち時間が制限長を越えるときには何らかの措置が必要である。ここでは図—5の道路網を例として、渋滞が上流リンクに延伸するときの取り扱い方を考えてみる。

いま需要交通量はノード1, 3間の1000台のみであり、またリンク3の最大待ち時間は15分であると仮定

する。このとき待ち時間の制限なしで計算した結果は、 $X_1=500, X_2=300, X_3=800, X_4=200, w_3=20$ である。リンク3の待ち時間が最大待ち時間を越えているので渋滞はリンク3の全長におよび、さらに上流側のリンク1, 2に延伸するものと思われる。このときの交通流状態を図-7に示す。リンク3の走行所要時間をその最大値40分とすると、このときの均衡条件は

$$X_1 + X_2 = 800 \dots\dots\dots(27)$$

$$f_1(X_1) + w_1 = f_2(X_2) + w_2 \dots\dots\dots(28)$$

$$f_1(X_1) + w_1 + 40 = 80 \dots\dots\dots(29)$$

となる。この場合未知数は X_1, X_2, w_1, w_2 の4つであるから、均衡条件だけでは解は一意的には求まらない。交通量の需給条件(27)を満足する解のうち、目的関数(16)を最も小さくするものは $w_1 = w_2$ の場合であるが、この解がもっともらしいという理由は見出しにくい。この場合、合理的な解を一意的に定めるためには、さらに何らかの条件を導入することが必要である。交差点における信号制御条件特にスプリット条件はこの際の大きなファクターと考えられる。もちろん信号制御条件は、リンク末端での交通容量および信号による遅れ時間を介して待ち行列の形成に影響を及ぼしているが、リンクの全区間が渋滞となった場合にはさらにリンク始端ノードでのスプリット条件が上流側リンクからのフローの流入に直接的に影響してくる。

いま交差点での信号制御条件は与えられているものとし、またリンクの長さがかなりあり、リンクの全区間が渋滞しているような場合には、リンク末端ノードにおける信号現示のオフセットの影響が上流側ノードにまで及ばないものと仮定する。このような仮定のもとでは、リンク3の渋滞の後尾が一定の速度で前進することになるので、ノード2におけるリンク1および2の緑現示時間の比でリンク1および2からリンク3にフローが流入することができる。そこでこの緑現示時間比がたとえば、 $g_1/g_2=0.6/0.4$ となっている場合には、 $X_1=480, X_2=320$ となる。このとき均衡条件は、

$$f_1(X_1) + w_1 = f_2(X_2) + w_2 \dots\dots\dots(28')$$

$$f_1(X_1) + w_1 + 40 = 80 \dots\dots\dots(29')$$

$$X_1 = 480 \dots\dots\dots(30)$$

$$X_2 = 320 \dots\dots\dots(31)$$

となり、これらを連立して解くと $w_1 = 6.96, w_2 = 2.52$ が得られる。これらの解は数値的には、リンク1, 2の

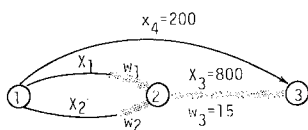


図-7 渋滞の上流リンクへの延伸

容量制限式を(30), (31)に置き換え、またリンク3の容量制限式に関するラグランジュ乗数値を15に固定して、同様に目的関数(16)を最小化することによって得られる。

なおこの場合、信号現示の条件によっては一方のリンクにしか待ち行列ができない場合もある。たとえば、緑現示時間比が $g_1/g_2=0.5/0.5$ となっているものとしよう。このとき $X_1 = X_2 = 400$ となるが、これらを式(28), (29)と連立して解くと、 $w_1 = 14, w_2 = -9$ が得られる。リンク2の待ち時間が負となるので、この場合にはリンク2には待ちは生じないものと考えられる。またこの場合にはリンク1, 2からリンク3への流入交通量の比率は緑現示時間比とは一致しない。この場合の均衡条件は

$$X_1 + X_2 = 800 \dots\dots\dots(27')$$

$$f_1(X_1) + w_1 = f_2(X_2) \dots\dots\dots(32)$$

$$f_1(X_1) + w_1 + 40 = 80 \dots\dots\dots(29')$$

と改められ、解は $X_1 = 460.9, X_2 = 339.1, w_1 = 8.76$ となる。

以上の例は、あくまで先に述べたような仮定を設けた場合の理論的な計算結果である。実際の交通流ではオフセットの影響等のため、これらの仮定は厳密には成り立ちにくいかもしれないが、ここでは解を一意的に決定するための1つの理論モデルとして示したものである。ただし実際にはその取り扱い方は、交差点の形状や信号機制御の方法等個々の交差点の条件によって異なる。また実際の道路網および交通条件下では渋滞が数リンクにわたって延伸する場合もあり、その一般的な取り扱いについてはまだ未解決である。

7. 結 論

今日激増する交通需要に対して道路の整備は遅れており、このため交通渋滞は日常茶飯時になっている。将来の道路網の適正な計画を樹立し、また道路交通の効率的な運用を図るためには、より現実に即した道路網での交通流動の解明が必要である。このため本研究においては、交通渋滞したリンクを有する道路網における交通均衡の概念を明確にし、その数値的解法を示した。本研究の意義は、道路網における定常渋滞流の予測を可能にしたことにある。この手法は、道路網における交通負荷の検討に応用することのできる可能性を有している。

本研究の内容をまとめると次のとおりである。

- (1) 従来の交通均衡理論は交通流が渋滞していないことを前提としたものであり、交通渋滞したリンクでは走行時間関数が二価関数となることから、混雑したネットワークに対する従来の方法の適用には問題がある。
- (2) 実際の道路網では交通渋滞はほとんど交差点での容量不足に起因し、交差点を先頭とする渋滞が発生す

る。この場合渋滞リンクの走行所要時間は、リンクの全長を自由流領域の速度で走行したときの所要時間とリンクの終端における仮想的な待ち時間および信号遅れ時間の和によって表わすことができる。

(3) 道路網、各リンクの交通条件および需要交通量が与えられたとき、リンク交通量および待ち時間は交通均衡条件によって決定することができる。

(4) 交通均衡条件は非線形最適化問題に置き換えることができるが、これは従来の交通均衡問題にリンクでの容量制限式を明示的に付加したものに相当する。

(5) 容量制限付き交通均衡問題では、容量制限式に関するラグランジュ乗数値は当該リンクの渋滞による待ち時間に等しい。

(6) 容量制限付き交通均衡問題は、リンク全交通量に関しては均衡解は唯一である。

(7) 容量制限付き交通均衡問題は、乗数法の適用によって数値的に解くことができ、均衡フローおよび渋滞リンクの待ち時間が求められる。

(8) 容量制限式に関するラグランジュ乗数が上限値を越える場合、すなわち混雑がひどく渋滞が上流リンクにまで延伸するときには、均衡解は唯一ではない。この場合現実に即した均衡解を求めるためには、さらにリンク始端ノードでのスプリット条件を考慮することが必要である。

謝 辞：最後に本研究をとりまとめるにあたり、京都大学 飯田恭敬教授より貴重なご助言をいただいたことを付記し、厚く謝意を表する次第である。

付 録 1

交差点での信号による平均遅れ時間と交通量の関係は、簡略的には次のように求めることができる。

いま、 T, R, G をそれぞれ信号の周期、1 周期中の赤時間、緑時間とし、また交差点への車両の到着は一樣であるとする。図-8 は交差点への到着時刻 t_1 と交差点からの出発時刻 t_2 を示している。

時刻 t_1 に交差点に到着した車の前には qt_1 だけの車

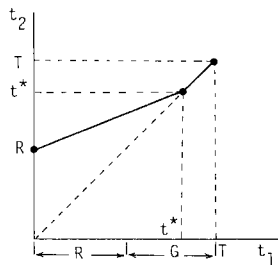


図-8 交差点への到着時刻と交差点からの出発時刻

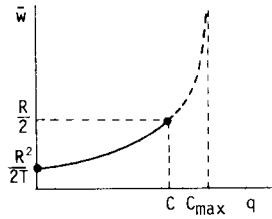


図-9 信号による平均遅れ時間と交通量の関係

両があるから、この車の交差点からの出発時刻は

$$t_2 = R + \frac{qt_1}{C_{max}} \dots\dots\dots(33)$$

となる。ただし $t_2 \geq t_1$ より

$$t_1 \leq \frac{RC_{max}}{C_{max} - q} (= t^*)$$

これ以降に交差点に到着した車両は、ただちに交差点を出発することができる。したがって交差点での信号による平均遅れ時間 \bar{w} は

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \int_0^{t^*} (t_2 - t_1) \cdot \frac{1}{T} dt_1 \\ &= \frac{R^2}{2T} \cdot \frac{C_{max}}{C_{max} - q} \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

となる。

ここで q の上限は

$$\sup q = C_{max} \cdot G / T (= C) \dots\dots\dots(35)$$

であり、これがリンク端末容量に相当する。またこのとき、

$$\bar{w} = R/2$$

となる。図-9 は交通量と交差点での平均遅れ時間との関係を示している。

付 録 2

Newton 法を用いる場合には、アルゴリズムは次のようになる。ただし $L(x) = Lr, s, t(x, \lambda, \mu, \nu)$ 。

(i) 方向ベクトル d を

$$d = -[\nabla^2 L(x^m)]^{-1} \nabla L(x^m)$$

とおく。

(ii) 適当な直線探索アルゴリズムを用いて、

$$L(x^m + \alpha d)$$

を最小にする α の値 α^* を求める。

(iii) $x^m := x^m + \alpha^* d$

によって変数値を更新する。

(iv) $\nabla L(x^m) = 0$ であればステップ 2 へ。さもなければ (i) へ戻る。

参 考 文 献

1) Wardrop, J. G. : Some theoretical aspects of road traffic research, Proc. Inst. Civil Engrs., 1, pp.325~378,

- 1952.
- 2) Beckmann, M. J., McGuire, C. B. and Winsten, C. B. : Studies in the economics of transportation, Yale University Press, 1956.
 - 3) Okutani, I. : Equilibrium flows in a network with congested links, Proc. of the 9th international symposium on transportation and traffic theory, pp.253~271, 1984.
 - 4) Newell, G. F. : The effect of queues on the traffic assignment to freeways, Proc. of the 7th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, pp. 311~340, 1977.
 - 5) Daganzo, C. F. : On the traffic assignment problem with flow dependent costs- I, Transportation research, Vol.11, pp.433~437, 1977.
 - 6) Daganzo, C. F. : On the traffic assignment problem with flow dependent costs- II, Transportation research, Vol.11, pp.439~441, 1977.
 - 7) 今野 浩・山下 浩 : 非線形計画法, 日科技連, pp.237~252, 1978.

(1985.6.17・受付)
