

# 線形応答モデルによる揚水量と被圧地下水位変動の解析

## ANALYSIS OF THE RELATION BETWEEN GROUNDWATER WITHDRAWAL AND CONFINED GROUNDWATER HEAD BY LINEAR RESPONSE MODEL

守田 優\*・高橋 裕\*\*

By Masaru MORITA and Yutaka TAKAHASI

Linear response model, one of groundwater simulation models, is the linear model satisfying the laws of proportionality and superposition which is based on groundwater hydraulic theory. This model has parameters such as  $\alpha$ -matrix and  $\beta$ -matrix which govern the linear relation between groundwater withdrawal and confined groundwater head. An analysis of the confined aquifer at Lowland, Tokyo was made using the model. Aquifer parameters in the model were modified until the results computed fitted the observed groundwater data. The value of fixed parameters such as  $\alpha$ -matrix and  $\beta$ -matrix explains the drawdown of groundwater head by the groundwater withdrawal of this area.

### 1. はじめに

広域的に地下水を管理する際、まず基本となるのは、揚水量と地下水位変動の関係を把握することである。特に、揚水による地下水位への影響を定量的に明らかにすることは、地下水障害の抑制、地下水資源の保全という観点から、重要な研究課題である。

従来、地下水管理の対象とされてきたのは、主に被圧地下水である。そのため、揚水量から被圧地下水位の変動を予測する手法として、これまでさまざまなシミュレーションモデルが開発されてきた<sup>1)~3)</sup>。これらのモデルの実際の適用に当たっては、再現計算の精度、パラメータ数の多いことによる同定作業の困難さなど、まだ問題点が残されている。しかし、地下水シミュレーションモデルは、将来予測の手法として、一応の確立をみているといえる。ただ、有限差分モデル、有限要素モデルに代表される既存のシミュレーションの手法では、特に揚水量と地下水位変動を結びつける方向で検討されたとはいえず、むしろ地下水の流れの再現、可能揚水量の算出

といった点に力が注がれており、揚水と地下水位変動の力学的応答については不明な点が多い。そこで、著者らは両者の対応関係を理解することに焦点を当て、揚水量の変化を直接地下水位変動に変換する新たな被圧地下水位解析モデルの確立を意図し、研究を進めてきた。その概要については、実際の計算例も含めて、すでに報告している<sup>4)</sup>。

本研究は、新たに提案する線形応答モデルを定式化し、東京下町低地の被圧地下水を対象に、揚水量と地下水位変動の関係を明らかにすることを目的とした。

### 2. 線形応答モデルの基礎理論

広域的な地下水管理のためのシミュレーションモデルは、Tyson・Weber<sup>1)</sup>の多角形格子モデルに始まると考えられるが、その発展は、電算機による基礎方程式の近似解法と切り離すことのできない関係にある。近似解を求める手法として、有限差分法<sup>2)</sup>、さらに有限要素法が適用され、現在ではすでに、三次元の有限要素モデルが確立されている<sup>3)</sup>。

これらの地下水シミュレーションモデルでは、有限差分モデル、有限要素モデルのいずれを用いるにせよ、離散化した各領域に外部変数としての揚水計画案を入力することによって、地下水位変動の将来予測を行うことが

\* 正会員 工修 東京都土木技術研究所技術部  
(〒108 港区港南1-1-18)

\*\* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科  
(〒113 文京区本郷7-3-1)

できる。しかし、地下水の管理という見地からさらに望まれるのは、揚水量の変化と地下水位の変動を結びつける応答関係がモデルから直接把握され、揚水量が簡単な手続きで地下水位に変換できることである。従来のシミュレーションモデルの場合、前者を入力して後者を出力するその中間のプロセスが、電算機による複雑な計算を経ることになり、両者の関係は、非常にわかりにくいものとなっていた。

本論文で提案する線形応答モデルは、離散化した領域の揚水量の変化と地下水位変動量に、比例と重ね合わせの原理を適用し、各離散領域の水位変動量を、全領域の揚水量変化の線形結合として表現する。その結果、揚水量と地下水位の対応関係を、既存のシミュレーションモデルより理解しやすい形に表わすことができた。

線形モデルの考え方は、すでに降雨-流出系の解析に広く応用されている<sup>5)</sup>。また、被圧地下水解析の分野では、群井の理論に取り入れられており、Bathala et al.<sup>6)</sup>は、広域シミュレーションへの一般的な適用を試みている。しかし、この一般化も、離散領域への分割に当たっては、やはり井戸を単位とせざるを得ず、地下水の広域的な流れを解析するには限界がある。

線形応答モデルは、被圧地下水の広域的な流動を対象とする手法であり、揚水量と地下水位変動を線形応答系としてとらえ、この応答関係を、被圧地下水の基礎方程式から導き、定式化したものである。

(1) 基礎方程式

被圧帯水層内に、閉曲面で囲まれた領域を考える。この領域で、地下水の質量保存則から、式(1)が成立する。

$$-\int \rho_w \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \rho_w \cdot Q \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $\rho_w$ ：水の密度、 $\mathbf{v}$ ：地下水流速、 $d\mathbf{S}$ ：閉曲面の面積素片（外向き法線を正とする）、 $\rho$ ：単位体積中の地下水の質量、 $Q$ ：領域内の揚水量である。

次に、帯水層を等方性と仮定し、透水係数を  $k$ 、被圧水頭を  $h$  とすると、Darcy 則は式(2)で示される。

$$\mathbf{v} = -k \cdot \text{grad} h \dots\dots\dots (2)$$

また、帯水層における単位体積中の地下水の質量  $\rho$  と水頭  $h$  の間には、式(3)が近似的に成立する。右辺の  $S_s$  は、Jacob<sup>7)</sup>によって導入された比貯留量 (specific storage) である。 $\rho_{w0}$  は標準の水の密度である。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_{w0} \cdot S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \dots\dots\dots (3)$$

式(2)、(3)を用い、 $\rho_w \approx \rho_{w0}$  として式(1)を整理し、式(4)を得る。

$$\int (k \cdot \text{grad} h) \cdot d\mathbf{S} = \int S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} dV + Q \dots\dots\dots (4)$$

ここで、被圧水頭  $h$  に関し、次の変数変換を行う。

$$h(t) = h(t_0) + h'(t') \dots\dots\dots (5)$$

式(5)での新しい変数  $h'$  は、時間  $t_0$  の被圧水頭  $h(t_0)$  から  $t'$  時間後の被圧水頭変化量を示す。

そこで、式(4)を、変数  $h'$ 、 $t'$  によって表わすと式(6)となる。

$$\int (k \cdot \text{grad} h') \cdot d\mathbf{S} = \int S_s \cdot \frac{\partial h'}{\partial t'} \cdot dV + Q - \int (k \cdot \text{grad} h_0) \cdot d\mathbf{S} \dots\dots\dots (6)$$

上式では  $h(t_0) = h_0$  と略記した。

さらに、式(6)の各項を整理する。

まず、右辺第1項を領域内の平均値で表わし、比貯留量  $S_s$  と被圧水頭変化量  $h'$  を独立なものとして扱うと、式(7)になる。

$$\bar{S}_s \cdot V_0 \cdot \frac{d\bar{h}'}{dt'} = \int S_s \cdot \frac{\partial h'}{\partial t'} \cdot dV \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $V_0$  は領域の体積、 $\bar{h}'$  は領域内各点の被圧水頭変化量  $h'$  の領域平均値であり、 $\bar{S}_s$  も同様である。

なお、式(6)の右辺の残りの項は、 $t = t_0$  における領域への流入量を基準にした実質的な揚水量の増加を表わす。そこで、これを揚水量の増加分  $\Delta q$  として次のようにおく。

$$\Delta q = Q - \int (k \cdot \text{grad} h_0) \cdot d\mathbf{S} \dots\dots\dots (8)$$

また、式(6)の左辺は、水頭変化  $h'$  に伴う流入量の変化である。これを、式(9)のように演算子を用いた形で表わす。

$$Re(h') = \int (k \cdot \text{grad} h') \cdot d\mathbf{S} \dots\dots\dots (9)$$

この  $Re$  は、被圧水頭を領域への流入量に変換する演算子であるが、上の式では、水頭変化量と流入量の変化の関係を示す。

以上、式(7)、(8)、(9)を用い、式(6)を書き直すと、式(10)が導かれる。

$$\Delta q = Re(h') - \bar{S}_s \cdot V_0 \cdot \frac{d\bar{h}'}{dt'} \dots\dots\dots (10)$$

上式では、式(5)から、 $t' = 0$  のとき  $h' = \bar{h}' = 0$  となる。

線形応答モデルの基本式は、式(5)の変数変換によって式(4)から導いた式(10)である。この式の形が、レオロジーの分野で見られる粘弾性モデル (Voigt Model) のそれに類似していることは興味深い。

本モデルでは、式(4)から式(10)を導く過程で、モデルの変数を、揚水量、被圧水頭から、揚水量の増加分  $\Delta q$ 、被圧水頭変化量  $h'$  に変換している。この手続きによって、揚水量から被圧地下水位を計算するに際して、線形的な重ね合わせが可能となる。

(2) モデルの定式化

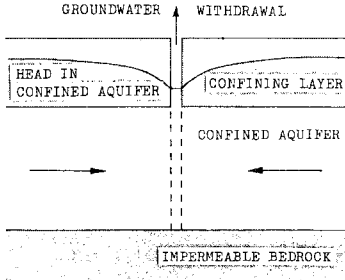


Fig. 1 Confined aquifer model.

線形応答モデルの基本式である式 (10) を、空間的、時間的に離散化し、モデルを定式化する。

本研究では、地下水の流れを、広域的なスケールで近似的に再現するという観点から、Fig. 1 に示したように、帯水層が 1 層からなる被圧帯水層モデルを考える。地下水流動は、水平方向の流れのみとなる。

モデルを定式化するにあたり、基本式である式 (10) をまず空間的に離散化する。式 (10) は、任意の閉じた領域について成立するので、ここでは、Tyson・Weber<sup>1)</sup> が地下水管理モデルで用いた多角形小領域分割 (Fig. 2) の方法を採用した。

ここで、Fig. 2 に示した、水平断面が多角形である閉じた領域に基本式の式 (10) を適用する。

まず、右辺第 1 項の面積分  $Re(h')$  は、Fig. 2 の領域  $i$  が隣りの領域と接する各面 (面積  $S_{ij}$ ) の積分値の合計である。

$$\begin{aligned} Re(h') &= \sum_j k_{ij} \cdot S_{ij} \left[ \frac{1}{S_{ij}} \cdot \int (\text{grad} h') \cdot dS \right] \\ &= \sum_j T_{ij} \cdot J_{ij} \cdot \frac{1}{L_{ij}} \cdot (\bar{h}_j - \bar{h}_i) \\ &= \sum_j Y_{ij} \cdot (\bar{h}_j - \bar{h}_i) \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

式 (11) で、 $k_{ij}$ 、 $T_{ij}$  は、領域  $i$  と領域  $j$  の間の平均透水係数、平均透水量係数である。 $J_{ij}$ 、 $L_{ij}$  は、Fig. 2 に示した。また、 $\bar{h}_i$ 、 $\bar{h}_j$  は、領域  $i$ 、領域  $j$  の各平均水頭変化量である。両者の差にかかる  $Y_{ij}$  は、透水量に関する係数とする。

また、式 (10) の右辺第 2 項の係数  $\bar{S}_s \cdot V_0$  は、領域  $i$

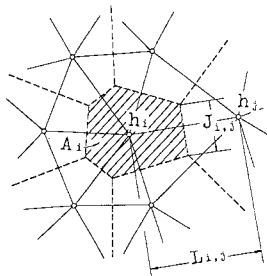


Fig. 2 Polygonal geometry.

の貯留係数  $S_i$  と面積  $A_i$  を用いて、 $(\bar{S}_s \cdot V_0)_i = S_i \cdot A_i$  とおける。

ここで、領域  $i$  への流入量を  $R_i$  とすると、式 (11) から  $R_i$  は次式になる。

$$R_i = \sum_j Y_{ij} \cdot (\bar{h}_j - \bar{h}_i) \dots \dots \dots (12)$$

さらに、領域  $i$  の揚水量を  $Q_i$  とすると、基本式の式 (10) の左辺  $\Delta q$  を空間的に離散化した量  $\Delta q_i$  は、式 (8) から式 (13) となる。

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= Q_i - (R_i)_{t=0} \\ &= Q_i - \sum_j Y_{ij} \cdot (\bar{h}_j - \bar{h}_i)_{t=0} \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

以上の手続きをもとに、線形応答モデルの基本式の式 (10) を、空間的に離散化して表現すると式 (14) となる。

$$\Delta q_i = \sum_j Y_{ij} \cdot (\bar{h}_j - \bar{h}_i) - S_i \cdot A_i \cdot \frac{d\bar{h}_i}{dt} \dots \dots \dots (14)$$

ただし、 $t=0$  のとき、 $\bar{h}_j = \bar{h}_i = 0$  である。

さて、解析の対象とする地域を、Fig. 2 に示した方法で  $m$  個の多角形小領域に分割し、そのうち計算対象領域を  $n$  個とし、周囲の残り ( $m-n$ ) 個を境界領域とする。そして、計算対象領域 ( $i=1 \sim n$ ) ごとに式 (14) をつくり、もし隣接領域が境界領域 ( $i=n+1 \sim m$ ) の場合、境界領域の水頭変化量の項を、左辺の  $\Delta q_i$  にまとめる。その結果、以下のような連立一次常微分方程式 ( $i=1 \sim n$ ) が得られる。

$$\begin{aligned} Y_{i1} \cdot \bar{h}_1 + Y_{i2} \cdot \bar{h}_2 + \dots \dots \dots + Y_{i,i-1} \cdot \bar{h}_{i-1} \\ + \left( - \sum_{j=i+1}^m Y_{ij} - S_i \cdot A_i \cdot \frac{d}{dt} \right) \bar{h}_i + Y_{i,i+1} \cdot \bar{h}_{i+1} \\ + \dots \dots \dots + Y_{in} \cdot \bar{h}_n = \Delta \bar{q}_i \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

初期条件:  $t=0$  のとき  $\bar{h}_i = 0$  ( $i=1 \sim n$ )。式 (15) の右辺  $\Delta \bar{q}_i$  は、次式のとおりでである。

$$\begin{aligned} \Delta \bar{q}_i &= \Delta q_i - \sum_{l=n+1}^m Y_{il} \cdot \bar{h}_l \\ &= Q_i - R_i - \sum_{l=n+1}^m Y_{il} \cdot \bar{h}_l \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

この  $\Delta \bar{q}_i$  は、式 (13) の  $\Delta q_i$  を境界領域の水頭変化によって補正したものであり、空間的に離散化した領域  $i$  の揚水量の増加分である。

ここで、各領域の被圧水頭変化量を未知量とする連立一次常微分方程式の式 (15) から、その解  $\bar{h}_i$  を求める。そこで、この式の右辺を、領域ごとに既知量として与え、 $\Delta \bar{q}_i = \text{const.}$  とおいて式 (15) を解くと、式 (17) の形で解が得られた。

$$\bar{h}_i = \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_{ij}(t) \cdot \Delta \bar{q}_j \dots \dots \dots (17)$$

これから、被圧水頭変化量  $\bar{h}_i$  は、各領域の揚水量の増加分  $\Delta \bar{q}_j$  の線形結合として表わされることとなった。

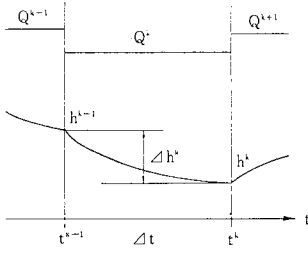


Fig. 3 Definition of variables.

以上、線形応答モデルの基本式である式 (10)を空間的に離散化することによって、式 (16), (17) を導き出した。そこで、これらの式を、さらに時間的に離散化して表現する。時間単位を  $\Delta t$  とし、Fig. 3 に示したように変数を定義する。

離散化した変数として、 $j$  領域、 $k$  期の揚水量を  $Q_j^k$ 、 $t=t^{k-1}$  の  $j$  領域の流入量を  $R_j^{k-1}$ 、そして  $k$  期の境界領域の水頭変化量を  $\Delta h_l^k$  ( $l=n+1 \sim m$ ) とする。これらの変数を用い、式 (16) を時間的に離散化した形で表わすことによって、 $j$  領域、 $k$  期の揚水量増加分  $\Delta \bar{Q}_j^k$  を式 (18) のように定義する。

$$\Delta \bar{Q}_j^k = Q_j^k - R_j^{k-1} - \sum_{l=n+1}^m Y_{j,l} \cdot \Delta h_l^k \dots\dots\dots (18)$$

ここに、流入量  $R_j^{k-1}$  は式 (12) から次のようになる。

$$R_j^{k-1} = \sum_{\nu=1}^m Y_{j,\nu} \cdot (h_{\nu}^{k-1} - h_j^{k-1}) \dots\dots\dots (19)$$

さらに、式 (18) で定義した揚水量増加分  $\Delta \bar{Q}_j^k$  による、 $k$  期、 $i$  領域の被圧水頭変化量  $\Delta h_i^k$  を、式 (17) から求める。

連立一次常微分方程式である式 (15) の解は、式 (17) であり、それは、各領域の揚水量増加分  $\Delta \bar{q}_j (= \text{const.})$  に伴う、 $i$  領域の  $t'$  時間後の水頭変化量を表わす。そこで、 $t' = \Delta t$  とおき、式 (5) と Fig. 3 の定義との対応関係を考えて、式 (17) から式 (20) が導かれる。

$$\Delta h_i^k = \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_{i,j}(\Delta t) \cdot \Delta \bar{Q}_j^k \dots\dots\dots (20)$$

ここで、揚水量増加分を被圧水頭変化量に変換するマトリックス  $\alpha$  を定義する。

$$\alpha = [\alpha_{i,j}] = [\bar{\alpha}_{i,j}(\Delta t)] \dots\dots\dots (21)$$

式 (20) を、 $\alpha$  マトリックスを用いて書き改める。

$$\Delta h_i^k = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \cdot \Delta \bar{Q}_j^k \dots\dots\dots (22)$$

上式の  $\alpha$  マトリックスの各要素は、式 (15) を式 (17) の形で解くことによって求める。この  $\alpha$  マトリックスの  $(i, j)$  要素である  $\alpha_{i,j}$  は、 $j$  領域の揚水量増加分  $\Delta \bar{Q}_j = 1$  による、時間  $\Delta t$  後の、 $i$  領域の被圧水頭変化量を表わす。

上記の式 (22) は、被圧水頭の変化量が、 $\alpha$  マトリッ

クスを媒介として、全領域の揚水量増加分からく比例と重ね合わせの原理>に従って決まることを示している。また、 $\{\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \alpha_{3,j}, \dots, \alpha_{n,j}\}$  という要素は、 $j$  領域の揚水量増加分による各領域の水頭変動への影響を表わしている。以上のことから、 $\alpha$  マトリックスは、揚水量と被圧地下水位の関係を直接に規定する基本的なパラメーターである。

ところで、各領域の揚水量増加分  $\Delta \bar{Q}_j^k$  は、式 (18) から算出することができるが、この式によると、その都度、流入量  $R_j^{k-1}$  を計算しなければならない。この手続きを避けるため、式 (18) を揚水量だけから計算する形に表わす。

この式 (18) にある流入量  $R_j^{k-1}$  は、式 (19) で計算するが、この式は、さらに次式のようにも表わせる。

$$R_j^{k-1} = \sum_{\nu=1}^m \text{re}_{j,\nu} \cdot h_{\nu}^{k-1} \dots\dots\dots (23)$$

ただし、

$$\text{re}_{j,\nu} = \begin{cases} Y_{j,\nu} & (j \neq \nu) \\ -\sum_{\nu=1}^m Y_{j,\nu} & (j = \nu) \end{cases} \dots\dots\dots (24)$$

ここで、被圧水頭を流入量に変換するマトリックス  $\text{Re}$  を定義する。

$$\text{Re} = [\text{re}_{i,j}] \dots\dots\dots (25)$$

この流入量マトリックス  $\text{Re}$  は、式 (9) に示した演算子  $\text{Re}(h)$  に相当する。

式 (25) で定義した流入量マトリックスを用いると、揚水量増加分の定義式である式 (18) を式 (26) の形で表わすことができる。

$$\Delta \bar{Q}_j^k = \Delta Q_j^k + \sum_{l=1}^n \beta_{j,l} \cdot \Delta \bar{Q}_l^{k-1} - \sum_{l=n+1}^m Y_{j,l} \cdot \Delta h_l^k \dots\dots\dots (26)$$

上式で、 $\Delta Q_j^k$  は、 $k$  期の揚水量変化量 ( $Q_j^k - Q_j^{k-1}$ ) である。

ここで、式 (26) にある  $\beta$  マトリックスは次のように定義される。

$$\beta = [\beta_{i,j}] = [\delta_{i,j} - \sum_{\nu=1}^n \text{re}_{i,\nu} \cdot \alpha_{\nu,j}] \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 $\delta_{i,j}$  はクロネッカーの  $\delta$ 、 $\text{re}_{i,\nu}$  は境界領域部を除いた  $n$  行  $n$  列の流入量マトリックスである。

ところで、式 (26) の計算方法から明らかのように、 $k$  期の被圧水頭に変化を生じさせるのは、 $k$  期の揚水量の変化だけではなく、それ以前の揚水量増加分の残留効果も含まれる。 $\beta$  マトリックスは、その残留効果の程度を表わしている。

以上、 $\alpha$  マトリックス、 $\beta$  マトリックスというパラメーターを導入し、線形応答モデルの定式化を進めてきたが、ここで、このモデルの計算式をまとめる。

$$\Delta \bar{Q}_j^k = \Delta Q_j^k + \sum_{l=1}^n \beta_{j,l} \cdot \Delta \bar{Q}_l^{k-1} - \sum_{l=n+1}^m Y_{j,l} \cdot \Delta h_l^k \dots\dots\dots (26)$$

$$\Delta h_i^k = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \cdot \Delta \bar{Q}_j^k \dots\dots\dots (22)$$

$$h_i^k = h_i^{k-1} + \Delta h_i^k \dots\dots\dots (28)$$

なお、初期条件として、各領域の初期被圧水頭、初期揚水量増加分を与える。

### 3. 線形応答モデルによる解析

東京下町低地を対象地域にして、線形応答モデルによって被圧地下水位の解析を行う。地下水を管理する際には、ある間隔をとって配置された地下水位観測井の水位と、その地域の揚水量の関係を把握する必要がある。本解析では、通常のシミュレーションの方法と異なり、5本の観測井について、それぞれ独立に地下水位変動と揚水量の関係を解析し、最後に、すべての観測井の計算結果を総合して、対象地域全体の考察を試みた。

#### (1) 解析方法

線形応答モデルによる被圧水頭の計算は、すでに定式化した式(26)、(22)、(28)の3式によって行う。しかし、揚水量のデータは、一般に行政区単位で集計されていて、地下水の管理も原則として行政区を基礎とせざるを得ない。そこで上の3式を書き改め、行政区の揚水量を観測井の位置する領域の被圧地下水位に変換する形に直す。

まず、対象地域を  $n$  個の多角形小領域に分割する。そして、行政区と小領域の関係は、たとえば Fig. 4 に示すものとする。そこで、行政区  $r$  ( $r=1 \sim p$ ) の揚水量を  $Q_r^k$ 、揚水量増加分を  $\Delta \bar{Q}_r^k$ 、面積を  $A_r$ 、 $j$  領域に占める行政区  $r$  の面積を  $a_{j,r}$  とする。ここで、 $\bar{a}_{j,r} = a_{j,r}/A_r$  とおくと、揚水量増加分、あるいは揚水量について、 $j$  領域と行政区  $r$  の間に式 (29) の関係が成立する。

$$\Delta \bar{Q}_j^k = \sum_{r=1}^p \bar{a}_{j,r} \cdot \Delta \bar{Q}_r^k \dots\dots\dots (29)$$

上式と式 (22) から、次式となる。

$$\Delta h_i^k = \sum_{r=1}^p \alpha'_{i,r} \cdot \Delta \bar{Q}_r^k \dots\dots\dots (30)$$

ただし、上の  $\alpha'$  マトリックスは式 (31) の関係にある。

$$\alpha'_{i,r} = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \cdot \bar{a}_{j,r} \dots\dots\dots (31)$$

この結果、式 (30) によって、行政区の揚水量増加分から、観測井の位置する  $i$  領域の水頭変化を算出することができる。

次に、式 (30) の右辺の各行政区の揚水量増加分  $\Delta \bar{Q}_r^k$  を計算するための  $\beta'$  マトリックスを求める。多角形小領域の面積を  $B_j$  ( $j=1 \sim n$ )、行政区  $r$  に占める領域  $j$  の面積を  $b_{r,j}$  とし、 $\bar{b}_{r,j} = b_{r,j}/B_j$  とおくと、式 (29) の逆変換の式が次式のように表わされる。

$$\Delta \bar{Q}_r^k = \sum_{j=1}^n \bar{b}_{r,j} \cdot \Delta \bar{Q}_j^k \dots\dots\dots (32)$$

さらに、式 (26) の両辺に  $\bar{b}_{r,j}$  を乗じて、 $j=1 \sim n$  で

合計し、上の式 (32) および式 (29) を用いて整理すると、行政区  $r$  の揚水量増加分を計算する式が以下のように求まる。

$$\Delta \bar{Q}_r^k = \Delta Q_r^k + \sum_{\nu=1}^p \beta'_{r,\nu} \cdot \Delta \bar{Q}_\nu^{k-1} - \sum_{i=n+1}^m Y'_{r,i} \cdot \Delta h_i^k \dots\dots (33)$$

$$\beta'_{r,\nu} = \sum_{j=1}^n \bar{b}_{r,j} \cdot \sum_{l=1}^n \beta_{j,l} \cdot \bar{a}_{l,\nu} \dots\dots\dots (34)$$

$$Y'_{r,i} = \sum_{j=1}^n \bar{b}_{r,j} \cdot Y_{j,i} \dots\dots\dots (35)$$

ここで、式 (33) の右辺第3項は、境界領域の水頭変化による行政区  $r$  の揚水量増加分の補正量を表わす。

これらの式 (33)、(30)、および式 (28) から、行政区の揚水量を用いて、任意の小領域の被圧地下水位を計算し得る。

さて、上述の計算方法に基づく具体的な解析方法は以下のとおりである。なお、解析は観測井ごとに行う。

① 観測井を中心に対象地域を  $7 \times 7$  の正方形小領域に分割する (Fig. 4)。内側の  $5 \times 5$  の領域を計算対象領域とし、周囲を境界領域とする。単位領域の面積は、対象地域の行政区の面積を考慮して決める。Fig. 4 では、 $20 \text{ km}^2$  にとつてある。

② 帯水層定数である透水量係数  $T_j$ 、貯留係数  $S_j$  を各正方形小領域に与えて式 (15) をつくり、これを式 (17) の形で解き、単位時間  $\Delta t$  から、 $\alpha$  マトリックスを求める。さらに、式 (21) の  $\mathbf{Re}$  マトリックスと式 (27) から、 $\beta$  マトリックスを計算する。

③ 正方形小領域の  $\alpha$ 、 $\beta$  マトリックスを式 (31)、(34) によって、各行政区の  $\alpha'$ 、 $\beta'$  マトリックスに変換する。

④ 観測井の初期被圧水頭、各行政区の初期揚水量増加分を設定し、式 (33)、(30)、(28) から、各行政区の揚水量増加分を用いて、観測井の位置する中央の領域の被圧水頭を順次計算する。

⑤ モデルによる計算結果が、観測井の実測水位を再現できるように帯水層定数  $T_j$ 、 $S_j$  を修正する。その結果、最終的に固定した帯水層定数から、各行政区の  $\alpha'$ 、 $\beta'$  マトリックスが求まる。

ここで注意すべきことは、Fig. 4 に例として示した対象地域の正方形小領域分割は、中央に位置する No. 1 の観測井の地下水位を解析するためのものであり、他の観測井の場合、Fig. 4 と同様、その観測井を中心にして新たに正方形小領域への分割を行う必要がある。

#### (2) 対象地域と基礎データ

解析の対象地域である東京下町低地は、Fig. 4 に示したように、東京都の足立、葛飾、北、荒川、台東、文京、江戸川、墨田、江東の9区、さらに千葉県西部、埼玉県南部を含む地域である。

東京下町低地の水文地質構造については、Fig. 5 に地質断面図<sup>9)</sup>を示した。被圧地下水の主要帯水層は、揚水

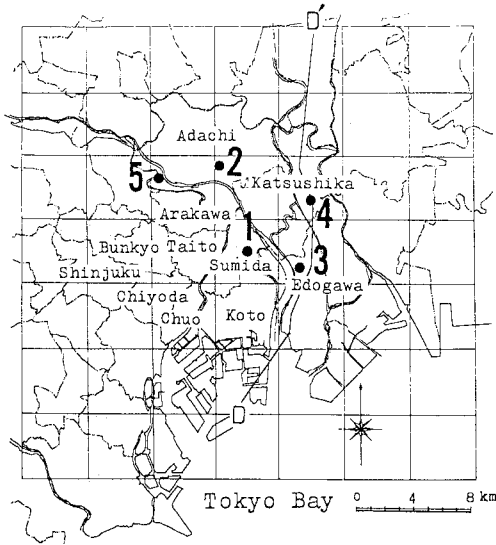


Fig. 4 Shitamachi Lowland of Tokyo.

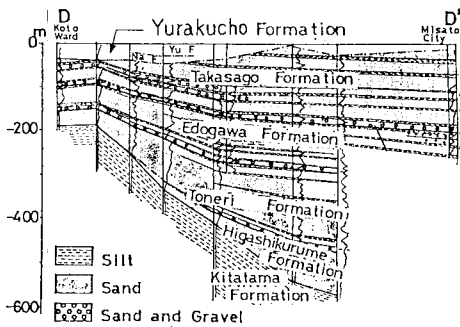


Fig. 5 Geologic cross-section.

井の分布から、東京層群に属する高砂層、江戸川層、舎人層であり、これらは砂層、砂礫層を主体とした良好な帯水層を形成している。また、北多摩層は主に固結シルトからなり、Fig. 1の下部不透水層に相当する。

なお、これらの最上位に位置する有楽町層は、下町低地に広く分布し、大部分がシルト層からなる難透水層である。その層厚は20~40 mで、この地域の被圧帯水層の上部をおおう加圧層となっている。したがって、この加圧層の存在によって、本解析は、Fig. 1に示したモデルの適用条件に合致することになる。

一方、この解析では、井戸からの揚水量と地下水位の正確なデータが必要とされる。以下、解析に用いた基礎データについて説明する。

1) 揚水量

被圧地下水位解析の精度が、特に影響を受けるのは揚水量のデータである。東京都では昭和46年から、公害防止条例によって、吐出口の断面積が21 cm<sup>2</sup>以上の井

戸について、井戸所有者が水量測定器を設置することを義務づけている。したがって、その記録をもとに揚水量の集計がこれまで行われてきた。そのため、精度の高い揚水量データが得られるようになった。この集計結果は、行政区ごとに、用途別、月別に整理され、東京都公害局(現在は環境保全局)によって報告されている<sup>9)</sup>。

この報告書の集計データの一例として、本解析の対象期間内にある昭和48年の揚水実績をみると、江東地区、つまり江東、墨田、荒川、江戸川の4区で、井戸本数が122本、揚水量が年平均31 831 m<sup>3</sup>/dayである。また、足立区、葛飾区では、同じく井戸本数128本、揚水量30 823 m<sup>3</sup>/dayである。

本解析では、後述のように、月単位で揚水量増加分を計算する。そこで、上記報告書の行政区ごとの月別揚水量データを用いて、前月の揚水量との差から各月の揚水量変化量を求め、さらに、式(33)から揚水量増加分を算出した。このとき、揚水量増加分の初期の値は、計算開始月の揚水量変化量とした。

なお、解析の対象地域に含まれる埼玉県、千葉県、東京都近郊市については、関東地方公害対策推進本部地盤沈下部会の報告<sup>10)</sup>を参考にした。

2) 被圧地下水位

解析の対象とする東京下町低地の被圧地下水位については、東京都土木技術研究所において観測が続けられている。本解析では、Table 1に示した5本の観測井の実測水位とその計算水位を比較した。被圧地下水位の計算は、月単位とした。観測井の実測水位は、Fig. 3の定義図に従って、月末日平均水位を用いた。なお、Fig. 4には観測井の位置を示した。

3) 帯水層定数

帯水層定数としてモデルに組み込む水理定数は、透水量係数  $T$  と貯留係数  $S$  である。これらの定数は、ともに揚水試験から求めることができる。しかし、揚水井の流れについて算定された水理定数を、本解析のような広域的な流動にそのまま用いることには無理がある。そこで、この解析では、東京下町低地において実施した地下水シミュレーション<sup>11)</sup>の結果を参考に、 $T = 200 \sim 1400 \text{ m}^2/\text{day}$ 、 $S = 0.0005 \sim 0.05$ として段階的にパラメーターを与え、モデル計算の結果をみることにした。

Table 1 Observation Wells.

Number	Observation Well	Depth of Strainer	Located(ward)
1	Azuma-B	108-115 m	Sumida
2	Shin-Adachi	224-234 m	Adachi
3	Shin-Edo-2	129-150 m	Edogawa
4	Takasago	118-123 m	Katsushika
5	Miyagi-2	155-165 m	Adachi

なお、上に示した透水量係数は、帯水層厚を 200 m としたとき、透水係数  $k$  が、洪積砂層の平均的な値である  $10^{-3}$  cm/s のオーダーに相当する。

また、本解析では、一般的な地下水位シミュレーションと異なり、観測井の位置する中央の領域だけを計算する。そこで、透水量係数、貯留係数とも全領域一定の値を設定した。解析は観測井ごとに行うので、おのおの独立に固定した帯水層定数の値を、最後に比較検討することが必要になる。

#### 4) 境界条件

境界条件は開放条件とした。Fig. 4 の 4 辺の境界領域で、各辺に位置する代表的な観測井を選び、式 (33) の揚水量増加分を補正する量として、その実測水位の変化量を与えた。なお、観測井には、静水位を測定している市の上水道水源井も含まれている。また、南側の境界領域については、水位が一定とした。

#### 5) 計算期間と計算単位時間

被圧地下水位の計算期間は、揚水量の集計を考慮して、昭和 47 年 3 月から昭和 51 年 3 月までとした。東京下町低地では、揚水規制の結果、揚水量が減少傾向を示し、昭和 51 年には、一部の行政区で、集計の対象としている吐出口断面積  $21 \text{ cm}^2$  以上の井戸の揚水量が、集計対象外の断面積  $21 \text{ cm}^2$  未満の井戸のそれとほとんど差がなくなってきた。そこで、揚水量データの精度の点から、上記の 4 年間で計算対象期間とした。なお、モデル計算は月単位で行い、月平均揚水量のデータから月末日地下水位を算出し、実測水位と比較した。計算開始月は、被圧地下水位が安定している昭和 47 年 3 月とし、同年 2 月末日の平均水位、および 2 月と 3 月の揚水量の差を、それぞれ初期地下水位、初期揚水量増加分とした。

#### (3) 計算結果

先に述べてきた基礎データをもとに、3.(1) の手順に従った、線形応答モデルによる計算結果を Fig. 6 に示した。ただし、連立一次常微分方程式の式 (15) を解くに当たっては、陰解法による差分近似解を採用した。なお、Fig. 6 に示したように、いずれの観測井においても、モデル計算による地下水位は、観測井の実測水位の変動にほぼ同じとなった。

これらの解析で同定したパラメーターは、貯留係数  $S$  と透水量係数  $T$  である。同定の手順は、いく組かのパラメーターで試行した後、 $S=0.0005, 0.0001, 0.005$ 、 $T=200 \sim 1200 \text{ m}^2/\text{day}$  とし、 $T$  は、 $200 \text{ m}^2/\text{day}$  きざみで変化させた。そして、 $T$  と  $S$  の組合せ 18 通りのうち、最も適合性のよい計算結果を選び、さらに小さなきざみ幅で  $S$  を修正し、パラメーターを固定した。

その同定結果から、 $S=1.0 \sim 3.5 \times 10^{-3}$ 、 $T=800 \sim 1200 \text{ m}^2/\text{day}$  となった。これらは各観測井ごとに独立し

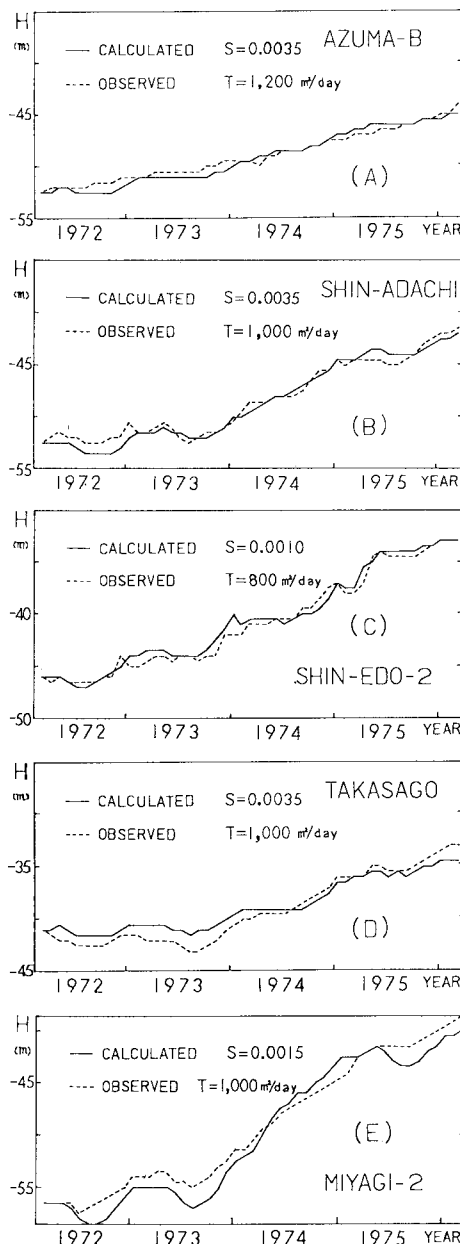


Fig. 6 Results of calculation.

て同定作業を進めたが、ほぼ同じ値に収れんし、パラメーターからみた 5 観測井のモデル計算の整合性は保たれた。

#### 4. 考 察

以上、被圧地下水位解析の手法として、線形応答モデルの基礎理論を構築し、さらに東京下町低地での実測データによって実証してきたところであるが、それらの中で、特に以下の考察が重要となる。

Table 2  $\alpha'$ ,  $\beta'$ -Matrix ( $\Delta t=1$  month).

Ward	Azuma-B		Shin-Adachi		Shin-Edo-2		Takasago		Miyagi-2	
	$\alpha'$	$\beta'$	$\alpha'$	$\beta'$	$\alpha'$	$\beta'$	$\alpha'$	$\beta'$	$\alpha'$	$\beta'$
	$10^{-4} \text{ m}^2/\text{day}$	$10^{-1}$	$10^{-4} \text{ m}^2/\text{day}$	$10^{-1}$	$10^{-4} \text{ m}^2/\text{day}$	$10^{-1}$	$10^{-4} \text{ m}^2/\text{day}$	$10^{-1}$	$10^{-4} \text{ m}^2/\text{day}$	$10^{-1}$
Sumida	-1.42	1.07	-0.28	0.95	-1.06	0.79	-0.10	1.01	-0.24	0.88
Koto	-0.47	0.83	-0.05	0.20	-1.01	0.76	-0.02	0.30	-0.00	0.00
Edogawa	-0.12	0.20	-0.05	0.23	-1.94	1.24	-0.35	0.88	-0.00	0.00
Katsushika	-0.45	0.44	-0.46	1.37	-0.91	0.79	-0.91	1.54	-0.18	0.97
Adachi	-0.15	0.23	-0.83	3.07	-0.16	0.22	-0.12	0.70	-1.26	1.84
Arakawa	-0.52	0.54	-0.25	1.85	-0.39	0.44	-0.08	0.73	-1.18	1.44
Kita	-0.02	0.28	-0.10	1.34	-0.02	0.02	-0.00	0.00	-1.07	1.08
Taito	-0.54	0.66	-0.20	0.99	-0.52	0.52	-0.03	0.45	-0.47	1.05
Bunkyo	-0.08	0.42	-0.08	0.92	-0.16	0.22	-0.01	0.21	-0.75	1.06
Chiyoda	-0.12	0.32	-0.04	0.79	-0.33	0.41	-0.01	0.13	-0.25	0.52
Chuo	-0.07	0.32	-0.01	0.12	-0.33	0.38	-0.00	0.00	-0.00	0.00

(1)  $\alpha'$ ,  $\beta'$  マトリックスについて

本解析の目的は、行政区の揚水量と観測井の地下水位変動の関係を明らかにすることである。この両者の関係を規定するパラメーターである、 $\alpha'$  マトリックス、 $\beta'$  マトリックスの値を Table 2 に示した。ただし後者は、括弧内に記してあるとおり、観測井の位置する行政区の値  $\beta'_{i,j}$  である。

まず、 $\alpha'$  マトリックスの値は、行政区  $1 \text{ m}^3/\text{day}$  の月揚水量増加分による観測井の被圧地下水位変動量を表わしている。ここで、月揚水量増加分は、過去の揚水量変化の残留効果を考慮した、揚水量の実質的な月増加量である。この Table 2 から、本解析で対象としている  $20 \text{ km}^2$  程度の行政区において、月  $1000 \text{ m}^3/\text{day}$  の実質的な揚水量の増加があるとき、 $10^{-1} \sim 10^{-2} \text{ m}$  のオーダーの被圧地下水位の低下が予想される。一方、 $\beta'$  マトリックスの値は、行政区の月揚水量変化量を補正する、前月の揚水量増加分の残留効果を表わしている。たとえば、吾嬭B観測井の解析結果で、墨田区の場合では、その残留効果が、同じ墨田区から  $10^{-1}$  程度、他の行政区からはより小さな値となっている。

全体として、Table 2 の  $\alpha'$ ,  $\beta'$  マトリックスの値は、この東京下町低地の観測井と行政区の空間的な位置関係を反映している。

なお本解析では、月単位でモデル計算を行っているが、2. で論じた基礎理論から推察されるように、単位時間をさらに長くすれば、 $\alpha'$  マトリックスの値はより大きくなり、 $\beta'$  マトリックスの値は逆に小さくなる。

(2) 行政区の揚水による観測井の水位変動量

行政区の揚水によって各観測井に異なる水位変動が生じるか、これは、井戸の揚水による水位低下の広がりの問題と類比的に考えることができる。Table 2 の  $\alpha'$  マトリックスの値を横方向にみると、その値は、各行

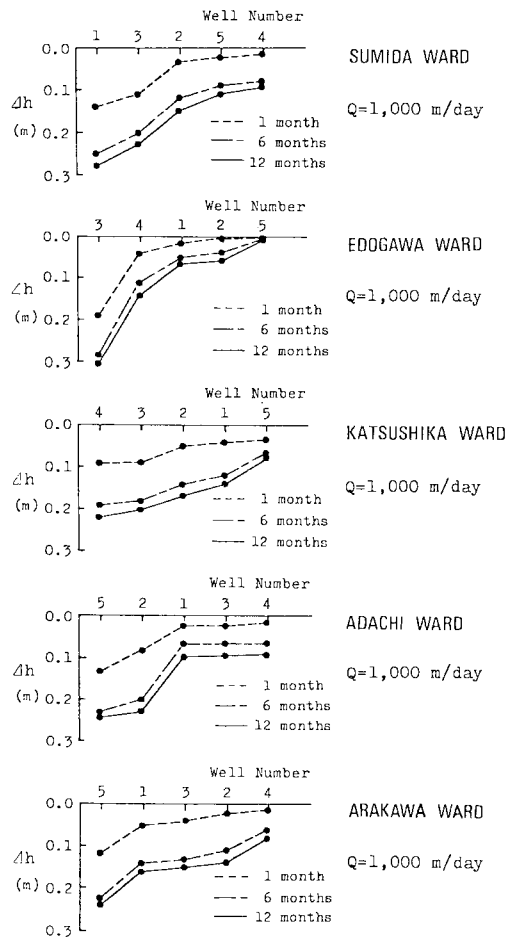


Fig. 7 Effects of groundwater withdrawal on groundwater head of observation wells.

政区の揚水量増加に伴い、その行政区を中心に、各観測井で生じる月間の水位変動量を表わしている。たとえば、



墨田区で月1000 m<sup>3</sup>/dayの揚水量の増加があるとき、吾妻B観測井で0.14 m、新江戸川第2、新足立、宮城第2、高砂観測井で、それぞれ0.11 m、0.03 m、0.02 m、0.01 mという比率の水位変動量を予測することができる。この結果は、観測井の空間的配置からも確認できる。

ところで、揚水の影響は時間の関数であり、時間の経過とともに、水位変動量は大きくなり、その範囲は拡大する。Table 2から推定される水位変動量は1か月単位の値である。そこで、揚水量が増加したまま一定値を保つとき、水位変動量が時間とともに増大していく現象をFig. 7に示した。この図は、本解析において固定した貯留係数、透水量係数をもとに、6か月後、1年後の $\alpha'$ マトリックスを計算し、Table 2の値とともにまとめたものである。図の横軸はTable 1の観測井番号である。こうして、Fig. 7からは、行政区の揚水量が増加したとき、その影響が時間とともに拡大していく様子を、観測井の水位変動を通してみることができる。また、この水位変動の進行状況から、各観測井の地下水位が、揚水量に対応したある平衡状態へと近づいていることが推察される。

## 5. 結 語

線形応答モデルを定式化する過程で導入した $\alpha$ マトリックスと $\beta$ マトリックスは、揚水量と被圧地下水位変動の関係を規定する基本的なパラメーターである。モデルの基礎理論で定義した揚水量増加分は、被圧地下水位の変動に直接影響を及ぼす実質的な揚水量の増加であり、 $\beta$ マトリックスによって、過去の揚水量変化の残留効果を考慮している。この揚水量増加分と地下水位変動を線形関係で結びつけるものが $\alpha$ マトリックスである。

本論文の解析では、東京下町低地を対象地域に選定し、行政区の揚水量と観測井の地下水位について、 $\alpha'$ マトリックスと $\beta'$ マトリックスを求めた。そして、各行政区の揚水量から、 $\beta'$ マトリックスによって揚水量増加分を、さらに $\alpha'$ マトリックスによって観測井の水位変動量を算出した。この一連の計算が、同時に、各行政区の揚水量の変化に伴って観測井の地下水位変動が生じるそのメカニズムを表現している。

また、東京下町低地を対象とした本解析から、20 km<sup>2</sup>程度の行政区において、1000 m<sup>3</sup>/dayの揚水量の増加に伴い、10<sup>-1</sup>~10<sup>-2</sup>mのオーダーで被圧地下水位の低下が生じるという結果が得られた。これは、被圧帯水層が上部を厚い加圧層でおおわれている、同じ条件をもつ地域において、揚水の影響についての1つの指標となろう。

最後に、本研究を進めるにあたり、東京都土木技術研究所の石井 求地象部長、遠藤 毅副参事研究員に多大なるご援助をいただいたことを付記し、謝意を表す。

## 参 考 文 献

- 1) Tyson, H. N. and Weber, E. M. : Ground water management for the nation's future computer simulation of ground water basin, Jour. Hydraul. Div., ASCE, Vol. 90, pp. 59~77, 1964.
- 2) Pinder, G. F. and Bredehoeft, J. D. : Application of the digital computed for aquifer evaluation, Wat. Resour. Res., Vol. 4, pp. 1069~1094, 1968.
- 3) Gupta, S. K. and Tanji, K. K. : A three-dimensional galerkin finite element solution of flow through multi-aquifer in Sutter Basin, California, Wat. Resour. Res., Vol. 12, pp. 155~162, 1976.
- 4) 守田 優 : 被圧地下水位解析への粘弾性モデルの適用について、第27回水理講演会論文集, pp. 633~639, 1983.
- 5) 藤田睦博 : 線形系の解析, 1975年度(第11回)水工学に関する夏期研修会講義集, 1975.
- 6) Bathala, C. T., Rao, A. R. and Spooner, J. A. : Linear system models for regional aquifer evaluation studies, Wat. Resour. Res., Vol. 16, pp. 402~422, 1980.
- 7) Jacob, C. E. : Flow of groundwater, Engineering Hydraulics, Chap. 5, John Wiley & Sons, 1950.
- 8) 遠藤 毅 : 東京都付近の地下に分布する第四系の層序と地質構造, 地質学雑誌, Vol. 84, pp. 505~520, 1978.
- 9) 東京都公害局 : 地下水揚水量実態調査報告書, 昭和47年~昭和51年, 1973~1977.
- 10) 関東地方公害対策推進本部地盤沈下部会 : 地下水揚水量調査報告書, 昭和54年3月, 1979.
- 11) 国分邦紀・守田 優 : 下町低地の地下水収支, 被圧地下水の流動に関する研究(7), 昭54, 都土木技研年報, pp. 181~190, 1980.

(1985. 2. 5・受付)