

## 半無限多層弾性体の内部加振問題への伝達マトリックス法の応用

## APPLICATION OF A TRANSFER MATRIX METHOD TO VIBRATION PROBLEM OF AN ELASTIC MULTI-LAYERED HALF-SPACE DUE TO BURIED SOURCES

高谷 富也\*・北村 泰寿\*\*・桜井 春輔\*\*\*

By Tomiya TAKATANI, Yasutoshi KITAMURA and Shunsuke SAKURAI

This paper is concerned with the computational procedure of displacements and stresses of an elastic multi-layered half-space due to harmonic loads acting in the interior of the half-space. In calculating the fundamental solutions of displacements and stresses, the authors propose a transfer matrix method taking advantage of a vector-matrix form which expresses the general solutions of displacements and stresses being used in the derivation of dispersion function of an elastic multi-layered half-space. The results shown in this paper can be used as the fundamental solutions in the Boundary Element Method. As numerical examples, the stresses of an elastic half-space due to vertical and horizontal concentrated loads are calculated for the various non-dimensional frequency  $\omega H_1/V_{s1}$ .

## 1. ま え が き

地中加振による波動伝播問題については、地震波動の研究分野において古くから優れた研究がみられる<sup>1),2)</sup>。また、近年においては、地中の調和型点加振力による変位、応力解は、境界要素法を地盤の振動問題に適用する際の基本解として重要である。自由表面をもつ三次元弾性体内部の調和型加振力による応答を取り扱った最近の研究には、松岡ら<sup>3)</sup>、著者ら<sup>4)</sup>、Lucoら<sup>5)</sup>、Kauselら<sup>6)</sup>の論文が挙げられる。松岡らは、Mindlin 解の誘導と同様に、全無限弾性体における定常解の素解と変位ポテンシャルの重ね合わせによって解を得ている。さらに、この解法は剛基盤を有する弾性体内部の加振問題の解析に拡張されている<sup>7)</sup>。一方、著者ら、LucoらおよびKauselらの方法は、いずれも多層弾性体の分散関数の定式に用いられている変位、応力の一般解をベクトル・マトリックス表現する Haskell 法<sup>8)</sup>に基づいている。著者らの方法では、弾性体内（多層の場合には層内）の加

振位置に仮定の境界を設け、同じ力学定数の二層に分割している。Lucoらは、載荷層を分割する代わりに、変位、応力の一般解に震源項として特解を加えた形で載荷層の変位、応力を表わしている。著者らと Lucoらの方法を構造解析における伝達マトリックス法に対比してみると、前者は加振位置に新たに格点を設けることに相当し、後者は荷重項として取り入れる考え方に対応している。これらに対して、Kauselらは、各層の伝達マトリックスから層境界の力-変位関係を与える3層剛性マトリックスを求めている。すなわち、構造解析における直接剛性法の考え方をういた解法を導入している。

このような状況において、本論文は、文献4)に得られている定式を一般化して、構造解析における伝達マトリックス法による定式化を示す。また、半無限弾性体は最も基本的な地盤モデル化であるため、半無限弾性体内部の加振問題に対する変位、応力解を、表面と平行方向に任意分布する加振力に対しても得られるように一般化した形で与える。

## 2. 基礎式

直角座標系  $(x, y, z)$  において、等質等方弾性体に対する Navier の運動方程式は次式のように与えられる。

\* 学生会員 工修 神戸大学大学院生 自然科学研究科 (〒657 神戸市六甲台町1-1)

\*\* 正会員 工博 神戸大学助教授 工学部土地造成工学研究施設 (同上)

\*\*\* 正会員 Ph.D. 工博 神戸大学教授 工学部土木工学科 (同上)

$$\begin{aligned}
 &(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta + \mu \nabla^2 (u_x, u_y, u_z) \\
 &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_x, u_y, u_z) \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

ここで、 $u_x, u_y, u_z$  は  $x, y, z$  方向の変位、 $\Delta$  は体積ひずみ、 $\nabla^2$  は Laplace の演算子、 $\lambda, \mu$  は Lamé の定数、 $\rho$  は密度、 $t$  は時間である。

式(1)に  $(x, y, t)$  に関する三重 Fourier 変換を導入すれば、像空間  $(\xi_1, \xi_2, \omega)$  での変位、応力の一般解が次式のように求められる。

$$\begin{aligned}
 u_x^* &= -i\xi_1 (e^{-\alpha z} c_1 + \beta e^{-\beta z} c_2 + e^{\alpha z} c_4 - \beta e^{\beta z} c_5) \\
 u_y^* &= -i\xi_2 (e^{-\alpha z} c_1 + \beta e^{-\beta z} c_3 + e^{\alpha z} c_4 - \beta e^{\beta z} c_6) \\
 u_z^* &= \alpha e^{-\alpha z} c_1 + \xi_1^2 e^{-\beta z} c_2 + \xi_2^2 e^{-\beta z} c_3 \\
 &\quad - \alpha e^{\alpha z} c_4 + \xi_1^2 e^{\beta z} c_5 + \xi_2^2 e^{\beta z} c_6 \\
 \tau_{xx}^* &= i\xi_1 \mu \{ 2\alpha e^{-\alpha z} c_1 + (\xi_1^2 + \beta^2) e^{-\beta z} c_2 + \xi_2^2 e^{-\beta z} \\
 &\quad \cdot c_3 - 2\alpha e^{\alpha z} c_4 + (\xi_1^2 + \beta^2) e^{\beta z} c_5 + \xi_2^2 e^{\beta z} c_6 \} \\
 \tau_{yz}^* &= i\xi_2 \mu \{ 2\alpha e^{-\alpha z} c_1 + \xi_1^2 e^{-\beta z} c_2 + (\xi_2^2 + \beta^2) e^{-\beta z} c_3 \\
 &\quad - 2\alpha e^{\alpha z} c_4 + \xi_1^2 e^{\beta z} c_5 + (\xi_2^2 + \beta^2) e^{\beta z} c_6 \} \\
 \sigma_z^* &= -\mu \{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha z} c_1 + 2\xi_1^2 \beta e^{-\beta z} c_2 + 2\xi_2^2 \beta e^{-\beta z} \\
 &\quad c_3 + (k^2 + \beta^2) e^{\alpha z} c_4 - 2\xi_1^2 \beta e^{\beta z} c_5 - 2\xi_2^2 \beta e^{\beta z} c_6 \} \\
 &\dots \dots \dots (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k^2 &= \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad \alpha = \sqrt{k^2 - k_p^2}, \quad \beta = \sqrt{k^2 - k_s^2} \\
 k_p &= \omega / V_p, \quad k_s = \omega / V_s
 \end{aligned}$$

また、 $i = \sqrt{-1}$ 、 $\xi_1, \xi_2$  は波数の次元をもつ変数、 $\omega$  は円振動数、 $\mu$  はせん断弾性係数、 $V_p$  は縦波速度、 $V_s$  は横波速度、 $c_1 \sim c_6$  は未知係数、変位、応力に上添字\*を付した  $u_x^*, \tau_{xx}^*, \dots$  等は像空間での変位、応力であり、 $e^{\alpha z}, e^{\beta z}$  は上昇波を、 $e^{-\alpha z}, e^{-\beta z}$  は下降波を表す項である。なお、式(2)に示す応力成分以外の  $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*$  については、本論文での定式における境界条件に現れないため式的表示は省略した。

いま、次章での式変形の都合上、式(2)で与えられる変位、応力の一般解をマトリックス表示で次式のように表わしておく。

$$\{Q\} = [D] \{C\} \dots \dots \dots (3)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 \{Q\} &= \{u_x^*, u_y^*, u_z^*, \tau_{xx}^*, \tau_{yz}^*, \sigma_z^*\}^T \\
 \{C\} &= \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}^T
 \end{aligned}$$

また、 $[D]$  は式(2)より容易に書き表わせる正方マトリックスである。なお、 $\xi_1^2 = \xi_2^2 = k^2/2$  なる置き換えを行えば、変位、応力ベクトルの表示に対する若干の変形は必要であるが、円筒座標系における  $[D]$  マトリックスが得られる<sup>9)</sup>。

### 3. 多層弾性体に対する定式

Fig. 1 に示す多層弾性体の第  $m$  層の変位、応力の一般解をベクトル・マトリックス表現で次式のように表わ

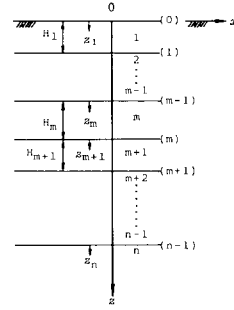


Fig. 1 Multi-layered Model.

す。

$$\{Q_m\} = [D_m] \{C_m\} \dots \dots \dots (4)$$

ここで、上式は第  $m$  層の上端を  $z$  座標の原点とする局所座標系  $(x, y, z_m)$  に対する表式で、式(3)において第  $m$  層の物理量に関する諸量に添字  $m$  を付したものである。なお、 $[D_m]$  の内容は文献10)にも示されており、また若干違った表わし方となっているが、小堀ら<sup>13)</sup>によっても与えられている。

第  $m$  層の下端 ( $z_m = H_m$ ) における変位、応力と上端 ( $z_m = 0$ ) における変位、応力は次式で関係づけられる。

$$\{Q_m^d\} = [D_m^d] [D_m^u]^{-1} \{Q_m^u\} \dots \dots \dots (5)$$

ここで、上添字  $d, u$  はそれぞれ下端 ( $z_m = H_m$ ) および上端 ( $z_m = 0$ ) における諸量を意味する。構造解析における伝達マトリックス法に習って<sup>14)</sup>、式(5)を次式のように書き直す。

$$\{V_m^d\} = [G_m] \{V_m^u\} \dots \dots \dots (6)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 \{V_m\} &= \{Q_m^T, 1\}^T \\
 [G_m] &= \begin{bmatrix} [D_m^d][D_m^u]^{-1} & | & \{S_m\} \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\{S_m\} = \{\bar{u}_x^*, \bar{u}_y^*, \bar{u}_z^*, \bar{q}_x^*, \bar{q}_y^*, \bar{q}_z^*\}^T$$

また、 $\bar{u}_x^*, \dots, \bar{q}_x^*, \dots$  等は第  $m$  層内の変位の食い違い、加振力による特解に関する項で、Luco ら<sup>5)</sup>が求める震源項より得られる。 $\{V_m\}, [G_m], \{S_m\}$  はそれぞれ伝達マトリックス法における状態量ベクトル、格間伝達マトリックス、荷重項に相当する。なお、本論文では  $\{S_m\} = 0$  とおいて、加振位置に設ける仮想境界面での連続条件に取り入れる。

次に、第  $m+1$  層上端の状態量ベクトルと第  $m$  層下端の状態量ベクトルは次式で関係づけられる。

$$\{V_{m+1}^u\} = [P_m] \{V_m^d\} \dots \dots \dots (7)$$

ただし、

$$[P_m] = \begin{bmatrix} [I] & | & \{T_m\} \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$\{T_m\} = \{\Delta u_x^*, \Delta u_y^*, \Delta u_z^*, -\Delta q_x^*, -\Delta q_y^*, -\Delta q_z^*\}_m^T$   
 また、 $[I]$  は単位マトリックス、 $\Delta u_x^*, \dots, \Delta q_x^*, \dots$ 等  
 は変位の食い違い、加振力の Fourier 変換形である。な  
 お、添字 ( $m$ ) は第  $m$  層と第  $m+1$  層の層境界を意味  
 する。 $\{P_m\}$  は伝達マトリックス法における格点伝達  
 マトリックスに相当する。

式 (6), (7) を用いて、第  $n-1$  層下端の状態量ベ  
 クトルと第 1 層上端 (表面) の状態量ベクトルを関係づ  
 けると次式のように表わされる。

$$\{V_{n-1}^d\} = [F]\{V_1^u\} \dots \dots \dots (8)$$

ただし、

$$[F] = [G_{n-1}][P_{n-2}][G_{n-2}] \dots \dots [P_0][G_0]$$

式 (8) は、第  $n-1$  層下端と第 1 層上端が、すべての  
 物理量に対して自由度をもつとした場合の一般解であ  
 る。したがって、両端の境界条件を代入することによ  
 って、未知の物理量が式 (8) から得られる。

まず、上端 (自由表面) で加振力が作用していない場合、  
 表面変位が自由度となる。このとき、第 1 層上端の状態  
 量ベクトルは次式で与えられる。

$$\{V_1^u\} = [R]\{A_1^u\} \dots \dots \dots (9)$$

ただし、

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \{A_1^u\} = \begin{bmatrix} u_x^u \\ u_y^u \\ u_z^u \\ 1 \end{bmatrix}$$

また、 $[R]$ 、 $\{A_1^u\}$  は伝達マトリックス法における境界マ  
 トリックスおよび初期ベクトルに相当する。なお、上端  
 に加振力が作用している場合には、式 (9) の  $[R]$  を  
 用いて、 $\{P_0\}[R]$  なるマトリックス積を改めて  $[R]$  と  
 おいて式 (9) に代入すればよい。

一方、第  $n-1$  層下端の境界条件は、第  $n$  層が剛基盤  
 の場合と半無限層になる場合に分けて示す。剛基盤の場  
 合、変位が 0 となり応力成分が未知物理量となる。した  
 がって、下端の境界条件式は、下端の状態量ベクトルか  
 ら変位を取り出すマトリックス  $[R']$  を前掛けして、  
 これを  $\{0\}$  とおけば次式のように表わされる。

$$[R']\{V_{n-1}^d\} = \{0\} \dots \dots \dots (10)$$

ただし、

$$[R'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

また、第  $n$  層が半無限層の場合、上昇波成分が存在し  
 ないことを考慮しなければならない。すなわち、

$$[R'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [D_n^u]^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [P_{n-1}]$$

で得られるマトリックス  $[R']$  が上昇波成分を表わし、  
 これを第  $n-1$  層下端の状態量ベクトルに前掛けして、  
 $\{0\}$  とおけばよい。

式 (8), (9), (10) より、第 1 層上端 (自由表面)  
 の自由度に関する連立一次方程式が得られる。

$$[R']\{F\}[R]\{A_1^u\} = \{0\} \dots \dots \dots (11)$$

ここで、マトリックス積  $[R']\{F\}[R]$  は  $3 \times 4$  の次数で  
 得られており、式 (11) は上端 (自由表面) の自由度を  
 未知量とする 3 元連立一次方程式となっている。この上  
 端の自由度を用いて、各層上端の状態量ベクトルが求め  
 られる。

$$\{V_j^u\} = [P_0][G_j] \dots \dots [P_0][G_1][R]\{A_1^u\} \dots \dots (12)$$

なお、計算機の利用においては、式 (11) の係数マトリッ  
 クスは第 1 層上端より順次前掛けによって計算する。し  
 たがって、式 (12) で  $\{A_1^u\}$  に前掛けしているマトリッ  
 クスを、式 (11) の演算に際して必要に応じて記憶して  
 おけば演算時間の短縮が計れる。さらに、第  $j$  層内の  
 変位、応力は、次式によって第  $j$  層上端の変位、応力  
 と関係づけられる。

$$\{Q_j\} = [D_j][D_j]^{-1}\{Q_j^u\} \dots \dots \dots (13)$$

式 (12) で得られる第  $j$  層上端の変位、応力を式 (13)  
 に代入すれば、第  $j$  層内の変位、応力が得られる。結局、  
 式 (13) を三重 Fourier 逆変換すれば、任意層の変位、  
 応力が次式のように求められることになる。

$$\{u_x, u_y, u_z, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \sigma_z\}^T = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \{Q_j\} e^{i\xi_1 x + i\xi_2 y + i\omega t} d\xi_1 d\xi_2 d\omega \dots \dots (14)$$

#### 4. 表面波の分散性と数値計算法

層内および層境界に変位の食い違いおよび加振力が作  
 用しない場合、表面波の分散性を論ずる固有値問題とな  
 る。すなわち、式 (6) において  $\{S_m\} = 0$ 、また式 (7)  
 において  $\{T_m\} = 0$  とおけば、式 (11) から第 1 層上端 (自  
 由表面) の自由度を未知量とする同次方程式が得られる。  
 したがって、この同次方程式の係数行列が分散関数を与  
 える。

多層弾性体の表面波の分散性については数多くの議論  
 があるが、本論文でも論文構成の便宜上、二層弾性体を  
 例にとって表面波の分散曲線を Fig. 2 に示す。なお、同  
 図には、下層が剛基盤 ( $\mu_2/\mu_1 = \infty$ ) となる場合の分散  
 曲線も示してある。また、同図の縦軸に現われる  $V_R$ 、  
 $V_L$  は Rayleigh 波および Love 波の速度を意味する。半  
 無限弾性体 ( $\nu_1 = 1/3$ ) の場合、 $V_{S1}/V_R \approx 1.072$  の 1 根  
 のみ存在するが、二層弾性体の場合には Fig. 2 に示すよ

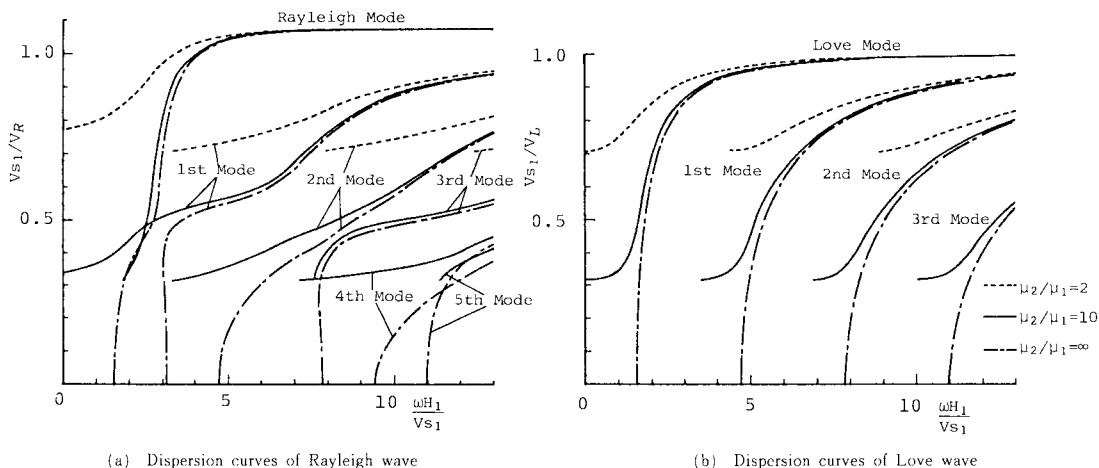


Fig. 2 Dispersion curves of an elastic two-layered half-space.

うに  $V_{S1}/V_R$  あるいは  $V_{S1}/V_L$  は無次元振動数  $\omega H_1/V_{S1}$  の値によって複数個存在し、波数あるいは波長によって表面波の速度が異なるという、いわゆる分散性を示す。

ところで、式(11)より得られる分散関数の根は式(14)の被積分関数の分母を0にすることが知られている。すなわち、式(14)は複数の特異点を含む積分となり、この数値積分には相当の困難を伴う。このため、数値計算法として半無限弾性体においては周回積分の適用によってこの特異点を避ける方法(たとえば、文献11)、12)など)がとられているが、多層弾性体の場合には分母の複素根に対する留数項の評価が困難である。また、根の値に関して被積分関数を偶関数と奇関数に分け、奇関数部分を消去する数値積分法(たとえば、文献13))もみられるが、2つ以上の根が存在する場合には数値計算上の処理が煩雑となる。これらの諸点を考慮して、本論文では文献9)に示されている直接数値積分法によって各変位、応力解の数値解を求める。なお、積分刻み等については詳細な検討が文献9)に与えられており、本論文ではこれを参考にした。一方、地盤を多層粘弾性体として取り扱えば、式(14)の分母(すなわち、分散関数)は実根を有しないことが知られている<sup>13)</sup>。したがって、地盤を粘弾性体とすることによって、式(14)に相当する多層粘弾性体の変位、応力解の数値積分には特に困難な問題点はなくなるものと考えられる。

5. 半無限弾性体内部の加振問題

半無限弾性体を対象とする場合、3. の定式を利用することなく内部加振による変位、応力解を誘導できるが、ここでは3. の定式の1つの応用という意味で半無限弾性体への適用を行う。

半無限弾性体内部に調和型加振力が作用するときの変

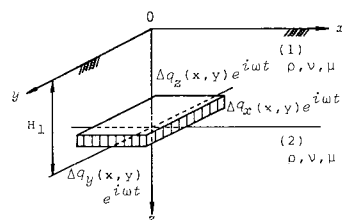


Fig. 3 Analytical Model and Coordinates.

位、応力解の誘導には、Fig. 3に示すように加振位置に仮定の境界面を設け、同じ力学定数をもつ二層弾性体と考えることによって3. での定式がただちに利用できる。すなわち、3. での定式において層数を  $n=2$  とおき、式(11)より得られる自由表面の自由度を式(12)に代入して得られた式を、さらに式(13)に代入して、式(14)のFourier逆変換を行えば所要の変位、応力解が得られる。

式(11)をFig. 3の解析モデルに対して書き直すと次式のように表わされる。

$$[R]^T [G_1] [R] A_1^T = 0 \dots \dots \dots (15)$$

ただし、

$$[R]^T = [E] [P_0], [E] = [[\bar{D}_{11}^*], [\bar{D}_{12}^*], 0]$$

また、 $[E]$  は  $3 \times 7$  の次数のマトリックスで、 $[\bar{D}_{11}^*]$ 、 $[\bar{D}_{12}^*]$  は  $[D_0^*]^{-1}$  の  $3 \times 3$  のサブ・マトリックスである。式(15)で与えられる自由度を式(12)に代入して得られた式を式(13)に代入して、式(14)のFourier逆変換を行う一連の演算はマトリックス演算で行われる。ここでは、マトリックス積を分解して、変位、応力解を利用しやすい形に整理する。なお、マトリックス積の分解は代数式の単純な変形であるため、誘導途中の詳細は省略して変形後の結果のみを示す。また、本章では調和型

Table 1 Explanation of the symbols in the solutions of displacements and stresses in case of Fourier transformation.

	$v$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$	$\kappa_1$	$I_7$	$\kappa_2$	$I_8$	$\kappa_3$	$I_9$	$I_{10}$	$I_{11}$	$I_{12}$
上 下 加 振 問 題	$u_x^*$	$i\xi_1 \Delta q_x^*/\mu$	1	$A(k)$	$k^2 + \beta^2$	$2\alpha\beta$	-1	$\pm$	1	+ 0	0	0	0	0	0	0
	$u_y^*$	$i\xi_2 \Delta q_x^*/\mu$	1	$A(k)$	$k^2 + \beta^2$	$2\alpha\beta$	-1	$\pm$	1	+ 0	0	0	0	0	0	0
	$u_z^*$	$-\Delta q_x^*/\mu$	1	$\alpha A(k)$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	$-\alpha$	-	$k^2/\beta$	- 0	0	0	0	0	0	0
	$\sigma_x^*$	$-2 \Delta q_x^*$	$\xi_1^2$	$A(k)$	$k^2 + \beta^2$	$2\alpha\beta$	-1	=	1	$\pm$	0	0	0	1	$(k^2 + \beta^2)A(k)$	$-D^2(\alpha)$
	$\sigma_y^*$	$-2 \Delta q_x^*$	$\xi_2^2$	$A(k)$	$k^2 + \beta^2$	$2\alpha\beta$	-1	+	1	$\pm$	0	0	0	1	$(k^2 + \beta^2)A(k)$	$D^2(\alpha)$
	$\sigma_z^*$	$\Delta q_x^*$	1	$A(k)$	$(k^2 + \beta^2)^2$	$4k^2\alpha\beta$	$-(k^2 + \beta^2)$	$\pm$	$2k^2$	$\pm$	0	0	0	0	0	0
水 平 加 振 問 題	$\tau_{xy}^*$	$-2\xi_1 \xi_2 \Delta q_x^*$	1	$A(k)$	$k^2 + \beta^2$	$2\alpha\beta$	1	+	1	$\pm$	0	0	0	0	0	0
	$\tau_{yz}^*$	$-i\xi_2 \Delta q_x^*$	1	$2\alpha(k^2 + \beta^2)A(k)$	1	1	$-2\alpha$	-	$(k^2 + \beta^2)/\beta$	- 0	0	0	0	0	0	0
	$\tau_{zx}^*$	$-i\xi_1 \Delta q_x^*$	1	$2\alpha(k^2 + \beta^2)A(k)$	1	1	$-2\alpha$	-	$(k^2 + \beta^2)/\beta$	- 0	0	0	0	0	0	0
	$u_x^*$	$-\Delta q_x^*/\mu$	$\xi_1^2/k^2$	$\beta B(k)$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$k^2/\alpha$	-	$-\beta$	- 0	0	0	$D^*(\beta)$	0	0	0
方 向 加 振 問 題	$u_y^*$	$-\Delta q_x^*/\mu$	$\xi_2^2/k^2$	$\beta B(k)$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$k^2/\alpha$	-	$-\beta$	- 1	-1	0	0	0	0	0
	$u_z^*$	$i\xi_1 \Delta q_x^*/\mu$	1	$B(k)$	$2\alpha\beta$	$k^2 + \beta^2$	1	-	-1	$\pm$	0	0	0	0	0	0
	$\sigma_x^*$	$-2i\xi_1 \Delta q_x^*$	$\xi_1^2/k^2$	$\beta B(k)$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$k^2/\alpha$	-	$-\beta$	- 0	0	$D^*(\beta)$	1	$2\beta B(k)$	$D^*(\alpha)/\alpha$	
	$\sigma_y^*$	$-2i\xi_2 \Delta q_x^*$	$\xi_2^2/k^2$	$\beta B(k)$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$k^2/\alpha$	-	$-\beta$	- 1	+	0	1	$2\beta B(k)$	$D^*(\alpha)/\alpha$	
	$\sigma_z^*$	$i\xi_1 \Delta q_x^*$	1	$2\beta(k^2 + \beta^2)B(k)$	1	1	$(k^2 + \beta^2)/\alpha$	-	$-2\beta$	- 0	0	0	0	0	0	0
	$\tau_{xy}^*$	$-i\xi_2 \Delta q_x^*$	$\xi_2^2/k^2$	$2\beta B(k)$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2/\alpha$	-	$-2\beta$	- 1	+	$D^*(\beta)$	0	0	0	0
	$\tau_{yz}^*$	$\Delta q_x^*$	$\xi_1 \xi_2 / k^2$	$B(k)$	$4k^2\alpha\beta$	$(k^2 + \beta^2)^2$	$2k^2$	$\pm$	$-(k^2 + \beta^2)$	$\pm$	$\beta$	$\mp$	0	0	0	0
	$\tau_{zx}^*$	$\Delta q_x^*$	$\xi_1^2/k^2$	$B(k)$	$4k^2\alpha\beta$	$(k^2 + \beta^2)^2$	$2k^2$	+	$-(k^2 + \beta^2)$	$\pm$	0	0	$\beta D^*(\beta)$	0	0	0

注)  $A(k) = (k^2 + \beta^2)^2 e^{-\alpha H} - 2k^2 e^{-\alpha H} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta H}$

振動を対象としているため、時間項  $e^{i\omega t}$  の表示は省略する。

$$v = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{I_1}{2k_s^2} \left[ I_2 \left[ \frac{2I_3}{F(k)} \{ I_4 e^{-\alpha z} - I_5 e^{-\beta z} \} + I_6 D^*(\alpha) + I_7 D^*(\beta) + I_8 \frac{k_s^2}{\beta} D^*(\beta) \right] - I_9 \frac{\xi_2^2}{k^2} \frac{k_s^2}{\beta} + \frac{\nu k_s^2}{2(1-\nu)} I_{10} \left[ \frac{2I_{11}}{F(k)} e^{-\alpha z} + I_{12} \right] e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2 \dots \dots \dots (16)$$

ただし、

$$F(k) = (k^2 + \beta^2)^2 - 4k^2\alpha\beta$$

$$D^*(\alpha) = e^{-\alpha z + H} + \alpha e^{\alpha z - H}$$

また、 $\nu$  はポアソン比、 $D^*(\beta)$  は  $D^*(\alpha)$  で  $\alpha$  の代わりに  $\beta$  と置いたものである。 $v$  は各変位、応力の別を表わし、 $I_1 \sim I_{12}$  および  $\kappa_1 \sim \kappa_3$  なる記号は Table 1 に一括して与える。さらに、Table 1 において現われる複号は、それぞれ加振位置より上層部分 ( $0 \leq z \leq H$ ) および下層部分 ( $H \leq z$ ) に対応することを表わしている。

次に、式 (16) (すなわち、Table 1) に現われる荷重形の Fourier 変換について簡単に述べておく。なお、ここでは  $\Delta q_x^*$  のみ示し、 $\Delta q_y^*$ 、 $\Delta q_z^*$  については同形であるため省略する。まず、 $2a \times 2b$  なる載荷面に作用する等分布加振力の場合、荷重形とその Fourier 変換は次式のようになる。

$$\Delta q_x(x, y) = \begin{cases} p_z & |x| \leq a, |y| \leq b \\ 0 & |x| > a, |y| > b \end{cases} \iff \Delta q_x^*(\xi_1, \xi_2) = 4ab p_z \frac{\sin(\xi_1 a)}{\xi_1 a} \frac{\sin(\xi_2 b)}{\xi_2 b}$$

また、点加振力が作用する場合には、上式において  $\alpha \rightarrow 0$ 、 $b \rightarrow 0$  なる極限をとることによって次式のように得られる。

$$\Delta q_x^*(\xi_1, \xi_2) = P_z$$

ここで、 $p_z$ 、 $P_z$  は等分布および点加振力の荷重振幅である。これらの荷重形の Fourier 変換を式 (16) に代入すれば、それぞれの加振力に対する変位、応力解が求まる。

いま、点加振力が作用する場合に注目するとき、変位、応力解は次式のような形もしくはその式の組合せで得られていることがわかる。

$$g = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (i\xi_1)^m (i\xi_2)^n f(k) e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2$$

$$= (-1)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2 \dots \dots \dots (17)$$

ここで、 $g$  は各変位、応力解ないしはその一部を、 $f(k)$  は  $k = (\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2})$  のみで表わされる被積分関数を意味する。また、上式において、 $m$ 、 $n$  はそれぞれ  $m = 0 \sim 3$ 、 $n = 0 \sim 2$  の範囲の値をとり、式中の  $[ ]$  は Gauss の整数化記号を表わす。ところで、式 (17) の無限二重積分の項は積分変数によって次式のように書き直すことができる<sup>15)</sup>。

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2 = 2\pi \int_0^{\infty} k f(k) J_0(kr) dk$$

ここで、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $J_0(\ )$  は 0 次の第 1 種 Bessel 関数である。したがって、上式を考慮すれば式 (17) は次

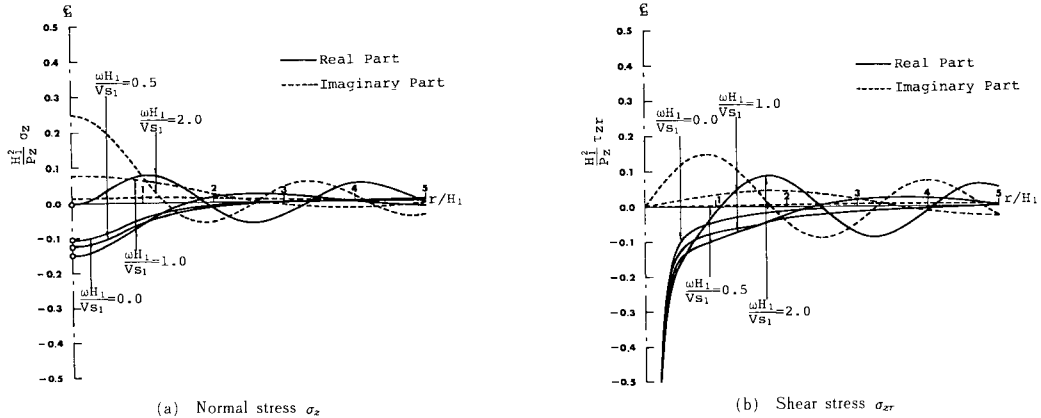


Fig. 4 Stresses at the depth  $H_1$  due to a vertical concentrated load at the depth  $H_1$ .

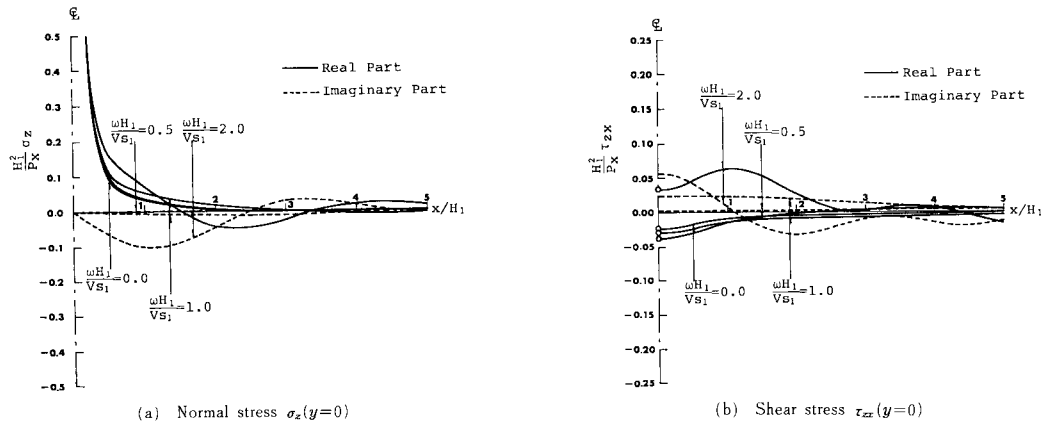


Fig. 5 Stresses at the depth  $H_1$  due to a horizontal concentrated load at the depth  $H_1$ .

式のように書き直される。

$$g = (-1)^{[m/2][n/2]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k f(k) \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} J_0(kr) dk \dots (18)$$

たとえば、上下点加振力による上下変位式は、上式を適用することによって次式のように求まる。

$$u_z = -\frac{P_z}{4\pi\mu k_s^2} \int_0^{\infty} k \left[ \frac{2\alpha A(k)}{F(k)} \{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha z} - 2\alpha\beta e^{-\beta z} \} - \alpha D^-(\alpha) + \frac{k_s^2}{\beta} D^-(\beta) \right] J_0(kr) dk \dots (19)$$

なお、式(19)は、円筒座標系における変位、応力の一般解を用いて、点加振力による変位解を求めた文献4)の結果と一致している。また、式(17)の形で得られている点加振力による変位、応力解を、式(18)の形に変形するとき Bessel 関数の微分形が必要となるが、これらについては一括して付録にまとめておく。

次に、数値計算例について、変位解のみであるが、矩形加振解と点加振解の比較<sup>16)</sup>、球状加振力による表面変位<sup>17)</sup>、矩形加振解と円形加振解の比較<sup>18)</sup>などについて報

告した。したがって、本論文では応力解に対する若干の数値計算結果を示すにとどめる。

Fig. 4 は、上下点加振力  $P_z e^{i\omega t}$  が深さ  $H_1$  に作用するときの鉛直応力  $\sigma_z$  およびせん断応力  $\tau_{zr}$  を、無次元振動数  $\omega H_1 / V_s$  をパラメータとして示したものである。一方、Fig. 5 は、深さ  $H_1$  の水平点加振力  $P_x e^{i\omega t}$  による  $x$  軸に沿う  $\sigma_z$  および  $\tau_{zx}$  を、 $\omega H_1 / V_s$  をパラメータとして図示したものである。これらの図において、 $\omega H_1 / V_s$  が小さくなるにつれて、静的解 ( $\omega H_1 / V_s = 0$ ) に近づいている様子がわかる。

### 6. あとがき

本論文は、多層弾性体の層境界（層内に加振源がある場合には加振位置で二層に分ける）に変位の食い違いあるいは加振力が作用するときの変位、応力解を、構造解析における伝達マトリクス法に基づいて定式化した。この定式を用いれば、多層弾性体内部の加振問題に対する変位、応力解の誘導は比較的容易である。しかし、多

層弾性体の場合、波動の分散性のため、変位、応力解の被積分関数は複数個の特異点を含むことになり、解の数値積分には相当の困難を伴う。一方、地盤を多層粘弾性体として取り扱えば、変位、応力解の積分は特異点を含まない積分となる。したがって、変位、応力解の数値積分には特に困難な問題はなくなり、地盤を粘弾性体とすることは実務での利用の面から1つの方法であろう。

最終に、本論文の数値計算には、神戸大学総合情報処理センター ACOS-1000 を利用したことを付記し、関係各位に感謝の意を表わします。

## 付 録

本文の式 (18) に現われる Bessel 関数の微分形を以下に示す。

$$\frac{\partial}{\partial x} J_0(kr) = -k \frac{x}{r} J_1(kr)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} J_0(kr) = -k \frac{y}{r} J_1(kr)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} J_0(kr) = -k^2 \left\{ \frac{x^2}{r^2} J_0(kr) - \frac{x^2 - y^2}{kr^3} J_1(kr) \right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} J_0(kr) = -k^2 \left\{ \frac{y^2}{r^2} J_0(kr) + \frac{x^2 - y^2}{kr^3} J_1(kr) \right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} J_0(kr) = k^2 \frac{xy}{r^2} J_2(kr)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} J_0(kr) = k^3 \frac{x}{r} \left\{ \frac{x^2}{r^2} J_1(kr) - \frac{x^2 - 3y^2}{kr^3} J_2(kr) \right\}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} J_0(kr) = k^3 \frac{y}{r} \left\{ \frac{x^2}{r^2} J_1(kr) - \frac{3x^2 - y^2}{kr^3} J_2(kr) \right\}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} J_0(kr) = k^3 \frac{x}{r} \left\{ \frac{y^2}{r^2} J_1(kr) + \frac{x^2 - 3y^2}{kr^3} J_2(kr) \right\}$$

## 参 考 文 献

- 1) 本多弘吉：地震波動，岩波書店，pp.47~63，1954.
- 2) Ewing, W.M., Jardetzky, W.S. and Press, F. : Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, pp. 24~73, 1957.
- 3) 松岡 理・八幡夏恵子：三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用—その2，その3，日本建築学会論文報告集，第293号，pp.35~44，1980，第298号，pp.43~53，1980.
- 4) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性体内部の調

和型点加振力による変位の解析，建設工学研究所報告，第24号，pp.33~54，1982.

- 5) Luco, J.E. and Aspel, R.J. : On the green's functions for a layered half-space—Part I, Part II, Bull. Seism. Soc. Amer., Vol.73, pp.909~929, pp.931~951, 1983.
- 6) Kausel, E. and Roëssel, J.M. : Stiffness matrices for layered soils, Bull. Seism. Soc. Amer., Vol.71, pp.1743~1761, 1981.
- 7) 松岡 理・八幡夏恵子：三次元均質等方弾性体の基本解とその応用—その4，日本建築学会論文報告集，第330号，pp.48~54，1983.
- 8) Haskell, N.A. : The dispersion of surface waves in multilayered media, Bull. Seism. Soc. Amer., Vol.43, pp.17~43, 1953.
- 9) 北村泰寿・桜井春輔・陳 徳生：二層弾性体表面の点加振力による表面変位の数値解析，建設工学研究所報告，第22号，pp.145~166，1980.
- 10) 北村泰寿・桜井春輔：弾性地盤上の構造物の動的解析における地盤の柔性マトリックス，土木学会論文報告集，第341号，pp.119~127，1984.
- 11) Savidis, S.A. and Richter, T. : Dynamic response of elastic plates on the surface of the half-space, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol.3, pp.245~254, 1979.
- 12) 小林俊夫：Green 関数の離散化手法を用いた建屋と地盤の動的相互作用の研究，日本建築学会論文報告集，第302号，pp.21~27，1981.
- 13) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有：成層構造をもつ基礎地盤の動特性，京大防災研究所年報，第19号B，pp.167~217，1976.
- 14) 成岡昌夫・遠田良喜：伝達マトリックス法（コンピュータによる構造工学講座 I-2-B），培風館，pp.1~44，1970.
- 15) 野邑雄吉：技術者のための特殊関数とその応用，日刊工業新聞社，pp.308~309，1962.
- 16) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性体内部における加振問題の解析，第6回日本地震工学シンポジウム，pp.1609~1616，1982.
- 17) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限体内部の球状加振力による変位の解析，第17回地震工学研究発表会，pp.17~20，1983.
- 18) Takatani, T., Kitamura, Y. and Sakurai, S. : Vibrations of a semi-infinite elastic medium due to buried sources, Proc. 8th World Conf. Earthq. Engrg., San Francisco, U.S.A., 1984.

(1984.3.14・受付)