

二層弾性地盤上の長方形剛基礎底面の複素剛性

DYNAMIC STIFFNESS UNDER RIGID RECTANGULAR FOUNDATIONS RESTING ON AN ELASTIC TWO-LAYERED MEDIUM

北村泰寿*・桜井春輔**

By Yasutoshi KITAMURA and Shunsuke SAKURAI

This paper deals with the dynamic stiffness (i. e., the complex stiffness) under rigid rectangular foundations resting on an elastic two-layered medium. This is a problem belonging to mixed boundary value problems which are not easily solved by an analytical approach. To overcome the difficulties of analysis the authors employ a numerical method, in which the contact area of the foundation is divided into a finite number of rectangular sub-regions, and a system of linear simultaneous equations with respect to the unknown contact pressures is derived by introducing the influence functions. In this paper the authors mainly investigate the effects of the layering on the dynamic stiffness and the difference in the dynamic stiffness between the relaxed and welded boundary conditions on the contact plane.

1. まえがき

基礎構造物の動的設計において、地盤の複素剛性を評価することは重要な問題である。地盤を波動伝播媒体として取り扱う理論的研究は Reissner による円形フーチングの振動問題に始まり、以来数多くの研究がなされている¹⁾。これらの研究は、構造物底面下の接触圧の取り扱いによって、①接触圧の分布形状を仮定して変位を求めたもの、②接触圧を未知関数とする積分方程式を解いたものに分けられる。前者は、構造物底面下の接触圧分布を一様、剛体、放物線等の分布に仮定して、加振平面の変位を求める応力境界値問題となる^{たとえは[2]-5)}。また、後者は、構造物を剛体と仮定して、構造物底面下の境界条件を変位で与えその他の地表面の条件を応力零で与える混合境界値問題となる。剛体帯や剛円盤のような簡単な形状の場合には、積分方程式を解析的に変形する方法が用いられている^{たとえは[6]-9)}。一方、矩形底面も含めた任意形状の底面を有する剛体構造物の場合には、積分方程式を直接離散化する手法が利用されている¹⁰⁾⁻²⁰⁾。

ところで、最近のように構造物が重要かつ巨大化する傾向に対しては、構造物の大きさと比較して地盤の多層性を無視することは妥当ではない。これまでの研究において、地盤を層状弾性体として取り扱っているものはいくつかみられるが^{たとえは[5), 9), 19)}、多くのものは地盤を半無限弾性体にモデル化している。したがって、今後地盤を層状弾性体と考えた構造物-地盤系の動的相互作用問題に対する研究がますます重要となる。このような状況において、本論文は、既報の著者らの論文²¹⁾の成果を利用して、二層弾性地盤上の長方形剛基礎底面の複素剛性を求めたものである。特に、本論文では、地盤の層剛性比、表層厚、剛基礎底面の形状および構造物底面と地盤の接触面における密着性（すなわち、加振方向以外の変位の拘束²¹⁾）などが複素剛性に及ぼす影響について調べる。

2. 解析手法

Fig. 1 に示すように、二層弾性

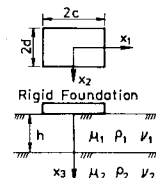


Fig. 1 Coordinate system.

* 正会員 工博 神戸大学助教授 工学部土地造成工学研究施設(〒657 神戸市灘区六甲台町)

** 正会員 Ph. D. 工博 神戸大学教授 工学部土木工学科(同上)

注1) 鉛直、ロッキング振動に対しては構造物と地盤の接触面の摩擦による水平変位の拘束、水平振動に対しては水平加振方向以外の変位の拘束を本論文では接触面の変位に対する拘束と総称する。

地盤の表面に底面積 $S (=2c \times 2d)$ の剛体構造物が存在する場合は考える。構造物底面の接触圧分布は、Green 関数を用いて得られる次式の積分方程式を解くことにより求まる。

$$u_i(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^3 \iint_S G_{ij}(x_1, x_2 | \xi_1, \xi_2) q_j(\xi_1, \xi_2) \cdot d\xi_1 d\xi_2 \quad (i=1, 2, 3) \dots \dots (1)$$

ここで、 u_i 、 q_j はそれぞれ接触面 S 内の既知変位、未知接触圧で、添字 i, j は x_1, x_2, x_3 方向の成分を表す。また、 $G_{ij}(x_1, x_2 | \xi_1, \xi_2)$ は二層弾性地盤の Green 関数で、表層厚 h 、表層、下層のせん断弾性係数 μ_1, μ_2 、密度 ρ_1, ρ_2 、ポアソン比 ν_1, ν_2 (Fig.1 参照) および加振振動数に關係する²²⁾。

式 (1) は解析的に解けないため、接触面を有限個の要素に分割し、この分割モデルに対して式 (1) を次式のように離散化する¹⁵⁾。

$$u_i(l) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^N \overline{G}_{ij}(l|k) q_j(k) \quad (l=1, 2, \dots, N) \dots \dots (2)$$

ここで、 N は分割要素の総数、 $u_i(l)$ は要素 l の中央変位、 $q_j(k)$ は要素 k の等分布接触圧の大きさを表す。また、 $\overline{G}_{ij}(l|k)$ は Green 関数を要素 k について面積分して得られるもので、次式で表わされる。

$$\overline{G}_{ij}(l|k) = \iint_{S_k} G_{ij}(x_1^l, x_2^l | \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \dots \dots (3)$$

ここで、 S_k は分割要素 k の面積、 (x_1^l, x_2^l) は要素 l の中央点の座標である。

いま、各要素の変位 $u_i(l)$ が既知であれば、式 (2) から各要素の接触圧 $q_j(k)$ を未知量とする多元連立一次方程式が得られる。さらに、複素剛性は、鉛直振動、ロッキング振動 (x_2 軸回り) および水平振動 (x_1 方向) に対して、それぞれ次式によって求められる。

$$\left. \begin{aligned} K_{VV}(a_0) &= \sum_k S_k q_3(k) / \Delta_3 \\ K_{\omega\omega}(a_0) &= \sum_k S_k q_3(k) x_1^k / \Omega_2 \\ K_{m\theta}(a_0) &= \sum_k S_k q_1(k) / \Delta_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

ここで、 $a_0 = \omega c / V_{S1}$ 、 Δ_1, Δ_3 は x_1, x_3 方向の変位、 Ω_2 は x_2 軸回りの回転角、 x_1^k は x_2 軸から要素 k の中央点までの x_1 軸に沿う距離、 ω は加振円振動数、 c は剛基礎底面の x_1 方向の半幅、 V_{S1} は表層の横波の伝播速度である。

ところで、層状弾性地盤の場合、表面波は分散性を示すことが知られている。Fig.2 は二層弾性地盤の分散曲線、すなわち式 (1) および (3) の被積分関数に現われる分母の根を示したものである。なお、縦軸の V_R, V_L はそれぞれ Rayleigh 型、Love 型の表面波の伝播速度を意味する。半無限弾性地盤 ($\mu_2/\mu_1=1$) の場合には

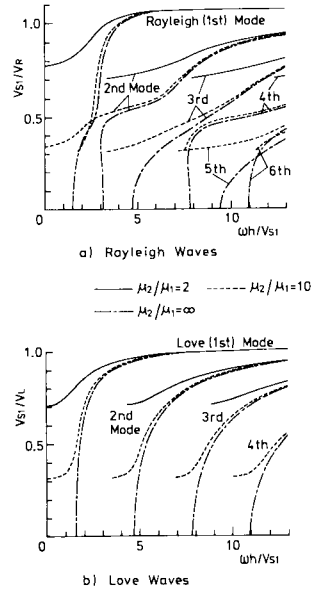


Fig.2 Dispersion curves of elastic two-layered medium ($\nu_1 = \nu_2 = 1/3, \rho_1 = \rho_2$).

$V_{S1}/V_R \approx 1.072$ の 1 根のみしか存在しないが、二層弾性地盤の場合には無次元振動数 $\omega h / V_{S1}$ の値によって複数個の根が存在することになる。このため、式 (3) の積分は複数個の特異点を含む積分となり、この数値積分は相当の困難を伴う。

3. 剛体帯に対する複素剛性

長方形底面の辺長比 d/c (Fig.1 参照) が非常に大きくなれば、地盤の層剛性比 (μ_2/μ_1)、表層厚および構造物と地盤の接触面における加振方向以外の変位の拘束 (以下、接触面の変位拘束と略) の有無⁽¹²⁾ が長方形剛基礎底面の複素剛性に及ぼす影響は、剛体帯に対する複素剛性の場合と類似の傾向を示すものと考えられる。したがって、ここでは長方形底面をもつ剛基礎の極端な例として、剛体帯の複素剛性に対していくつかの検討を行う。

半無限弾性地盤の場合、Karasudhi ら⁶⁾、Luco ら⁷⁾ によって剛体帯の複素剛性が求められている。Fig.3 は、本論文の数値解法の検証も兼ねて、 $\mu_2/\mu_1=1$ としたときの解と Karasudhi らの結果と比較したものである。同図より、ロッキング振動の複素剛性において本論文の数値解法の精度が若干悪くなっているが、接触面の分割数が $N=20$ 程度で十分な精度の結果が得られていると

注2) 本論文では、注1) に定義した用語のもとで、接触面における加振方向以外の変位を許す場合を変位拘束なし (Relaxed Case)、また加振方向以外の変位を 0 とする完全拘束の場合を変位拘束あり (Welded Case) とよぶ。

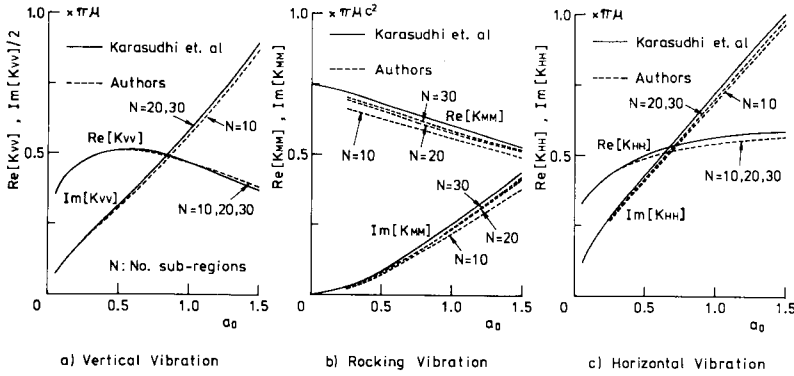


Fig. 3 Comparison of dynamic stiffnesses for rigid strip (Half-space, Relaxed case, $\nu=1/3$).

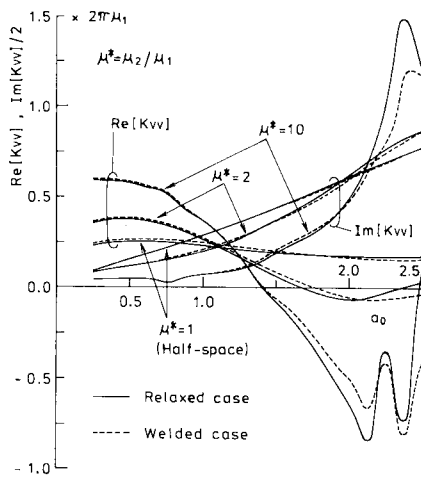


Fig. 4 Effect of μ_2/μ_1 on vertical dynamic stiffnesses for rigid strip ($h/c=2$, $\nu_1=\nu_2=1/3$, $\rho_1=\rho_2$).

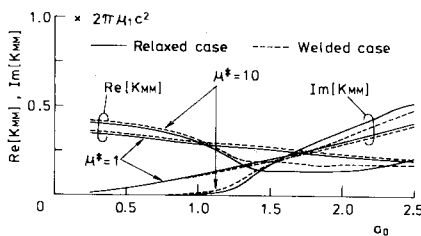


Fig. 5 Effect of μ_2/μ_1 on rocking dynamic stiffnesses for rigid strip ($h/c=2$, $\nu_1=\nu_2=1/3$, $\rho_1=\rho_2$).

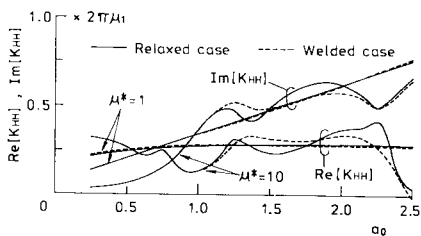


Fig. 6 Effect of μ_2/μ_1 on horizontal dynamic stiffnesses for rigid strip ($h/c=2$, $\nu_1=\nu_2=1/3$, $\rho_1=\rho_2$).

いえよう。
 Fig. 4～6は、表層厚を一定 ($h/c=2$) にして、層剛性比および接触面の変位拘束の有無が鉛直、ロッキングおよび水平振動の複素剛性に及ぼす影響を調べたものである。なお、Fig. 5, 6では $\mu_2/\mu_1=2$ に対する結果は図がふくそうするため省略してある。全般的な傾向として、 $\mu_2/\mu_1=10$ の場合の複素剛性は、半無限弾性地盤 ($\mu_2/\mu_1=1$) のそれに比べて無次元加振振動数 $a_0 (= \omega c/V_{s1})$ の影響を受けている。二層弾性地盤に対するこれらの現象は、表層地盤の振動特性に起因しているものと考えられる。いま、Fig. 2の分散曲線において、下層が剛基礎 ($\mu_2/\mu_1=\infty$) の場合には、群速度が0となる $\omega h/V_{s1} \approx 3.057, 7.745$ および分散曲線と横軸の交点 $\omega h/V_{s1} = (2n-1)\pi/2, (2n-1)\pi$ (ただし、 $n=1, 2, \dots$) のいずれかの振動数のとき表層地盤に共振現象が生じることが知られている⁵⁾。したがって、二層地盤において μ_2/μ_1 の値が大きくなるほど、表層地盤の振動増幅による影響が強くなることになる。次に、 a_0 の値が小さい範囲では、いずれの場合も接触面の変位拘束の有無による複素剛性の差異はほとんどないが、 a_0 の値が大きくなるとともにその差異は大きくなる傾向にある。また、層剛性比が大きくなるとともに ($\mu_2/\mu_1=2$ に対するロッキング、水平振動の結果は Fig. 8, 9 参照)、接触面の変位拘束の有無による差異は大きくなる傾向となっている。

Fig. 7～9は、層剛性比を一定 ($\mu_2/\mu_1=2$) にして、

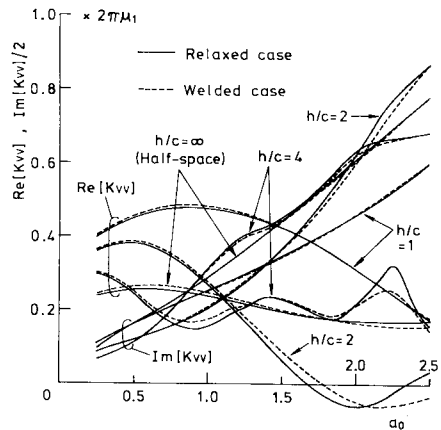


Fig. 7 Effect of h/c on vertical dynamic stiffnesses for rigid strip ($\mu_2/\mu_1=2$, $\nu_1=\nu_2=1/3$, $\rho_1=\rho_2$).

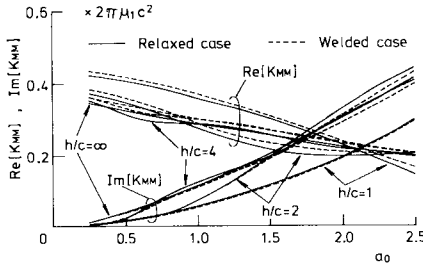


Fig. 8 Effect of h/c on rocking dynamic stiffnesses for rigid strip ($\mu_2/\mu_1=2$, $\nu_1=\nu_2=1/3$, $\rho_1=\rho_2$).

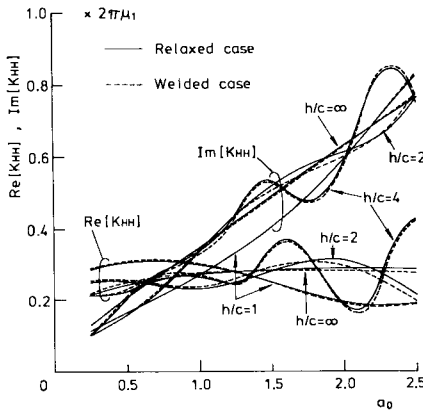


Fig. 9 Effect of h/c on horizontal dynamic stiffnesses for rigid strip ($\mu_2/\mu_1=2$, $\nu_1=\nu_2=1/3$, $\rho_1=\rho_2$).

表層厚 h/c および接触面の変位拘束の有無が複素剛性に及ぼす影響を調べたものである。これらの図より、 $h/c=4$ の場合の複素剛性は、半無限弾性地盤 ($h/c=\infty$) の複素剛性の回りに変動していることがわかる。特に、鉛直およびロッキング振動の場合には、 h/c の値が大きくなるとともに二層弾性地盤の複素剛性が半無限弾性地盤のそれに近づく様子が顕著である。一方、 h/c の値が小さい場合でも、 a_0 の値が大きくなるとともに、表層厚は波長に比べて相対的に大きくなる。したがって、 $h/c=1$ の場合でも、 a_0 の値が大きくなるとともに複素剛性は半無限弾性地盤のそれに近づくことが推測できる。次に、接触面の変位拘束の有無が複素剛性に及ぼす影響は、鉛直、ロッキングお

よび水平振動のそれぞれの場合で若干異なっている。鉛直振動の場合には $h/c=2, 4$ のときに、 a_0 の値の増加とともに変位拘束の有無による複素剛性の差異が現われる傾向となっているが、水平振動の場合には $h/c=2$ のときにその差異が認められる。また、ロッキング振動の場合には、 h/c のいずれの値においても変位拘束の有無による複素剛性の差異が一樣に現われる傾向となっている。

以上の結果より、二層弾性地盤上の剛体帯に対する複素剛性は無次元加振振動数 a_0 、層剛性比 μ_2/μ_1 および表層厚 h/c 等の影響を受けることがわかる。また、接触面の変位拘束の有無が複素剛性に及ぼす影響も表層地盤の振動特性に関係している。しかし、本論文で示した諸元の範囲では、複素剛性に及ぼす接触面の変位拘束の影響が認められるもののその程度は少なく、特に a_0 の値が小さいときには変位拘束を無視できることがわかる。

4. 正方形剛基礎に対する複素剛性

長方形底面をもつ剛基礎の場合、接触面の分割数を増すことによって、式 (3) で表わされる影響関数の計算量が非常に増加する。しかも、式 (3) は特異点を含む二重積分の形となるため、演算コストの面で影響関数の近似化が必要となる。本論文では分割要素に正方形を用い、式 (3) の積分を正方形要素と等価な面積の円形等分布加振に対する積分で代用した。なお、これらに対する諸検討は文献 21) に与えられている。一方、接触面の分割数については、その数を増せば厳密解に近づくわけであるが、本論文では剛基礎の正方形底面を 10×10 のメッシュに分割した。この分割メッシュの誤差に対する検討と既往の研究との比較は文献 14) に示されている。

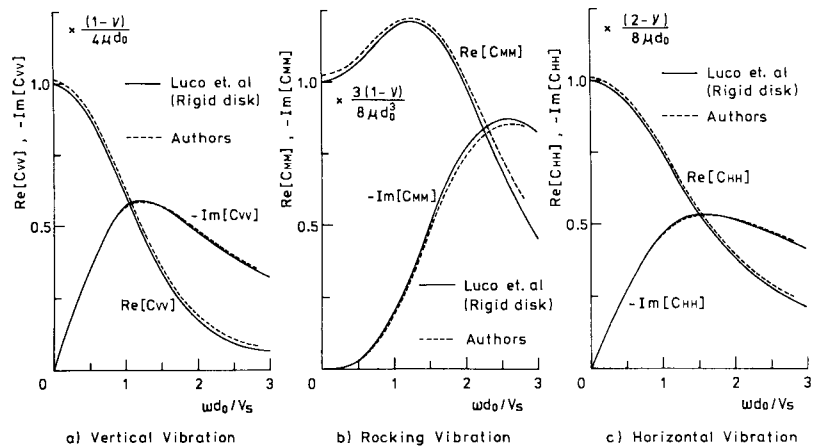


Fig. 10 Comparison of compliances for rigid disk and rigid square foundation (Half-space, Relaxed case, $\nu=1/3$).

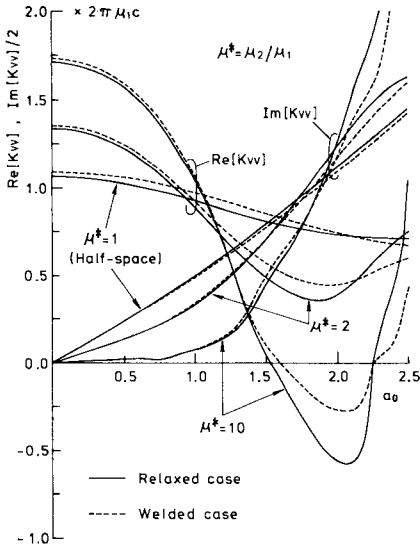


Fig. 11 Effect of μ_2/μ_1 on vertical dynamic stiffnesses for rigid square foundation ($h/c=2$, $\nu_1=\nu_2=1/3$, $\rho_1=\rho_2$).

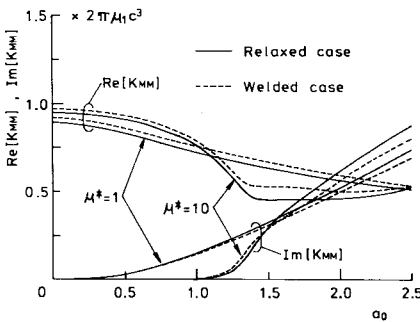


Fig. 12 Effect of μ_2/μ_1 on rocking dynamic stiffnesses for rigid square foundation ($h/c=2$, $\nu_1=\nu_2=1/3$, $\rho_1=\rho_2$).

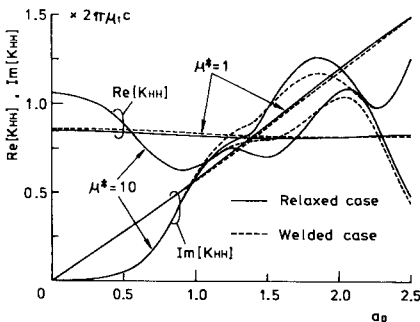


Fig. 13 Effect of μ_2/μ_1 on horizontal dynamic stiffnesses for rigid square foundation ($h/c=2$, $\nu_1=\nu_2=1/3$, $\rho_1=\rho_2$).

る。

まず、半無限弾性地盤で接触面の変位拘束を無視した場合について、Luco⁸⁾が求めた剛円盤の複素コンプライアンス(複素剛性の逆数に相当)と底面積が等価な

正方形剛基礎の複素コンプライアンスの比較を Fig. 10 に示す。正方形剛基礎に対する結果には分割メッシュによる誤差が含まれるが、両者はよく一致している。一般に、円形等分布加振と面積が等価な正方形面に作用する等分布加振による中央変位はほとんど一致することが知られている²¹⁾が、剛基礎底面の合反力についてもほぼ一致することがわかる。

Fig. 11~13 は、表層厚を一定 ($h/c=2$) にして、層剛性比および接触面の変位拘束の有無が鉛直、ロッキングおよび水平振動の複素剛性に及ぼす影響を調べたものである。これらの影響の全般的な傾向は、Fig. 4~6 に示した剛体帯に対する複素剛性における傾向とよく一致している。したがって、表層厚が複素剛性に与える効果についても剛体帯のそれと同様であろうと推察できる。また、接触面の変位拘束を無視した場合について、二層弾性地盤の複素剛性の α_0 の値に対する変動は、Luco⁹⁾ が求めた剛円盤に対する結果ともよく一致した傾向を示している。Fig. 10 の結果を踏まえて、層状弾性地盤上の正方形剛基礎底面の複素剛性は、層状弾性地盤の振動特性にかかわらず、底面積が等価な剛円盤の複素剛性で代用できるといえよう。

5. あとがき

本論文で示した結果のうち一部は層状弾性地盤に対する既往の研究結果^{たえば(5), (9), (19)}と同様のもとなっているが、得られた知見を要約すれば次のようになる。

- (1) 二層弾性地盤の複素剛性は、地盤の層剛性比 μ_2/μ_1 が大きくなるとともに、表層地盤の振動特性の影響を受けている^{(5), (9)}。
- (2) 表層厚 h/c が大きくなるとともに、二層弾性地盤の複素剛性は半無限弾性地盤に対する複素剛性に収束している^{(5), (9), (19)}。
- (3) 鉛直複素剛性に及ぼす地盤の層剛性比および表層厚の影響は水平およびロッキングの複素剛性に対する影響よりも大きい^{(5), (9), (19)}。
- (4) 上記(1)~(3)の結果は構造物と地盤の接触面における変位拘束なしに対するものであるが、変位拘束ありの場合にも同じ傾向となっている。
- (5) 変位拘束の有無による複素剛性の差異は、地盤の層剛性比とともに大きくなる傾向にある。一方、その差異に及ぼす表層厚の影響は各振動型で異なっている。

(6) 本論文で示した諸元の範囲では、複素剛性に及ぼす変位拘束の影響は認められるもののその程度は少なく、無次元振動数 $\omega c/V_{s1}$ が小さい範囲では変位拘束を無視できる。

以上の知見は、剛体帯の場合および正方形底面をもつ剛基礎の場合のいずれに対しても得られるものである。

また、上記(1)~(3)は剛円盤に対する結果⁹⁾と同様のものであること、半無限弾性地盤上の正方形剛基礎に対する複素剛性は底面積が等価な剛円盤のそれとはほぼ一致していることから、本論文で得られた知見は構造物底面の形状によって一般性を失うものではない。

参 考 文 献

- 1) Richart, F. E., Hall, J. R. and Woods, R. D. (岩崎敏男・嶋津晃臣共訳)：上と基礎の振動，鹿島出版会，1975.
- 2) Bycroft, G. N. : Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, Vol. 248, Series A, pp. 327~368, 1956.
- 3) 田治見宏：耐震理論に関する基礎的研究，東大生産研究所報告，第8巻，第9号，pp. 170~215, 1959.
- 4) Thomson, W. T. and Kobori, T. : Dynamic compliance of rectangular foundations on an elastic half-space, *J. Appl. Mech.*, Vol. 30, *Trans. ASME*, Vol. 85, pp. 579~584, 1963.
- 5) 小堀輝二・南井良一郎・鈴木 有：成層構造をもつ基礎地盤の動特性，京大防災研究所年報，第19号B，pp. 167~217, 1976.
- 6) Karasudhi, P., Keer, L. M. and Lee, S. L. : Vibratory motion of a body on an elastic half plane, *J. Appl. Mech.*, Vol. 35, *Trans. ASME*, Vol. 90, pp. 697~705, 1968.
- 7) Luco, J. E. and Westmann, R. A. : Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic half space, *J. Appl. Mech.*, Vol. 39, *Trans. ASME*, Vol. 94, pp. 527~534, 1972.
- 8) Luco, J. E. and Westmann, R. A. : Dynamic response of circular footings, *Proc. ASCE*, Vol. 97, EM 5, pp. 1381~1395, 1971.
- 9) Luco, J. E. : Impedance functions for a rigid foundation on a layered medium, *Nuclear Engng Design*, Vol. 31, pp. 204~217, 1974.
- 10) Elorduy, J., Nieto, J. A. and Szekely, E. M. : Dynamic response of bases of arbitrary shape subjected to periodic vertical loading, *Proc. Int. Symp. on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials*, Albuquerque, pp. 105~121, 1967.
- 11) Wong, H. L. and Luco, J. E. : Dynamic response of rigid foundations of arbitrary shape, *Int. J. Earthquake Engng Struct. Dynamics*, Vol. 4, pp. 579~587, 1976.
- 12) Savidis, S. A. and Richter, T. : Dynamic interaction of rigid foundations, *Proc. 9th Int. Conf. on Soil Mechanics and Found. Engng*, Tokyo, Vol. 2, pp. 369~374, 1977.
- 13) Gaul, L. : Dynamische Wechselwirkung eines Fundamentes mit dem viskoelastischen Halbraum, *Ingenieur-Archiv*, Vol. 46, pp. 401~422, 1977.
- 14) Kitamura, Y. and Sakurai, S. : Dynamic stiffness for rectangular rigid foundations on a semi-infinite elastic medium, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 3, pp. 159~171, 1979.
- 15) 北村泰寿・桜井春輔：剛基礎底面の複素剛性に関する一解析法，土木学会論文報告集，第290号，pp. 43~52, 1979.
- 16) Hamidzadeh-Eraghi, H. R. and Grootenhuis, P. : The dynamics of a rigid foundation on the surface of an elastic half-space, *Int. J. Earthquake Engng Struct. Dynamics*, Vol. 9, pp. 501~515, 1981.
- 17) Adeli, H., Hejazi, M. S., Keer, L. M. and Nemat-Nasser, S. : Dynamic response of foundation with arbitrary geometries, *Proc. ASCE*, Vol. 107, EM 5, pp. 953~967, 1981.
- 18) Rucker, W. : Dynamic behaviour of rigid foundations of arbitrary shape on a half-space, *Int. J. Earthquake Engng Struct. Dynamics*, Vol. 10, pp. 675~690, 1982.
- 19) Kawase, H., Yoshida, K., Nakai, S. and Koyanagi, Y. : Dynamic response of a structure on a layered medium---A dipping layer and a flat layer---，第6回H本地震工学シンポジウム，pp. 1641~1648, 1982.
- 20) 川上英二・田崎信一：任意形状の剛基礎底面に対する動的 Compliance の簡易解析法，土木学会論文集，第350号，I-2, pp. 253~262, 1984.
- 21) 北村泰寿・桜井春輔：弾性地盤上の構造物の動的解析における地盤の柔性マトリックス，土木学会論文報告集，第341号，pp. 119~127, 1984.
- 22) 北村泰寿・桜井春輔・陳 徳生：二層弾性体表面の点加振力による表面変位の解析，建設工学研究所報告，第22号，pp. 145~166, 1980.

(1984. 11. 7・受付)