

確率有限要素法による斜面安定解析

PROBABILISTIC FINITE ELEMENT METHOD FOR SLOPE STABILITY ANALYSIS

鈴木 誠*・石井 清**

By Makoto SUZUKI and Kiyoshi ISHII

This paper describes a probabilistic finite element method using the first-order approximation at a failure point of a set of random variables and the method is extended to the equivalent normal representation of nonnormal distributions. The method offers two advantages: Firstly, the method will give a consistent measure of failure probability for the limit-states which are defined in terms of different but equivalent formulations of performance functions. Secondly, the method can be applied to the reliability analysis for nonnormal variates. Comparing the result of this method with that of Monte Carlo simulation, this method gives a satisfactory approximation. Furthermore an application of this method to the stability analysis of earth slope gives probability levels for a local failure and global failure on an assumed failure surface.

1. ま え が き

有限要素法は、航空工学の分野において開発された構造解析手法であるが、複数の材料特性あるいは境界条件の複雑な変化等を容易に取り扱うことができるので、地盤工学においても有効な手法として広く一般に用いられるようになってきた^{1)~3)}。

しかしながら、有限要素法を地盤工学に適用する場合、土の材料特性のもつばらつきを無視して確定値として計算している⁴⁾。このために地盤工学に有限要素法を適用するにあたっては、パラメータスタディーが不可欠であるとの指摘もある⁵⁾。特に斜面の安定問題などでは材料のもつばらつきが解析結果に大きな影響を与える。また、土の材料特性はサンプル地点においてばらつきをもつだけではなく、異なる2地点においても、近い場合は強い相関関係があるが離れると相関関係が弱くなるという空間的なばらつきを有していることも、地盤工学を考えるうえで重要な点である^{4),6)}。

このことから、土のもつ材料特性のばらつきを適切に

考慮することができる確率論に基づく有限要素法が新たに開発されれば、地盤工学への同手法の適用性は大きく向上するものと考えられる。

確率論に基づく信頼性解析としては、数値実験法の1つであるモンテカルロ法がある^{7)~9)}。同手法により破壊確率を求めるためには、一般に数多くの試行を繰り返す必要があり、有限要素法のような複雑なモデルにこの手法を適用した場合には多大な計算機費用が必要になる。

このような観点から Cambou は材料特性および荷重強度を確率変数として、線形一次近似理論を適用し変位および応力の期待値とその分散を解析的に求めることができる方法、すなわち、確率有限要素法を提案した¹⁰⁾。ここで、線形一次近似理論というのはいくつかの確率変数からなる非線形な関数をテーラー展開して二次以降の項を無視して線形化することによりその関数を近似する手法である^{8),9),11)}。

桜井らはこの確率有限要素法を斜面の安定問題に適用し、新たに破壊を定義する性能関数を定めることにより、各要素の破壊確率および単一すべり面における全体破壊確率を求めている¹²⁾。さらに、辰巳らは防波堤の信頼性解析に同手法を適用している¹³⁾。解析の中で、辰巳らは同手法が材料特性や荷重などの確率変数が正規分布のときには精度のよい解を与えるが、正規分布以外のときに

* 正会員 清水建設(株)土木本部開発部
(〒108 港区三田3-13-16 三田43森ビル)

** 正会員 工博 清水建設(株)大崎研究室
(〒100 千代田区内幸町2-2-2 富国生命ビル)

は得られた解の精度が必ずしもよくないことを指摘している。この理由は、線形一次近似に平均値まわりのテーラー展開を用いているためであり、さらに、このやり方では性能関数の定義式により破壊確率の値が変わり、解は不変性をもたない¹⁴⁾。

一方、構造信頼性解析ではHasoferとLindが各確率変数を最も破壊しやすい点（以後破壊点とよぶ）まわりにテーラー展開することにより不変性のある安全性指標を求める方法¹⁵⁾を、また、Rackwitzらは正規分布以外の確率変数を破壊点において正規分布で近似（正規化近似）することにより破壊確率を精度よく求める方法¹⁶⁾を提案している。

したがって、これらの方法を確率有限要素法に導入すれば、性能関数の定義式によらず不変性のある安全性指標（破壊確率）が得られ、さらに確率変数が正規分布以外の場合においても、精度よく解を求めることができる一般性のある確率有限要素法が開発できる。

本研究では、上に述べた一般性のある確率有限要素法の定式化を示し、簡単な数値解析例からその適用性を検証するとともに、手法のもつ適用限界についても考察を加えた。さらに、桜井らが実施した斜面の安定解析¹²⁾に本手法を適用し、結果を比較することで本手法の有効性を示した。しかし本研究では、①解析に用いられる力学理論および解析モデルの妥当性、②解析に用いられる確率変数の確率統計特性の正しい評価方法については述べていないので、実際に土構造物に信頼性設計を適用するにあたっては、①、②の研究がさらに必要である。

2. 確率有限要素法の定式化

(1) 概 要

本確率有限要素法は破壊点まわりのテーラー展開による線形一次近似理論を適用し、さらに正規分布以外の確率変数に対しては破壊点において正規化近似を行うことにより、性能関数の定義式によらず不変性をもつ破壊確率を精度よく求める方法である。

解析における確率変数は材料特性、荷重および境界変位である。ここで、材料特性においては土の弾性係数 E 、ポアソン比 ν 、単位体積重量 γ 、粘着力 c 、および内部摩擦角 ϕ 等を確率変数として取り扱っている。また、境界条件に強制変位を入れるときを考慮して、境界変位を確率変数として扱うことができるように定式化を行っている。

破壊を定義する性能関数は、各要素で潜在すべり面としての層理面が存在しない場合と層理面が存在する場合の2種類を想定する。また、層理面に沿った単一すべり面を想定し、すべり面上における全体破壊についても定式化を行っている。

以下の説明では、変位および応力への線形一次近似理論の適用と、その期待値、分散などの誘導方法(2)、性能関数および破壊確率の定義と、その計算方法(3)、さらに、破壊点を得るための収束計算手法(4)を示し、最後に解析の全体フロー(5)を示す。

(2) 変位、応力に関する計算

一般の有限要素法において、変位と荷重の関係は次の剛性方程式によって与えられる。

$$[K]\{u\} = \{P\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $\{u\}$ は変位ベクトル、 $\{P\}$ は荷重ベクトルである。

また、応力と変位の関係は次のようになる。

$$\{\sigma\} = [D][B]\{u\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $[D]$ および $[B]$ は、それぞれ応力とひずみ、ひずみと変位を結び付けるマトリックスである。

a) 変位の計算

各要素の変位の期待値 $E[u_i]$ 、分散 $Var[u_i]$ および共分散 $Cov[u_i, u_j]$ は次のように計算される。まず、変位 u_i を確率変数 x_k の破壊点まわりにテーラー展開し、二次以降の項を無視して線形近似する¹⁵⁾。

$$u_i = u_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) + \sum_{k=1}^m (x_k - x_k^*) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_* \dots (3)$$

ここで、 x_k は確率変数であり、その個数を m 個とする。また、 x_k^* は x_k の破壊点、 $(\partial u_i / \partial x_k)_*$ は破壊点における偏導関数の値を示す。

式(3)から、変位 u_i の期待値と分散は次のように与えられる。

$$E[u_i] = u_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) + \sum_{k=1}^m (\mu_{x_k} - x_k^*) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_* \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} Var[u_i] &= E\{[E[u_i] - u_i]^2\} \\ &= E\left\{ \left[\sum_{k=1}^m (\mu_{x_k} - x_k) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_* \right]^2 \right\} \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_* \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right)_* E[(\mu_{x_k} - x_k)(\mu_{x_l} - x_l)] \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_* \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right)_* Cov[x_k, x_l] \dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここで、 μ_{x_k} は x_k の平均値、 $Cov[x_k, x_l]$ は x_k と x_l の共分散である。また、変位 u_i と u_j の共分散は、

$$\begin{aligned} Cov[u_i, u_j] &= E\{[E[u_i] - u_i][E[u_j] - u_j]\} \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_* \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right)_* Cov[x_k, x_l] \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

である。

さらに式(4)~(6)の計算に必要な $u_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ および $(\partial u_i / \partial x_k)_*$ は次のように算定される。また、確率変数 x_k と x_l の共分散マトリックスを含むことによ

り、土質定数間の相関あるいは空間的な位置による土質定数の相関を考慮することができる。

(i) $u_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ の算定

有限要素法において変位と荷重の関係は式(1)によって与えられる。ここで、式(1)は未知の変位と既知の未知に分けることにより次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_k\} \\ \{u_{\text{既}}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_i\} \\ \{P_j\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_k\} \\ \{u_{\text{既}}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_i\} - [K_{12}]\{u_{\text{既}}\} \\ \{u_{\text{既}}\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

式(8)より、未知の変位 $\{u_k\}$ は次のように表わされる。

$$\{u_k\} = [K_{11}]^{-1} \{P_i\} - [K_{12}]\{u_{\text{既}}\} \dots\dots\dots (9)$$

式(9)において、確率変数である E, ν は $[K_{11}], [K_{12}]$ に、また、 γ, P は $\{P_i\}$ に、 u は $\{u_{\text{既}}\}$ のベクトルに含まれる。したがって、後述する収束計算によりこれらの確率変数の破壊点における値 $x_k^* (k=1, 2, \dots, m)$ を求めれば、式(9)により破壊点 x_k^* における未知の変位 u_k^* が求められる。

(ii) $(\partial u_i / \partial x_k)_*$ の算定

$(\partial u_i / \partial x_k)_*$ の計算は確率変数 x_k が変位のとときと、それ以外のとときとで定式化が異なる。

① 確率変数 x_k が変位 u_i 以外の場合 (すなわち、確率変数が E, ν, γ, P, u のとき)

式(1)の両辺を x_k で微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial [K]}{\partial x_k} \{u\} + [K] \frac{\partial \{u\}}{\partial x_k} = \frac{\partial \{P\}}{\partial x_k} \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial \{u\}}{\partial x_k} = [K]^{-1} \left\{ \frac{\partial \{P\}}{\partial x_k} - \frac{\partial [K]}{\partial x_k} \{u\} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

収束計算により x_k^* を求めれば、式(11)の右辺に含まれる各項は既知となり、 $(\partial u_i / \partial x_k)_*$ を計算することができる。

② 確率変数 x_k が変位 u_i の場合

式(9)の両辺を x_k で微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \{u_k\}}{\partial x_k} = -[K_{11}]^{-1} [K_{12}] \frac{\partial \{u_{\text{既}}\}}{\partial x_k} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $\partial \{u_{\text{既}}\} / \partial x_k$ は $x_k = u_i$ のとき1、それ以外では0となる要素より構成されるベクトルである。すなわち、

$$\frac{\partial \{u_{\text{既}}\}}{\partial x_k} = \frac{\partial \{u_{\text{既}}\}}{\partial u_{k=i}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots i \text{ 番目} \dots\dots\dots (13)$$

したがって、収束計算により x_k^* を求めれば、式(12)および(13)から $(\partial u_i / \partial x_k)_*$ が求められる。

b) 応力の計算

各要素の応力の期待値 $E[\sigma_i]$ 、分散 $Var[\sigma_i]$ および共分散 $Cov[\sigma_i, \sigma_j]$ は次のように計算される。変位の計算と同様に、応力 σ_i を確率変数 x_k の破壊点まわりにテーラー展開し、二次以降の項を無視して線形近似する。

$$\sigma_i = \sigma_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) + \sum_{k=1}^m (x_k - x_k^*) \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_k} \right)_* \dots\dots\dots (14)$$

式(15)から、応力 σ_i の期待値、分散および応力 σ_i と σ_j の共分散は次のように与えられる。

$$E[\sigma_i] = \sigma_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) + \sum_{k=1}^m (\mu_{x_k} - x_k^*) \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_k} \right)_* \dots\dots\dots (15)$$

$$Var[\sigma_i] = E\{[E[\sigma_i] - \sigma_i]^2\} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_k} \right)_* \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_l} \right)_* Cov[x_k, x_l] \dots\dots\dots (16)$$

$$Cov[\sigma_i, \sigma_j] = E\{[E[\sigma_i] - \sigma_i][E[\sigma_j] - \sigma_j]\} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_k} \right)_* \left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_l} \right)_* Cov[x_k, x_l] \dots\dots\dots (17)$$

式(15)~(17)の計算に必要な $\sigma_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ および $(\partial \sigma_i / \partial x_k)_*$ の誘導方法を以下に示す。

(i) $\sigma_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ の算定

有限要素法において、式(2)より要素 j について応力と変位の関係は次式で与えられる。

$$\{\sigma\}_j = [D]_j [B]_j u_j \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 $\{\sigma\}_j$ は図-1に示される要素をもつ応力ベクトル $\{\sigma\}_j^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ である。 $\{u\}_j$ は、収束計算の結果から得られる $\{u\}_j^*$ を式(18)に代入することにより求められる。

(ii) $(\partial \sigma_i / \partial x_k)_*$ に算定

式(18)の両辺を x_k で微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \{\sigma\}_j}{\partial x_k} = \frac{\partial [D]_j}{\partial x_k} [B]_j u_j + [D]_j [B]_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \dots\dots\dots (19)$$

ここで $[B]_j$ は x_k とは独立であるので $\partial [B]_j / \partial x_k = [0]$ となり、 $[B]_j$ の偏導関数の項は省かれている。

$(\partial \{\sigma\}_j / \partial x_k)_*$ は $\{u\}_j^*$ および $(\partial u_j / \partial x_k)_*$ を式(19)に代入することにより求められる。

主応力の期待値、分散および共分散は次のように求められる。すなわち、平面問題を考えると主応力および最大せん断力は ξ, ζ 方向の応力を用いて、次式によって

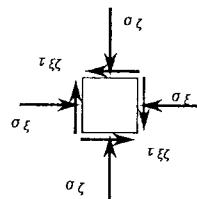


図-1 要素に作用する応力

与えられる (式 (21)~(23) において、要素番号を示す添字 j は省略している)。

$$|\sigma^*|_j^T = |\sigma_1, \sigma_2, \tau_{\max}|_j \dots \dots \dots (20)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_\xi + \sigma_\zeta}{2} + \left[\left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\zeta}{2} \right)^2 + \tau_{\xi\zeta}^2 \right]^{1/2} \dots \dots \dots (21)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_\xi + \sigma_\zeta}{2} - \left[\left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\zeta}{2} \right)^2 + \tau_{\xi\zeta}^2 \right]^{1/2} \dots \dots \dots (22)$$

$$\tau_{\max} = \left[\left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\zeta}{2} \right)^2 + \tau_{\xi\zeta}^2 \right]^{1/2} \dots \dots \dots (23)$$

また、主応力の偏導関数は式 (21)~式 (23) を x_k に関して偏微分することにより与えられる。

式 (20)~式 (23) およびその偏導関数に (i) および (ii) で求めた $|\sigma^*|_j$, $(\partial|\sigma^*|_j/\partial x_k)^*$ を代入して $|\sigma^*|_j$, $(\partial|\sigma^*|_j/\partial x_k)^*$ を計算する。さらに、この結果を式 (15)~式 (17) に代入すれば、主応力の期待値、分散および共分散も求めることができる。また、 ξ , ζ 方向の応力は単に式 (18) および式 (19) を式 (15)~式 (17) に代入することにより得られる。

(3) 性能関数の定義とその計算

ここでは、局部破壊と全体破壊を考えた 2 種類の性能関数を考える。定式化における応力 σ は、土質力学における表示法に従って、圧縮を正とする。

a) 局部破壊を考えたとき

(i) 層理面が存在しない場合

せん断破壊に関する性能関数を次のように定義する¹⁷⁾ (ここで、要素番号は式中より省略する)。

$$Q_s = \tau_r - \tau_{\max} = c \cos \phi + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \dots \dots \dots (24)$$

ここで記号は図-2 を参照して、 τ_r : モール円の中心から破壊規準までの距離、 c : 粘着力、 ϕ : 内部摩擦角

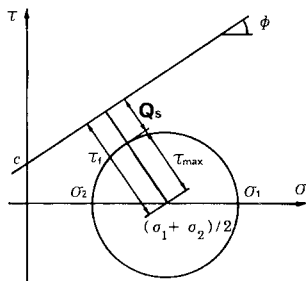


図-2 層理面が存在しない場合の性能関数

これより、式 (24) を破壊点まわりでテーラー展開し、二次以降の項を無視すると、性能関数 Q_s の平均値は次のように表わされる。

$$E[Q_s] = c^* \cos \phi^* + \frac{1}{2}(\sigma_1^* + \sigma_2^*) \sin \phi^* - \frac{1}{2}(\sigma_1^* - \sigma_2^*)$$

$$+ (\mu_c - c^*) \left(\frac{\partial Q_s}{\partial c} \right)^* + (\mu_\phi - \phi^*) \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi} \right)^* + \sum_{k=1}^m (\mu_{x_k} - x_k^*) \left(\frac{\partial Q_s}{\partial x_k} \right)^* \dots \dots \dots (25)$$

また、性能関数の分散についても同様にして次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} Var[Q_s] &= \left(\frac{\partial Q_s}{\partial c} \right)^*{}^2 Var[c] + \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi} \right)^*{}^2 Var[\phi] \\ &+ 2 \left(\frac{\partial Q_s}{\partial c} \right)^* \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi} \right)^* Cov[c, \phi] \\ &+ \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial Q_s}{\partial x_k} \right)^* \left(\frac{\partial Q_s}{\partial c} \right)^* Cov[x_k, c] \\ &+ \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial Q_s}{\partial x_k} \right)^* \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi} \right)^* Cov[x_k, \phi] \\ &+ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial Q_s}{\partial x_k} \right)^* \left(\frac{\partial Q_s}{\partial x_l} \right)^* Cov[x_k, x_l] \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

ここで、

$$\left(\frac{\partial Q_s}{\partial c} \right)^* = \cos \phi^* \dots \dots \dots (27)$$

$$\left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi} \right)^* = -c^* \sin \phi^* + \frac{1}{2}(\sigma_1^* + \sigma_2^*) \cos \phi^* \dots \dots \dots (28)$$

また、 x_k が E, ν, γ, P, u のとき、 Q_s の x_k に関する偏導関数は次式で与えられる。

$$\left(\frac{\partial Q_s}{\partial x_k} \right)^* = \frac{1}{2}(\sin \phi^* - 1) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_k} \right)^* + \frac{1}{2}(\sin \phi^* + 1) \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x_k} \right)^* \dots \dots \dots (29)$$

(ii) 層理面が存在する場合

層理面が存在する場合のせん断破壊に関する性能関数は、慣用的に最もよく用いられている方法として層理面上の直応力 σ が変化しないと仮定する方法を用いる¹⁷⁾。すなわち、せん断破壊に関する性能関数は層理面方向を定めるために水平面からの角度を用いて次式で定義する (ここで、要素番号は式中より省略する)。

$$Q_s = \tau_r - \tau = c + \sigma \tan \phi - \tau \dots \dots \dots (30)$$

ここで記号は図-3 を参照して、

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \dots \dots \dots (31)$$

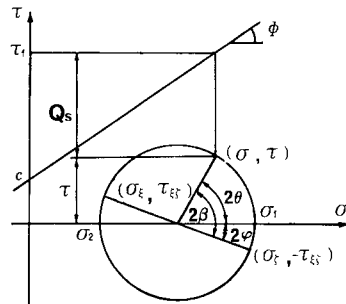


図-3 層理面が存在する場合の性能関数

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\theta \dots\dots\dots (32)$$

$$\theta = \beta \cdot \psi + \pi/2$$

β : 水平面から層理面への角度

ψ : 水平面から最大主応力面への角度 :

$$\psi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{\max}}{\sigma_1 - \sigma_2} \right) \dots\dots\dots (33)$$

式 (30) に式 (31), (32) を代入すると,

$$Q_s = c + \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta \right] \tan \phi - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\theta \dots\dots\dots (34)$$

となる。

層理面が存在する場合の性能関数 Q_s の平均値 $E[Q_s]$, 分散 $Var[Q_s]$ および共分散 $Cov[Q_{s,i}, Q_{s,j}]$ は, 式 (34) を破壊点まわりでテーラー展開し, 二次以降の項を無視して, Q_s の線形近似式を得ることによって (i) と同じように求められる。

b) 全体破壊に対する性能関数¹²⁾

全体破壊, すなわち, ある仮定した単一すべり面に対する全体破壊の性能関数は, 層理面が存在する場合の各要素の性能関数 $Q_{s,i}$ をすべり面の長さとかけて合わせ, すべり面全体で加算することによって表わす。すなわち,

$$\tilde{Q}_s = \sum_{i=1}^N Q_{s,i} \Delta l_i \dots\dots\dots (35)$$

ここで, Δl_i は i 番目の要素のすべり面が切る長さであり, N は層理面が切る要素の総数である。

これより, 式 (35) を破壊点まわりでテーラー展開し, 二次以降の項を無視すると, \tilde{Q}_s の平均値および分散は次のようになる。

$$E[\tilde{Q}_s] = \sum_{i=1}^N E[Q_{s,i}] \Delta l_i \dots\dots\dots (36)$$

$$Var[\tilde{Q}_s] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Cov[Q_{s,i}, Q_{s,j}] \Delta l_i \Delta l_j \dots\dots\dots (37)$$

ここで $E[Q_{s,i}]$ および $Cov[Q_{s,i}, Q_{s,j}]$ はそれぞれ層理面が存在する場合の $Q_{s,i}$ に対する平均値と $Q_{s,i}$ と $Q_{s,j}$ との共分散である。

(4) 破壊確率の計算

a) 局部破壊の安全性指標

要素 i の安全性指標 β_i は, 次式で表わされる。

$$\beta_i = \frac{E[Q_{s,i}]}{(Var[Q_{s,i}])^{1/2}} \dots\dots\dots (38)$$

ここで, $E[Q_{s,i}]$, $Var[Q_{s,i}]$ は $Q_{s,i}$ に対する平均値と分散である。

各要素の安全性指標は破壊点における確率変数の値に依存するので, 破壊点を確定するための収束計算が必要になる。破壊点を求めるには Hasofer と Lind が提案している方法を用いる¹⁵⁾。この方法の概略を以下に示す。

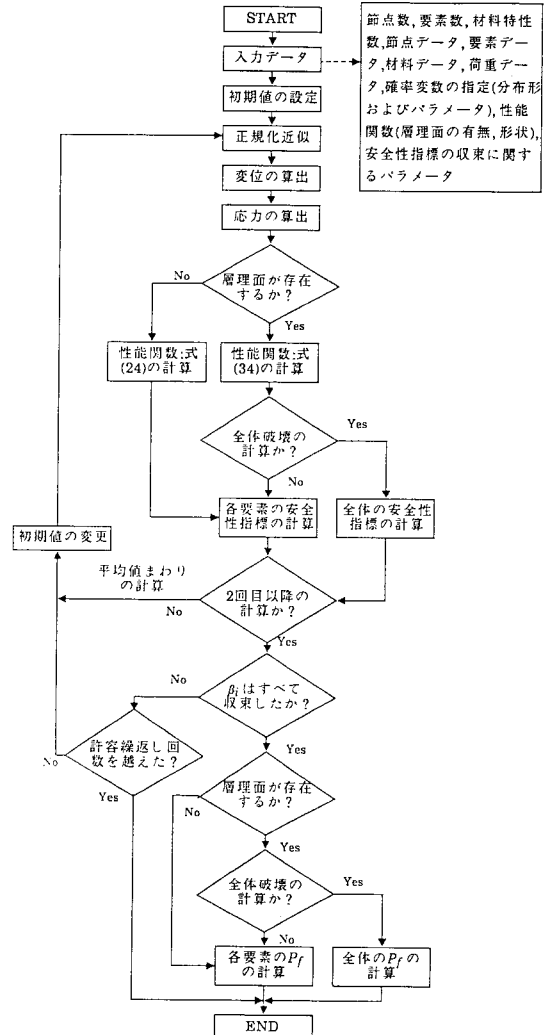


図-4 全体フロー

まず確率変数 $x_{k,i}$ による性能関数 $Q_{s,i}$ の偏導関数より以下の式で $\alpha_{k,i}$ を計算する。

$$\alpha_{k,i} = \frac{\left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial x_{k,i}} \right)_* (Var[Q_{s,i}])^{1/2}}{\left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial Q_s}{\partial x_{k,i}} \right)_*^2 Var[Q_{s,i}] \right)^{1/2}} \dots\dots\dots (39)$$

次に要素 i の β_i を用いて, 確率変数 x_k の破壊点を次のように表わす。

$$x_{k,i}^* = \mu_{x_{k,i}} - \alpha_{k,i} \beta_i (Var[x_{k,i}])^{1/2} \dots\dots\dots (40)$$

そして, この値を用いて, 要素 i の β_i を計算する。また, この計算は全要素について行う。ここで, 各要素の β_i の収束を判定し, すべての要素の安全性指標が収束するまで新しい β_i , $\alpha_{k,i}$ を与え, 収束計算を繰り返す。 β_i , $\alpha_{k,i}$ の初期値には平均値まわりのテーラー展開の計

算結果を用いる。

b) 全体破壊の安全性指標

式 (36), (37) で求めた $E[\tilde{Q}_s]$, $Var[\tilde{Q}_s]$ を用いて以下の式によって, 安全性指標を計算する. すなわち, 安全性指標 $\tilde{\beta}$ は,

$$\tilde{\beta} = \frac{E[\tilde{Q}_s]}{(Var[\tilde{Q}_s])^{1/2}} \dots \dots \dots (41)$$

で表わされる。

全体破壊の安全性指標もまた破壊点における確率変数の値に依存するので, 局部破壊と同様の取束計算を行う。

c) 破壊確率の計算

局部破壊で求めた各要素の安全性指標 β_i , あるいは全体破壊であるすべり面の安全性指標 $\tilde{\beta}$ から, 破壊確率は次式により計算できる. すなわち,

$$P_{f,i} = \Phi(-\beta_i) \dots \dots \dots (42)$$

$$P_f = \Phi(-\tilde{\beta}) \dots \dots \dots (43)$$

ここで, $\Phi(\cdot)$ は標準正規確率分布関数を表わす。

(5) 計算の全体フロー

以上述べてきた計算の全体フローを図-4 に示す。

3. 数値解析例

本章では, はじめに3つの三角形要素からなる簡単なモデルに本手法を適用して手法の有効性またその解析精度を検証し, 次に要素数216の三角形要素で表わされた斜面構造物に本手法を応用して実際の構造物モデルへの適用性を示すことにする。

(1) 精度の検証と手法の適用性

本手法すなわち, 破壊点まわりのテーラー展開による確率有限要素法の精度を, 図-5 に示されるモデルを用いて検証する. 検証は本手法により得られた結果とモンテカルロ法による結果とを比較することによって行う。

解析モデルは, 3つの三角形要素より成る4自由度のモデルである¹³⁾. 荷重条件としては, 自重, 水平震度0.5および節点集中荷重をそれぞれ図-5に示すように与えた. また, 解析における確率変数は, 弾性係数 E , 単位体積重量 γ , 内部摩擦角 ϕ , 粘着力 c および波高 H である (ポアソン比 ν は結果への影響が少ないこと

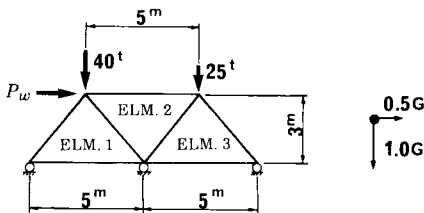


図-5 解析モデル¹³⁾

表-1 解析に用いる変数¹³⁾

材料特性	平均値	変動係数 (C.O.V.)			
		CASE-1	CASE-2	CASE-3	CASE-4
弾性係数 E	100 000 t/m ²	0.1	0.1	0.1	0.3
ポアソン比 ν	0.3	0.1 (確定値)	0.1 (確定値)	0.1 (確定値)	0.3 (確定値)
単位体積重量 γ	2.3 t/m ³	0.1 (確定値)	0.1 (確定値)	0.1 (確定値)	0.3 (確定値)
粘着力 c	1.0 t/m ²	0.1	0.1	0.1	0.3
内部摩擦角 ϕ	35°	0.077	0.077	0.077	0.231
備考		分布形は正規分布		分布形は対数正規分布	

(CASE-1は文献12)から引用)

から確定値: $\nu=0.48$ とした). また, 荷重のうち確率変数 P_w は波高 H の関数として次式により与えられるものとする。

$$P_w = 0.2308H + 0.2308H^3$$

各確率変数の統計値は, その目的から表-1 に示すように, CASE-1~3の3ケースを想定している. CASE-1では, E, γ, ϕ, c は正規分布として仮定し, H は確定値とする. また反対に, CASE-2および3では, E, γ, ϕ, c は確定値として, H のみを確率変数とした. H はCASE-2では正規分布, CASE-3ではワイブル分布に従うとする. さらに, それぞれの確率変数および各要素は互いに独立であると仮定している. なお, 上記の例題では考慮していないが, 実際の構造物の信頼性解析では感度解析を行い, 破壊確率に対する各パラメーターの影響より最終的な確率変数を決定する。

CASE-3における波高 H の確率密度関数は, 次式で与えられるワイブル分布とする。

$$f_d(H) = \frac{K}{A} \left(\frac{H-B}{A} \right)^{K-1} \exp \left[- \left(\frac{H-B}{A} \right)^K \right]$$

また, 定数 A, B, K は, $K=1.5$ と仮定して, H の平均値が5.0m, 変動係数が0.2となるように $A=1.634, B=3.524$ とした. 波高 H の確率密度関数を図-6 に示

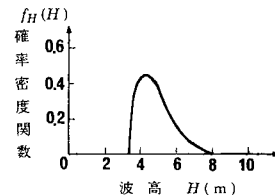


図-6 ワイブル分布

表-2 解析結果

CASE	要素	モンテカルロ法	平均値まわり	破壊点まわり
CASE-1	ELM.1	30.9%	30.8%	30.8%
	ELM.2	36.2%	36.4%	36.4%
	ELM.3	32.8%	32.6%	32.6%
CASE-2	ELM.1	45.5%	45.5%	45.5%
	ELM.2	3.5%	6.1%	6.1%
	ELM.3	40.7%	40.5%	40.5%
CASE-3	ELM.1	36.5%	45.5%	38.2%
	ELM.2	0.0%	6.1%	0.0%
	ELM.3	32.5%	40.5%	34.5%

す。

各要素の破壊確率について、確率有限要素法による結果とモンテカルロ法による結果（試行回数 2000 回）を表一2 に示す。確率有限要素法による解の収束誤差の判定は安全性指標で 0.01 とすると、解は 3~4 回の繰り返し計算で収束する。

また、モンテカルロ法による結果は文献 3) による。これらの結果から以下のことがわかる。

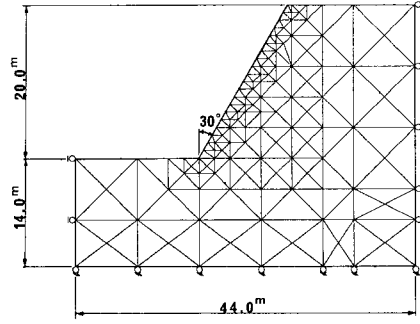
① 確率変数が正規分布の場合、すなわち CASE-1 および 2 では平均値まわりのテーラー展開を用いる従来の確率有限要素法と同様に本手法による解はモンテカルロ法の解とよく一致している。

② 確率変数がワイブル分布のような複雑な分布形に従う場合、CASE-3 に示されるように、従来の確率有限要素法による解析結果はモンテカルロ法の解とあまりよく一致しないが、性能関数の破壊点に対してテーラー展開を行う本手法の解析結果は、モンテカルロ法の解とよく一致している。

上述の検討結果から、モデルに含まれる確率変数が正規分布以外にも本手法が適用可能であり、その精度が、平均値まわりのテーラー展開を用いている従来の確率有限要素法解析と比べて改善されていることがわかった。

しかしながら、本手法もすべての解析条件に適用可能であるとは考えられない。たとえば、計算に線形一次近似理論を用いていることから、適用限界の 1 つとして確率変数の変動（係数）が大きくなった場合が想定される。このことから、確率変数の変動係数の大きさによる確率有限要素法の精度への影響の検討を行った。解析には、図一5 のモデルを用いて、本手法により得られた解とモンテカルロ法により得られた解を比較することによって解の精度を検討した。

荷重条件として、自重、水平震度および鉛直方向の節点集中荷重は CASE-1 と同じものとし、波圧 P_w を平均値 30 t の正規分布として、その変動係数を変化させ



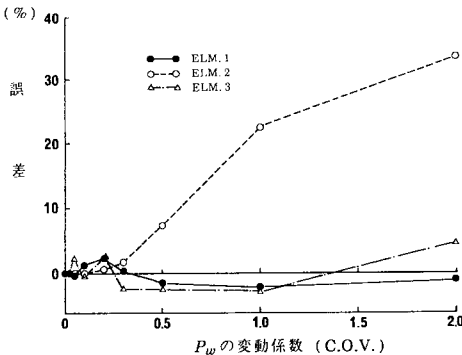
図一8 解析モデル¹²⁾

ることとした。また、解の精度はモンテカルロ法の試行回数 5000 回の結果を正解値として、本手法により得られた解との相対誤差により示すことにした。

解析結果を図一7 に示す。これより、 P_w の変動係数の増加に従って、ELM.1 および 3 の誤差はほとんど大きくならないが、ELM.2 の誤差は大きくなっている。この計算結果のみから速断はできないが、確率変数の変動係数の増加に従って計算誤差が大きくなる可能性があることは示唆される。しかし、変動係数 0.3 および 0.5 で、ELM.1~3 の誤差はそれぞれ 4 % および 8 % 以内であり実用上は問題ないと考えられる。

(2) 斜面構造物に対する適用

斜面構造物に対するすべり破壊を検討する。解析に用いた斜面の確率有限要素モデルを図一8 に示す。このモデルは文献 12) より引用した。要素数は 216 であり、確率変数には、弾性係数 E 、ポアソン比 ν 、単位体積重量 γ 、粘着力 c 、内部摩擦角 ϕ の 5 つを考え、分布形や変動係数の値を変えた表一3 に示される 4 ケースを検討した。ここで内部摩擦角 ϕ については、 $\tan \phi$ の変動係数が他の確率変数の変動係数と同等になるように ϕ の変動係数を決めている。また、各要素の確率変数は今回は空間的にはばらつかず完全相関とする。CASE-1 と CASE-2 は、ポアソン比と単位体積重量を確率変数とするか確定値とするかの差を比較している。また、CASE-2 と CASE-3 は、弾性係数 E 、粘着力 c 、内部摩擦角 ϕ を確率変数として、確率変数の分布形を正規



図一7 P_w の変動係数による各要素の誤差

表一3 解析に用いる変数

材料特性	平均値	変動係数 (C.O.V.)		
		CASE - 1	CASE - 2	CASE - 3
弾性係数 E	10 000 tf/m ²	0.2 (確定値)	(確定値)	(確定値)
ポアソン比 ν	0.48	(確定値)	(確定値)	(確定値)
単位体積重量 γ	1.8 tf/m ³	0.2 (確定値)	(確定値)	(確定値)
粘着力 c	0.5 tf/m ²	0.2 (確定値)	(確定値)	(確定値)
内部摩擦角 ϕ	30°	0.2 (確定値)	(確定値)	(確定値)
波高 H	5.0 m	(確定値)	0.2	0.2
備考		分布形は正規分布	分布形は正規分布	分布形は対数正規分布

分布と対数正規分布とした場合である。さらに、CASE-4はCASE-3の確率変数の変動係数を0.1から0.3へと変化させている。全ケースとも層理面の存在する場合と存在しない場合の2種類の局部破壊確率を計算し、層理面が存在する場合はさらに、全体破壊である単一すべり面に対する破壊を計算する。また、層理面は水平面から40°と仮定している。ここで、局部破壊確率は斜面安定に対する抑止工の設計資料として重要である。また、層理面を考慮して求められる全体破壊確率はその破壊確率が最も大きくなる面で評価される。しかし、その面の位置は確定できないのでパラメーターとして計算を行う。

局部破壊すなわち、各要素の破壊確率に関する解析結果を図-9～12に示す。ここでCASE-1の平均値まわりの計算は文献12)の結果と同じである。この計算は著者らのプログラムの検証としても行った。CASE-1～3の結果はほとんど同じとなったので、ここではCASE-1の結果のみ示している(図-9, 10参照)。これより、ポアソン比 ν と単位体積重量 γ の変動が各要素の破壊確率に与える影響は小さいことがわかった。また、CASE-3は対数正規分布の場合に平均値まわりのテーラー展開を用いている従来の確率有限要素法と破壊点まわりのテーラー展開を用いている本手法との違いをみるためのものであるが、両者にもほとんど差はなかった。これは、確率変数の変動係数を0.1と小さめに設定

したために、正規分布と対数正規分布の差が顕著でないことによる。このことからCASE-4では、変動係数を0.3と大きくした。結果として、従来の方法と本手法による結果の間には明らかに差があることがわかる(図-11, 12参照)。

層理面を仮定して得られる全体破壊確率の解析結果を図-13～図-15に示す。破壊確率はすべり面の位置(のり肩からの距離 S)をパラメーターとして表わされている。図-13の結果はCASE-1に対するものである。また、同図には比較のために、極限平衡法によって得られる破壊確率¹²⁾と平均値まわりの破壊確率を合わせて示してある。

CASE-1のモデルでは、確率変数をすべて正規分布

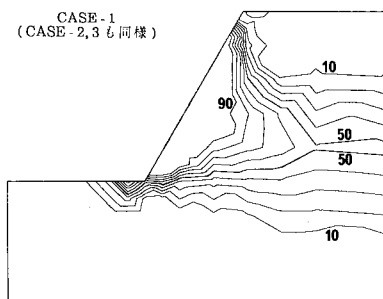


図-9 局部破壊確率 (層理面なし)

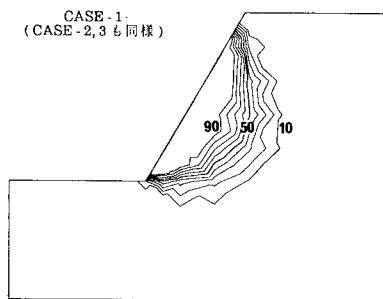


図-10 局部破壊確率 (層理面あり)

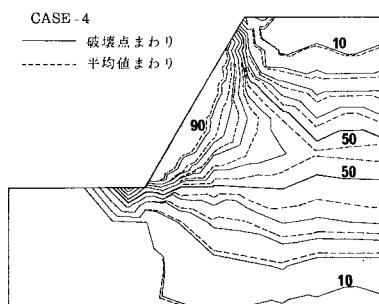


図-11 局部破壊確率 (層理面なし)

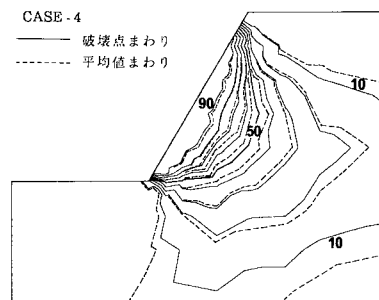


図-12 局部破壊確率 (層理面あり)

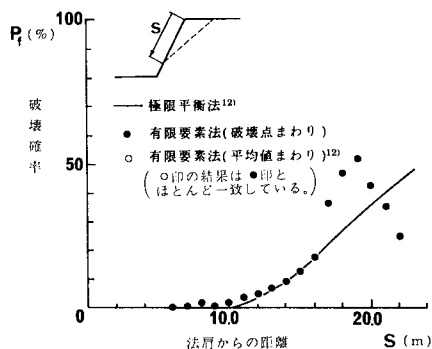


図-13 全体破壊確率 (CASE-1)

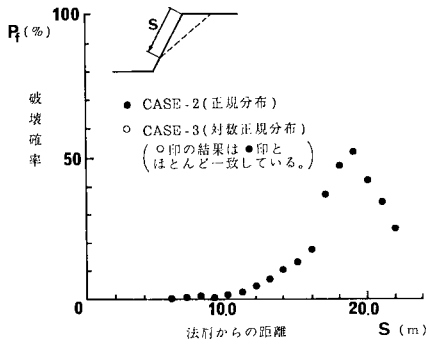


図-14 全体破壊確率 (CASE-2,3)

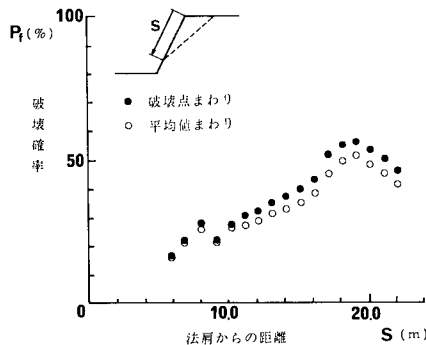


図-15 全体破壊確率 (CASE-4)

としているので、本手法と従来の確率有限要素法による解は一致する。また、 S が 16 m までは、確率有限要素法による結果は極限平衡法による結果ともよく一致しているが、 S がそれ以上大きくなると両者には大きな差が現われる。これはのり尻部分の要素が、ポアソン比による水平方向の応力による影響を受けるためである。

また、図-14 は CASE-2 と CASE-3 のモデルについて、層理面を仮定して得られる全体破壊確率を比較したものである。ここで、CASE-2 では弾性係数、粘着力および内部摩擦角を確率変数として、その確率分布を変動係数 0.1 なる正規分布としている。一方、CASE-3 では、CASE-2 のモデルにおいて確率分布のみを対数正規分布に変更したものである。図-14 では、両者の結果はほとんど一致したものになっている。これは、確率分布のもつ変動係数が 0.1 と小さいためである。図-15 には CASE-4 に対して、従来の手法と本手法による解析結果を比較したものを示す。これより、変動係数が 0.1 から 0.3 と大きくなると、従来の手法と本手法による結果の間には明らかに差があり、本手法によれば従来の手法による解と比べて精度は向上する。

以上の結果より、本手法も従来の確率有限要素法と同じように層理面を仮定して得られる全体破壊を評価することができ、さらに確率変数が正規分布以外の分布形に

従うときにも、本手法が適用できることがわかった。

4. 結 論

本研究は確率有限要素法の定式化とその数値解析例を示したものである。結果は以下のようにまとめられる。

(1) Hasofer, Lind による破壊点まわりのテーラー展開による線形一次近似理論、また Rackwitz らによる確率変数の正規化近似手法を用いることにより性能関数の定義式によらず不変性のある安全性指標 (破壊確率) が得られ、かつ確率変数が正規分布以外の場合にも、解を精度よく求めることができる。

(2) 3つの三角形よりなる簡単なモデルを用いて、本手法の精度および適用性の検討をした。結果として、本手法による解はモンテカルロ法による解とよく一致し、平均値まわりのテーラー展開による線形一次近似理論を用いている従来の手法よりも解の精度が向上していることがわかった。

(3) 本手法は線形一次近似理論を用いているため、変動係数の大小が解の精度に影響すると考えられる。変動係数の増加に従って計算誤差は常に大きくなるとはいえないが、影響を強く受ける可能性もあることがわかった。ただし、変動係数が 0.5 よりも小さい範囲では、誤差は 8% 以内に入り、誤差は実用上十分に小さいことがわかった。

(4) 斜面の安定解析に本手法を適用し、局部破壊確率と全体破壊確率を求めた。結果として、確率変数が正規分布に従う場合や変動係数の小さい対数正規分布に従う場合は、従来手法と本手法による結果には差がほとんどみられなかった。しかし、変動係数が 0.3 になると、両者には明らかな差が現われた。

謝 辞：本研究をまとめるにあたって有益な助言、指導を賜った武蔵工業大学 星谷 勝教授に深甚なる謝意を表わします。

付録 1 任意の確率分布に対する正規分布近似¹⁶⁾

構造物の破壊モードが複雑な性能関数により与えられる場合、線形化手法により性能関数は簡単な線形関数に

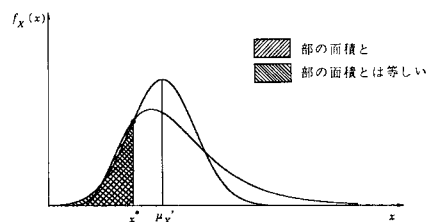


図-A-1 分布形近似の説明図

置換できる。しかし、線形関数で表わされる破壊基準であっても、個々の確率変数が正規分布でなければ破壊確率は容易には算出できない。このことから、Rackwitzらはこの条件をゆるめ、確率変数の確率密度関数を破壊点において正規確率密度関数で近似する方法を提案した。

すなわち、図—A・1に示すように、任意の分布形をその破壊点 x^* で確率密度関数の値ならびに確率分布関数の値がそれぞれ等しくなるような正規分布 $N(\mu_x^*, \sigma_x^*)$ で近似する。このとき、この正規分布の平均値、標準偏差は次式で与えられる。

$$\mu_x^* = x^* - \frac{\phi[\Phi^{-1}F_x(x^*)] \cdot \Phi^{-1}F_x(x^*)}{f_x(x^*)}$$

$$\sigma_x^* = \frac{\phi[\Phi^{-1}F_x(x^*)]}{f_x(x^*)}$$

ここで、

$f_x(x)$: (正規分布ではない) 確率変数 X の確率密度関数

$F_x(x)$: 確率変数 X の確率分布関数

$\phi(x)$: 標準正規確率密度関数

$\Phi(x)$: 標準正規確率分布関数

参 考 文 献

- 1) Desai, C. S. : Numerical Methods in Geotechnical Engineering, McGraw-Hill, N. Y., 1977.
- 2) Gudehus, G. : Finite Elements in Geomechanics, John Wiley & Sons, London, 1977.
- 3) 川本眺万・林 正夫 : 地盤工学における有限要素解析, 培風館, 1978.
- 4) 松尾 稔 : 地盤工学, 信頼性設計の理念と実際, 技報堂出版, 1984.
- 5) Chugh, A. K. : Parametric Study on the Plasticity Parameters in Elastic-Plastic Analysis of Underground Openings, Can. Geotech. j., Vol.17, pp.136~146, 1980.
- 6) Vanmarcke, E. H. : Probabilistic Modeling of Soil Profiles, ASCE, Vol.103, No. GT 11, pp.1227~1246, 1977.
- 7) 星野 勝 : 確率論手法による構造解析, 鹿島出版会, 1973.
- 8) Benjamin, J. R. and Cornell, C. A. : Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers, McGraw-Hill, 1970.
- 9) Ang, A. H-S. and Tang, W. H. : Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. II -Decision, Risk, and Reliability., John Wiley & Sons, 1984.
- 10) Cambou, B. : Application of First-order Uncertainty Analysis in the Finite Element Method in Linear Elasticity, Proc. of 2nd Int. Conf. Applications of Statistics and Structural Engineering, Aachen, pp.67~87, 1975.
- 11) Christensen, P. T. and Baker, M. J. : Structural Reliability Theory and Its Applications., Chapter 11, Applications to Structural Codes, Springer-Verlag, 1983.
- 12) 桜井春輔・土居康成 : 有限要素法による斜面の信頼性解析, 土木学会論文報告集, No.330, pp.87~97, 1983.
- 13) 辰巳安良・田中芳行・高田博行・榑 信親 : 確率有限要素法による防波堤の信頼性解析, 第19回土質工学研究発表会, pp.897~900, 1984.
- 14) 星谷 勝・高岡宣善・尾坂芳夫 : 土木構造設計法, 土木学会編, 新体系土木工学 12, 1981.
- 15) Hasofer, A. M. and Lind, N. C. : Exact and Invariant Second Moment Code Format, ASCE, Vol.100, No. EM 1, pp.111~121, 1974.2.
- 16) Rackwitz, R. and Fiessler, B. : Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences, Computer and Structures, Pergamon press, Vol.9, pp.489~494, 1978.
- 17) 土質工学会 : 土質工学ハンドブック, pp.187~263, 1982.

(1985.4.22・受付)