【土木学会論文集　第362号／I-4（討議・回答）1985年10月】

西野　文雄
佐藤　尚次
長谷川彰夫
井上　純三　共著

“超過確率に基づく構造設計の確率論的基礎（英文）”への討議

（土木学会論文集　第350号／I-2，1984年10月掲載）

▶討議者（*Discussion*）――――長　尚（信州大学）
By Takashi CHOU

本論文の基本的な部分についての著者らの考え方が不明確ですが，もし討議者の推測したようなことであれば，論文の結論に疑問があります．その他，若干の問題とともに以下指摘させて頂きます．

（1）　Z が非線形の場合でも X^0 は任意に選べるということについて

Z が非線形の場合式（13）の P_{fD} は X^0 の値の影響を受ける．それでも線形化点は任意であるとしているのは，理解に苦しむ．推測すれば X^0 の選択の違いによる誤差は少ないという前提があるように思う．そうならばそのように断るべきである．しかしそのような前提が満たされない問題も多い．つまりこのような場合には X^0 の選び方によって結果がかなり違うから，精度を高めるには繰り返し計算が必要となり，提案された方法は繰り返し計算は不要であるという結論に反することになる．

念のため，X^0 の選択によって結果が異なるという簡単な例を示す．$Z=x_1x_2-x_3$，x_1，x_2，x_3 はいずれも正規分布で，$\bar{x}_1=\bar{x}_2=1.0$，$V_1=V_2=V_3=0.2$，$e_1=e_2=e_3$，$P_{fD}=10^{-6}$ として，いろいろな X^0 に対する X^* を求めると次表のようになる．

$x_1^0 \quad x_2^0$	0.0	0.392	0.5	1.0
x_3^0	0.0	0.154	0.25	1.0
$x_1^*=x_2^*$	0.049	0.392	0.377	0.351
x_3^*	0.002	0.154	0.142	0.123

（2）　式（13）を満たす e を用いて式（16）から決まる設計点 X^* と式（21）で用いる設計点 X^* の関係について

明記されてはいないが，式（13）から e を求める場合条件 $Z^0(X^{0*})=0$ を満たす X^{0*} が用いられていなければならない．このことを式（18），Fig. 1の例でいうと $\bar{R}/\bar{S}=\{1-\Phi^{-1}(e_S)V_S\}/\{1+\Phi^{-1}(e_R)V_R\}$ の関係が必要である．この条件下で式（13）から決まる e を用いて，式（16）により設計点 X^* を求めると，一般に $Z(X^*)\neq 0$ となる（以下この場合の設計点を便宜上 X_D^* と書く）．しかもこのままの X_D^* を用いると，P_{fD} は著者らのいう二次モーメント法の P_{fD} と変わらない．ところが P_{fR} の計算においては $Z(X^*)=0$ として行われている（以下この場合の設計点を便宜上 X_R^* と書く）．したがって X_D^* と X_R^* は一般には一致しない．しかも X_D^* は必ずしも式（20）のような条件 $Z(X_D^*)\geqq 0$ を満たしていない．そこで実際の設計値は X_D^* そのものではなく，$Z(X_R^*)=0$ となるような X_R^* に調整されなければならない．$Z=R-S$ の場合でいうと $R_R^*=R_D^*-\alpha(R_D^*-S_D^*)$，$S_R^*=S_D^*+(1-\alpha)(R_D^*-S_D^*)$（ただし $0\leqq\alpha\leqq 1$）ということになる．

以上のことを $Z=R-S$ の場合について図示したのが Fig. a である．ただし $\alpha=1$ としてある（一般に設計においては S が与えられて，R を決定するのだからこのようにするのが自然である）．この図からわかるように，著者らのいう二次モーメント法では，実際の確率密度関数 $f_S(S)$ と $f_R(R)$ を，それぞれ平均値と分散が同じ正規分布の確率密度関数 $f_S^N(S)$ と $f_R^N(R)$ としたことになっているから，両者で重なる部分の面積が一般にはかなり異なる．一方著者らの方法では，実際の確率密度関数をずらせて（図では f_R を f_R' に，このことは平均値を変更したことになっている）設計点での超過（非超過）確率を換算した正規分布のそれと合わせたことになっている

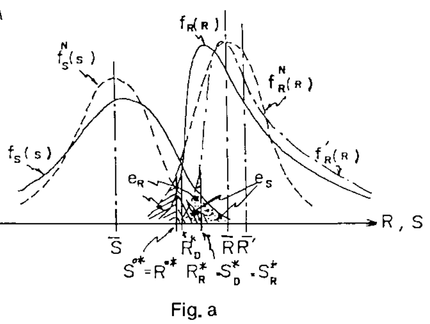

Fig. a

から，換算した正規分布で重なる部分の面積に，f_S と f'_R の重なる部分の面積を近づけることができる．その分だけ著者らの方法の方が P_{fR} との対応がよいことになる．

計算例を示す．$Z=R-S$ で R，S はともに対数正規分布（平均値，変動係数はそれぞれ $\overline{R}$，$\overline{S}$，V_R，V_S）とする．さらに $e_R=e_S$，$\Phi^{-1}(e_R)=\Phi^{-1}(e_S)=-t$ とする．$R^{0*}=\overline{R}(1-tV_R)$，$S^{0*}=\overline{S}(1+tV_S)$ であるから，$Z^0(X^{0*})=0$ より，$\overline{R}/\overline{S}=(1+tV_S)/(1-tV_R)$ の関係がある．したがって式（13）より次式を得る．$P_{fD}=\Phi(-\beta_{fD})$ ここに，$\beta_{fD}=\{(1+tV_S)tV_R+(1-tV_R)tV_S\}/\sqrt{(1+tV_S)^2V_R^2+(1-tV_R)^2V_S^2}$ いま $V_R=0.1$，$V_S=0.2$，$P_{fD}=10^{-6}$ とすると $t=3.384$（$e_R=e_S=0.000357$），$\overline{R}=2.534\,\overline{S}$，$R^{0*}=S^{0*}=1.677\,\overline{S}$，$R_D^*=1.799\,\overline{S}$，$S_D^*=1.917\,\overline{S}$ を得る．また著者らのいう二次モーメント法の目標破壊確率は $P_{fD}=2.1\times10^{-7}$ となる．ここで $\alpha=1.0$ とすると $R_R^*=S_R^*=1.917\,S$ となり，この場合 $\overline{R}=2.699\,\overline{S}$ となる．この結果について P_{fR} を求めると $P_{fR}=2.8\times10^{-6}$ となる．なおこのケースについて Rackwitz 流の方法で P_{fD} を求めると P_{fR} と同じ結果となる．これらはすべて著者らの示した Fig. 1，2，5 の結果と一致する．

以上からわかるように，著者らの方法による P_{fD} の方が式（1）による P_{fD} より P_{fR} との対応がよくなるのは，式（13）によって得られる X_D^* を使用しないで，X_R^* に調整し，結果として平均値 $\overline{X}$ の異なる（二次モーメント法とは）ものを使用し，各確率分布の密度関数の裾野の情報を利用したことになっているからであって，著者らの説明では，単に式（19）と（16）から決まる X_D^* を用いるから対応がよくなるというように読み取られ，必ずしも適切ではないように思う．

なお著者らの説明からは読み取れないが，$Z^0(X^{0*})=0$ ではなく，$Z(X^*)=0$ の条件を用いると，直接設計点 X^*（前述の X_R^* に相当する）が求まり調整の必要はない．ただしこの場合は $Z^0(X^{0*})\neq0$ となり，換算した正規分布の方をずらせて P_{fD} を評価することになる．結果として二次モーメント法とは異なる平均値を用いる点に変わりはない．設計値の平均値か，換算した正規分布の平均値かは別として（**Fig. b** 参照）．

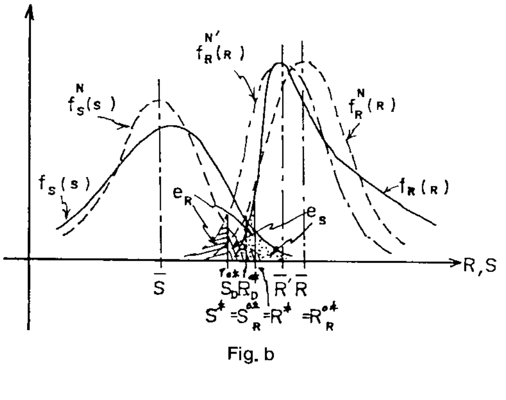

Fig. b

（3） 計算の簡便さと精度について

著者らは計算の簡便さと精度が比較的よいことを特徴として強調している．しかし討議者が先に指摘した[15]ように，もともと Rackwitz 流の計算はそんなに複雑ではないし，また破壊確率との対応はかなりよい．一方著者らの方法では，Z が線形であっても Rackwitz 流よりも P_{fR} との対応はよくない（Rackwitz 流の方法では結果として平均値と分散で調整しているのに対して，すでに指摘したように著者らの方法では平均値だけで調整したことになっていて，調整の程度に差がある）．さらに（1）で指摘したように Z が非線形な場合 X^0 を任意に選ぶと P_{fD} と P_{fR} の対応はよくないから，著者らの示した計算例のように精度がよくなるとは限らない．したがって特殊な場合は別として，一般論として計算の簡便さと精度が比較的よいことが特徴であるとはいえない．

（4） 二次モーメント法と破壊確率について

式（1）が二次モーメント法の目標とする破壊確率だとあるが，適切ではない．Cornell の提案した二次モーメント法は，確率分布の形が必ずしもはっきりしない状況のとき，とりあえずの安全性の尺度として定義されたものである．Z が正規分布の場合は結果的に式（1）により破壊確率と対応がつくが，そうでない限り破壊確率と対応がよくないのは当然である．つまりこの場合の指標は破壊確率と関連させて用いるべきではなく（確かに一部にはこのような使われ方を見掛けるが），安全性の相対的な尺度として用いられるものである[15]．したがって本論文のように確率分布の情報があるという前提があるときにはこの指標と比較するのではなく，Rackwitz 流の指標と比較すべきである．

なお結果として二次モーメントまでの情報以上のものが利用されたことになっている方法は，より破壊確率との対応がよくなるのは当然である．

（5） 高次モーメントの使用について

高次モーメントを使用すると精度が向上するとあるが，確率分布形と破壊確率のレベルの絡みで必ずしもより高次の方が精度がよいということにはならないのではないか．6 次以外のモーメントを用いた結果を示すとこのことがはっきりするように思う．

（6） 二次モーメント法は破壊確率を過大推定するということについて

非線形性が強い場合，標準化空間における原点からの最短距離の点を設計点とする二次モーメント法は，破壊確率を過大推定すると，長は指摘している[15]とあるが，そのような指摘はしていない．破壊基準関数の形によっ

ては過小推定することもあり得る．いずれにしてもこのような意味で著者らの方法が優れているというようなことはない．

（7） particular point of linearization と設計点の関係について

二次モーメント法（この場合は Rackwitz 流の）では，線形化点（particular point of linearization）だけが設計値として採用されるような表現がある．しかし $Z(\boldsymbol{X})=0$ の条件を満たし，かつ結果として線形化点が一致するような $\boldsymbol{X}$ であれば，これを設計値としても結果は同じであり，必ずしも線形化点にこだわる必要はない．ただし破壊確率の評価は線形化点の情報により行われていることになっているから，この情報が適切でなければどんな設計値を用いても，破壊確率の改善にはつながらない．この点は著者らが指摘しているように，提案されている方法だと，各確率変数の統計情報が必ずしも十分でなく各情報にアンバランスがある場合，ある程度バランスのとれた設計点を設定し，真の破壊確率との対応をよくすることは可能である．しかしこの点については，確率変数の統計情報が十分でなく不確かな場合にもともと破壊確率で議論することがはたして妥当なのか，また破壊確率を改善するといっても，先に指摘したように著者らの方法は Rackwitz 流の方法に比べて精度はよくないから，必ずしも改善にならないのではないか，等の疑問をもつ．

（1984.11.29・受付）

▶回答者（*Closure*）——西野文雄（アジア工科大学）・佐藤尚次（関東学院大学）・長谷川彰夫（東京大学）・井上純三（建設省）

By Fumio NISHINO, Naotsugu SATO, Akio HASEGAWA and Junzo INOUE

著者らの論文に対し，貴重なる討議を頂いたことに，補足的な説明の場を与えて下さったことも含めて深く感謝いたします．以下項目ごとに回答していきますが，その前に本論文執筆にあたっての基本姿勢が“現行設計：Conventional な設計法——の根底にある確率論的な配慮・背景をより定量的に論じ得るモデルの構築”にあることを付記したいと思います．

（1）について

きわめて重要な問題です．論文の中に X_i^0 が arbitrary であると書いた表現が不適切であったため，ご指摘の疑問点が生じたものと思われます．著者らの主旨は非線形な $Z(\boldsymbol{X})=0$ が「何らかの」方法で線形関数 $Z^0(\boldsymbol{X})=0$ で近似されることを前提として，Pr.〔$Z(\boldsymbol{X})\leqq 0$〕の代わりに Pr.〔$Z^0(\boldsymbol{X})\leqq 0$〕を破壊確率の近似値として考えていくというところにあり，$Z^0(\boldsymbol{X})=0$ を定める具体的な手法には全く言及しておりません．この Z^0 が線形関数であることは正規分布演算のために必要なのであって，「適当に（$Z\leqq 0$ の領域をよく近似するように）」選択されておりさえすればよく，それが接線である必要すら必ずしもないと考えています．接線を用いたのは，現時点での研究の「大勢に従った」わけですが，この場合接線の引き方によって $Z^0=0$ の形が（したがって領域 $Z\leqq 0$ に対する近似度も）変わるのは討議の（1）および（7）でご指摘のとおりです．しかし本論文の 2 章は「何らかの方法で適当に線形近似された破壊領域に対する破壊確率の近似理論」で，この理論と線形化の過程は区別されております．論文の中で式（13）と式（16）を Separate use すると書いたのもその意味です．

（2）について

どの点に的を絞ってお答えするのが適当かはっきりしませんが，ここで述べられているような点についての説明が不十分であったのは認めます．著者らの考えているのは次のようなことです．2 章で展開しているのは空間内に固定された破壊領域に対し，このときの破壊確率と $Z^0=0$ 上の点に対応する超過確率との間の近似関係を導く理論であり，これに対して，3 章の内容は設計（断面を決める）の中で，与えられた P_{fD} を，2 章の関係を考慮しつついかに実現するかのプロセスです．その意味で，説明の中の式（17）の後に，「式（16）で与えられる X_i^* を用いて $Z(\boldsymbol{X}^*)\geqq 0$ となるように設計する」という，2 変数の場合の式（20）に対応する文を入れておくべきでした．すなわち 3 章では設計を「限界状態 $Z=0$ の $\overline{\boldsymbol{X}}$ との相対的な位置を決める作業」と考え，2 章とは違って，$Z=0$ および $Z^0=0$ が標準化空間内で（平行に）移動し得る自由度をもっていて，式（16）で実際の分布の情報を入れつつその位置を「調整」していくと考えております．本論文，および討議にあるような R，S の 2

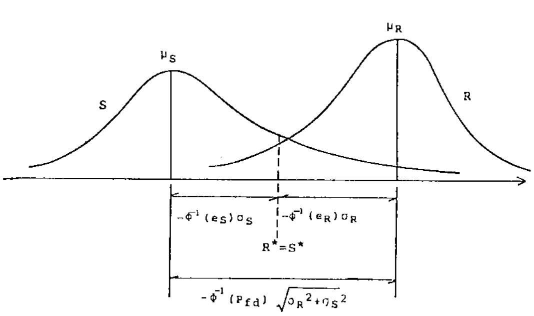

Fig. c

変数の例でいえば，破壊確率は R と S の分布の相対的な位置関係で決まります．本論文では最初に R，S がともに正規分布である場合を Fig. c に示すように設定し，その後，この e_R，e_S と式（19)，(20）を用いて，実際の分布形に合うように分布の位置関係を調整の上，設計における断面を決定することを提案しています．

P_{fD} と P_{fR} の精度についてのご指摘の解釈は妥当と思われますが，要は現行設計の手法も，見方によればこういう精度が期待できるのだということをいうところに本論文の本旨があります．

（3）について

こうした比較は主観的な要素が入りやすく，議論は難しいので，代わりに1つの所感を書かせて頂きます．たとえば著者らの「簡便さ」という用語の中には設計示方書策定のプロセスや実設計との対応ということも念頭に入っております．限界状態にある程度の近似を用い（式（3)），それを配慮しつつ（式（13)），十分安全を見込んで（式（10)）荷重や強度の設計値を実データから決めて（式（19)）示方書に示す．さらにそれらの値をもとに，決定論的な設計計算を行い（式（20)），その結果ある誤差の範囲内で所定の破壊確率をもつ構造物ができるのであれば，それは工学的に意義のあることではないでしょうか．討議者は Rackwitz 流の iterative な方法を示方書策定の議論の中でどのように反映させていくべきであるとお考えでしょうか．あるいは，こうした計算を設計者に委ねるのがよいとすると，構造物の各部材，各断面でこうした計算を行うことは設計を「そんなに複雑にはしない」とお考えでしょうか．著者らは，このような手続きを実際の設計操作に委ねるのはきわめて困難と考え，仮に可能であったとしても，設計操作の効率性の立場から，その直接的導入は不適当と考えています．

（4）について

これも主観的な議論になるおそれがありますが，Cornell の β を陽な形にせよ陰な形にせよ破壊確率と結びつけて用いる例——たとえば，荷重の種類の相違によるばらつきの大小が β の相違，すなわち破壊確率の相違に影響を及ぼすことの議論など——は著者らには「一部のこと」とは思われません．したがって，Fig. 1 と Fig. 2 の比較を論ずることには意味があると考えます．また Fig. 4，Fig. 5 との比較についても論及しておりますから「比較すべきである」とのご指摘は当を得ないと考えます．あるいは討議者は Fig. 1 と Fig. 5 の精度の差こそ重要とお考えかもしれませんが，論文および本回答の前項に記述した目的と位置付けを考えますと，それらの精度の検討の役割はおのずから限定されます．

（5）について

これはご指摘のとおりです．破壊確率のレベルに応じて最もよい精度を与えるモーメント次数は異なります．

（6）について

著者に誤解があったことを認めます．（1）についての項で述べたこととも関係しますが，非線形関数を線形関数に置き換えて領域設定するというアイデア自体，精度的にも一定の限界があるということを指摘するのが目的でした．「線形化の問題点とそれに代わり得るアイデア」については別に機会を設けて[18]議論したいと思います．

（7）について

前項まででである程度討議にかかわる議論は尽くせていると考えます．データが少ないときにこの種の議論をすることが妥当かというご意見は同感です．ただ少なくともこれまでの慣習からみて，比較的データの多くあるものの設計値の超過確率は小さく，データの少ないものは大きくとられており，この状況とも整合し得る柔軟性のあるモデルを模索していく意義はあると考えます．$\boldsymbol{X}^{0*}$ の選択に自由度をもたせることにはこういう含みもあります．

参考文献

18）池田豊人・佐藤尚次・長谷川彰夫：非線形限界状態関数の扱いに関する一つの試み，土木学会第40回年次学術講演会概要集 I -125，昭和60年9月．

(1985. 4. 1・受付)