

鋼圧縮部材の連成座屈挙動の理論的研究

THEORETICAL STUDY ON THE INTERACTION BUCKLING
BEHAVIOR OF STEEL COMPRESSION MEMBERS

宇佐美 勉*・土屋信洋**・福本 昉士***

By Tsutomu USAMI, Nobuhiro TSUCHIYA and Yhushi FUKUMOTO

A theoretical study is presented on the local and overall interaction buckling behavior of steel compression members. The analysis begins with constructing moment-thrust-curvature curves ($M-P-\Phi$ curves) of locally buckled stub-columns with residual stresses and initial plate deflections, and proceeds to integrating, along the member axis, the $M-P-\Phi$ relations to obtain the overall load-deformation characteristics of compression members. The effect of initial member deflection is allowed for in the integration procedures. The present paper outlines numerical procedures for the latter half of the analysis. The numerical results are first compared with available test results of eccentrically loaded box columns and then utilized to check the adequacy of the design formulas proposed in previous papers.

1. 緒 言

著者らは数年前より幅厚比が比較的大きい鋼圧縮部材の局部座屈と全体座屈の連成強度に関する実験的研究を行ってきた^{1)~3)}。さらに、文献2)では有効幅の概念⁴⁾を用いた変形挙動の解析方法を示した。しかしながら、この方法では、幅厚比が比較的小さく、局部座屈に比べ残留応力による曲げ剛性の低下の方が大きいと考えられる部材の挙動を精確に解析することができず、また最高荷重後の変形挙動も求めることができなかった。

本論文は幅厚比が任意の大きさの箱形断面圧縮部材の変形特性を最高荷重後の挙動も含め解析できる手法を提示し、数値計算結果を著者らの実験結果²⁾と比較・検討を行い、さらにパラメトリック解析を行うことにより、著者らが提案している^{2),3)}設計式の妥当性を理論的な面から検証しようとするものである。解析手法は基本的には Little⁵⁾によって提案された方法に従っており、局部座屈を考慮して求めた短柱のモーメント-軸方向圧縮力-曲率関係(軸方向圧縮力 P が一定のときのモーメント-曲率関係で、 $M-P-\Phi$ 曲線と称する)を部材の長さ方向

に積分することにより、部材の荷重-変形挙動を解析しようとするものである。Littleの用いた $M-P-\Phi$ 曲線は単独板要素の弾塑性有限変位解析から得られた平均応力-平均ひずみ関係を材料の応力-ひずみ関係とみなして求めた近似的なものであるが、この論文では残留応力および初期たわみを同時に考慮した箱形断面短柱の弾塑性有限変位解析^{6),7)}から求められた精確な $M-P-\Phi$ 曲線を使用している。また、 $M-P-\Phi$ 曲線を積分する手法として Little は差分法を用いているが、この論文では差分法より精度のよい有限積分法^{8),9)}を適用することにより、Littleの論文では触れられていない最高荷重後の変形も解析できる方法について述べている。

2. 箱形断面短柱の $M-P-\Phi$ 曲線の解析方法

短柱の $M-P-\Phi$ 曲線の解析方法については文献6),7)で詳述したので、ここではその概要についてののみ述べる。解析手法は Kirchhoff の薄板の仮定および Von Karman のひずみ-変位関係式をもとにした有限変位理論¹⁰⁾を用い、構成式は完全弾塑性体の仮定による Von Mises の降伏条件と Prandtl-Reuss の塑性流れ理論を用いている。定式化は三角形平板要素を用い、板の曲げ変形に対しては Herrmann の原理に基づく混合法¹²⁾、面内変形に関しては定ひずみモデルによる変位法を混用

* 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科
(〒464 名古屋市千種区不老町)

** 正会員 工修 清水建設土木本部 技術部

*** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

し、移動座標法による有限要素解析を行っている。解析には溶接残留応力および構成板要素の初期たわみを考慮している。箱形断面短柱の $M-P-\Phi$ 曲線を求めるため、部材両端に断面の高さ方向（ウェブ幅方向）に直線的に変化する強制軸方向変位を与え、これによって生ずる部材端部の反力より計算される軸方向圧縮力が所定の値 P になるまで強制変位を修正させる。そして収束したときの状態の反力から端部モーメント M 、強制変位の勾配から平均曲率 Φ を求め、強制変位量を漸次増加させることにより P が一定のときの M と Φ の関係を計算している。 $M-P-\Phi$ 曲線の具体的な形は後述 (Fig. 6, 9) するが、局部座屈の影響で負の剛性をもつ部分が存在し、同一のモーメント M に対し 2 つの曲率が存在する領域がある。したがって、数値計算はこの点に対処できる方法である必要がある。

3. はり-柱の変形挙動解析

与えられた $M-P-\Phi$ 曲線から荷重面内変形を受けるはり-柱 (Beam-Column) の有限変位挙動を解析する手法について述べる。解析方法としては、差分法、有限積分法のほかに、CDC 法 (Column Deflection Curve Method), CCC 法 (Column Curvature Curve Method), 有限要素法などがある¹³⁾。CDC 法および CCC 法は与えられた曲げモーメントから曲率を $M-P-\Phi$ 曲線より読み取る必要があるが、前述のように、同一の曲げモーメントに対して 2 つの曲率が存在する本解析の場合には不向きである。有限要素法は汎用性において優れているものの、 $M-P-\Phi$ 関係のほかに断面重心点のひずみ ϵ_c を加えた $M-P-\Phi-\epsilon_c$ 関係が必要となり、入力データが多くなるとともに、後述のように、入力データからの補間に時間がかかる。

この論文で用いた有限積分法^{8),9)}は、部材の分割点の曲率を未知量にとり、たわみ、たわみ角をシンプソン公式によって曲率と結びつけ、つり合いの微分方程式を曲率に関する連立一次方程式に変換して解く方法である。解析の対象は、Fig. 1 に示す (a) 不等偏心圧縮柱および (b) 一定軸方向圧縮力 (以下軸力とよぶ) のもつで

不等端モーメントを受ける柱である。初期不整は部材全体の初期たわみを考える。柱の両端はいずれの場合も単純支持で、 x, y 座標を図のようにとり、柱の全長を L 、偏心量を左端で e 、右端で κe (ただし、 κ は偏心比で $-1 \leq \kappa \leq 1$ とする)、端モーメントを左端で M_0 、右端で κM_0 ($-1 \leq \kappa \leq 1$)、初期たわみを $v_0(x)$ 、付加たわみを $v(x)$ とする。以下の定式化では (a) の不等偏心圧縮柱のみを考えるが、(b) のはり-柱に対する定式化も簡単な変更のみで容易に行える。

(1) 接線剛性方程式の誘導

左端から距離 x の断面 (x 断面) における $x-y$ 面内変形に対するつり合い式はその点における内力モーメントと外力モーメントを等しく置くことにより次式で表わされる。

$$M(P, \Phi(x)) - P\{v(x) + \beta(x)\} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $\beta(x)$ は荷重増分に関して不変な量で、

$$\beta(x) = v_0(x) + e\{1 + (\kappa - 1)x/L\} \dots\dots\dots (2)$$

と定義され、 $M(P, \Phi(x))$ は x 断面における曲率 $\Phi(x)$ と P を $M-P-\Phi$ 関係に代入して求めた内力モーメントである。いま、ある荷重状態でつり合い状態にある部材を長さ方向に n 等分割し (Fig. 1 (a))、各分割点 i ($i=1 \sim n+1$) において式 (1) を求めれば次式を得る。

$$M(P, \Phi) - P(v + \beta) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 M, Φ, v, β は、それぞれ、分割点における $M(P, \Phi(x)), \Phi(x), v(x), \beta(x)$ を集めた $(n+1)$ 次ベクトルである。たわみベクトル v は Appendix に示すように、有限積分法の手法により次式で表わされる。

$$v = N_2 \cdot \Phi \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 N_2 は式 (A.6) で定義される $(n+1)$ 次の正方行列である。式 (4) の v を式 (3) に代入した式は曲率ベクトル Φ に関する $(n+1)$ 次の非線形方程式とみなせるので、Newton-Raphson 法の考えを用いて解く。いま、軸力 P_A 時の曲率 Φ_A が既知であると、軸力を P_B に変化させたとき、曲率は $\Phi_A + \Delta\Phi$ に変化したとする。ここに、 $\Delta\Phi$ は未知の曲率増分ベクトルである。 $P = P_B, \Phi = \Phi_A + \Delta\Phi$ を式 (3), (4) から v を消去した式に代入し、

$$M(P_B, \Phi_A + \Delta\Phi) \equiv M_A(P_B, \Phi_A) + B_A(P_B, \Phi_A) \cdot \Delta\Phi \dots\dots\dots (5)$$

と近似すれば、次式を得る。

$$(B_A - P_B N_2) \cdot \Delta\Phi = P_B (N_2 \cdot \Phi_A + \beta) - M_A \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $M_A(P_B, \Phi_A)$ は $P = P_B, \Phi = \Phi_A$ のときの内力ベクトル、 $B_A(P_B, \Phi_A)$ は $P = P_B, \Phi = \Phi_A$ のときの $M-P-\Phi$ 曲線の勾配 $B \equiv \partial M / \partial \Phi$ を対角項とする $(n+1)$ 次の対角行列である。式 (6) が本解析で用いられる増分形のつり合い方程式であり、“接線剛性方程式”とよび、 $\Delta\Phi$ の係数行列 $B_A - P_B N_2$ を“接線剛性行列”とよぶ。

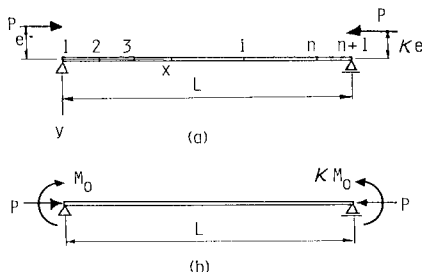


Fig. 1 Beam-Columns to be Analysed.

(2) 数値計算方法

a) 内力モーメント M_A , 接線剛度 B_A の計算方法

M - P - Φ 関係は、後述 (Fig.6) のように、数種の軸力 P の値に対するモーメント M と曲率 Φ の関係が与えられ、また、それらの関係は離散値として入力される。したがって、任意の与えられた軸力 P および曲率 Φ に対応するモーメント M , 勾配 (接線曲げ剛度) $B = \partial M / \partial \Phi$ は補間法を用いて求めた。まず、入力データとして与えられた P に対する M - P - Φ 関係を5次のB-スプライン関数¹⁴⁾ (両端部は6重の節点とする) で表わす (以下、 Φ 方向補間とよぶ)。したがって、与えられた曲率 Φ に対する M , $\partial M / \partial \Phi$ は容易に求められる。次に入力データとして与えられていない軸力 P^* に対する M および $\partial M / \partial \Phi$ は、 Φ =一定の線上で P^* をはさむ2つの与えられた軸力の間で直線補間 (P 方向補間とよぶ) を行って求めた。

b) 接線剛性方程式の解法

式 (6) の方程式を次の手順で解く。ただし、 P_A , Φ_A を既知として軸力を P_B まで増分したときの曲率 Φ を求めるものとする。式 (6) を $\Delta \Phi$ について解くことにより得られる曲率増分を $\Delta \Phi_1$ とし、曲率の第1近似値 $\Phi_1 = \Phi_A + \Delta \Phi_1$ を求める。次に、 Φ_A を Φ_1 に置き換えることにより式 (6) の接線剛性行列および右辺項を再評価し、式 (6) を再び $\Delta \Phi$ について解くことにより Φ_1 の補正值 $\Delta \Phi_2$ を求め、 Φ の第2近似値 $\Phi_2 = \Phi_1 + \Delta \Phi_2$ を求める。以下、同様の操作を繰り返し、 k 番目の繰り返し計算で得られる補正值 $\Delta \Phi_k$ のユークリッドノルム $\|\Delta \Phi_k\|$ が $10^{-5} \cdot \max(\Phi_y, \|\Phi_{k-1}\|)$ 以下になったときに解は収束したものとみなし、 Φ_k を P_B に対応する曲率ベクトル Φ とする。ここに Φ_y は降伏曲率である。また、たわみ v は式 (4) より求めることができる。

以上の計算を単調に増大する軸力 P に対して進めてゆくと、 P が最高荷重の上方面にくると解は発散する。このとき、以下の操作を行い、最高荷重近辺およびそれ以降の解析を行う (Fig.2)。

① 毎回の繰り返し計算ごとに式 (6) の接線剛性行列の正定値性を調べる。これは次の方法により簡単に調

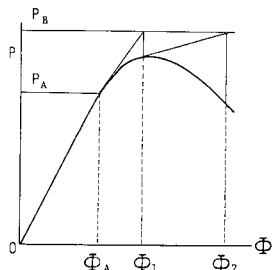


Fig.2 Newton-Raphson Scheme near the Maximum Load.

べることができる¹⁵⁾。いま、 k 回目の繰り返し計算を終了し、 Φ_k , $\Delta \Phi_k$ が既知であるとすれば、このときの接線剛性行列の正定値性は式 (6) の右辺に $\Phi_A = \Phi_k$ を代入し、左から $\Delta \Phi_k^T$ (T は転置行列を表わす) を乗じた式

$$\Delta \Phi_k^T \cdot \{P_B(N_2 \cdot \Phi_k + \beta) - M_A(P_B, \Phi_k)\} \dots \dots \dots (7)$$

の値の正負によって判別できる。すなわち、正であれば正定値、負であれば負定値、零であれば半正定値である。これは、上記の操作を行うことにより、式 (6) の左辺が $\Delta \Phi_k^T \cdot (B_A - P_B N_2) \cdot \Delta \Phi_k$ となることから容易にわかる。

② 繰り返し計算の途中でもし接線剛性行列が初めて正定値でない判定されたときは、荷重 P_B が最高荷重の上方に位置するとみなすことができる。Fig.2 のときは、 $k=2$ のとき、接線剛性行列が負定値となる。このときは P_A のつり合い状態に戻り荷重増分を今までの値の1/10にする。

③ 上の操作を2度まで行い、荷重増分を初期の荷重増分の1/100まで低下させる。

④ 接線剛性行列が3度正定値でない判定されたときは軸力 P_A を最高荷重とみなし、それ以降、荷重増分を負にする。初めて荷重減少を行うとき、 Φ の初期値 Φ_A は、変形が減少する方向の解 (すなわち右上りの荷重-変形曲線に戻る解) に収束しないように、強制的に右下がりの荷重-変形曲線上に移動させる必要がある。そのため、試行錯誤的に得られた次式を用いる。

$$\Phi_A = C \cdot \Phi^* \dots \dots \dots (8)$$

ここに、 Φ^* = 接線剛性行列が3度目に正定値でない判定されたときの曲率 Φ , $C = \Phi^*$ の増幅係数を表わす ($n+1$) 次の対角行列で、その i 行目の要素 C_i は、

$$C_i = 0.05(n+1) |\Phi_i^*| / \sum_{j=1}^{n+1} |\Phi_j^*| + 1.0 \dots \dots \dots (9)$$

で表わされる。上式中、 $|\Phi_i^*|$ は Φ^* の i 番目の要素の絶対値である。式 (9) は部材の平均曲率 $\sum |\Phi_i^*| / (n+1)$ で正規化した各分割点の曲率の5%増を割増し係数 C_i とすることを示す。なお、初期の荷重増分は予想最高荷重の5%程度を与えた。

c) 計算式の無次元化

実際の計算では、上記の計算はすべて無次元化して行っている。無次元化のために M - P - Φ 関係に対して次式の諸量を導入した。

$$m = M / M_y, p = P / P_y, \varphi = \Phi / \Phi_y \dots \dots \dots (10)$$

ここに、 M_y = 局部座屈のないときの降伏モーメント、 P_y = 全断面降伏軸荷重、 $\Phi_y = M_y$ に対応する曲率 (降伏曲率) である。

d) 弾性除荷の取り扱い

はり-柱では、耐荷力を越えた後、荷重が低下するため、たわみによる付加モーメントが小さい領域では外力モー

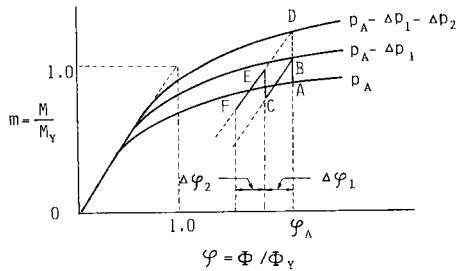


Fig. 3 Unloading Process.

メントが減少し、曲げモーメントの除荷（弾性除荷）が起こる。局部座屈の影響がなく、軸力が一定のときは、曲げモーメントは弾性領域における $m-p-\phi$ 曲線の勾配（すなわち 1:1）で減少すると考えられるが、軸力が変化する場合および局部座屈の影響があるときはどのような経路をたどるかが明らかではない。本論文で取り扱っているような荷重状態では弾性除荷の影響は小さい¹⁶⁾と考えられるが、ここでは、次のような近似的な取り扱いをして対処する。いま、Fig. 3 の A 点がつり合い状態にある部材のある断面の荷重、変形状態を表わす点とする。ここから除荷に入り、軸力が $p_A - \Delta p_1$ 、曲率が $\phi_A - \Delta \phi_1$ と減少したときは、まず曲率が変化しないと仮定して B 点の状態に移り、その点から弾性域での傾き（すなわち、1:1）の直線 BC 上を C 点まで移動するものとする。次に、C 点から再び除荷が起こり軸力がさらに Δp_2 、曲率が $\Delta \phi_2$ だけ減少したときは、D 点 ($\phi = \phi_A$ と $p_A - \Delta p_1 - \Delta p_2$ に対応する $m-\phi$ 曲線の交点) から BC に平行に引いた直線上の E 点にまず移り、その点から F 点まで移動するものとする。上記の仮定により除荷が最初に生ずる点の曲率 ϕ_A のみを記憶することにより除荷の影響を含めた近似的解法が可能となる。

4. 数値計算結果および考察

(1) 局部座屈のない場合の既往の結果との比較

本計算に先立ち、前節の数値計算手法の妥当性を調べるため、精解値が知られている長方形断面部材を用いて予備計算を実施した。長方形断面に対する m 、 p と ϕ の関係は周知¹³⁾であるので、③公式を直接使う方法（公式法と称する）、および⑥ $m-p-\phi$ 関係を離散化データとして計算機に入力し、前述の補間法を使う方法（補間法と称する）の 2 つの方法を用いた。後者の場合には、 $p \equiv P/P_y$ を 0.0 から 0.9 まで 0.1 きざみで増分させ、おのおの p の値に対して $\phi \equiv \Phi/\Phi_y$ を 0.0 から 5.0 まで 0.05 きざみごとに増分させて $m \equiv M/M_y$ の値を入力した。検証に用いた問題は 4 つの問題で、問題 1 は文献 17) p. 182 の初期たわみを有する中心軸圧縮柱、問題 2

～4 は文献 13) p. 306 の不等偏心圧縮柱 ($x=0.5$) であり、偏心量 e/r は、それぞれ、0.0577, 0.577, 2.89 である。ここに r は断面の座屈軸に関する断面二次半径である。その他の入力データは、問題 1 に対して、弾性係数 $E=205$ GPa, 降伏応力 $\sigma_y=250$ MPa, 細長比 $L/r=86.6$, 最大初期たわみ $\delta_0/d=0.012$ (d =断面の高さ) であり、問題 2～4 に対して、 $E=200$ GPa, $\sigma_y=228$ MPa, $L/r=103.9$ で初期たわみは零である。

まず、分割数 n の変化による解の収束状態を $n=2 \sim 30$ と変化させて調べた。その結果、全問題とも、 $n=6$ で相対誤差が 0.5% 以下、 $n=10$ でほとんど文献の解に一致した。ただし、 $m-p-\phi$ 関係は公式法によっている。このように、少ない分割数で十分精度のよい解を得ることがわかったが、分割数が少ないと最高荷重後の数値計算が不安定になる場合が発生したこと、および、偏心比 x が 0.5 以下の解析も同一の分割数で行うことから、以後の計算では $n=30$ を用いた。Fig. 4 は 4 つの問題の荷重-変形曲線を文献の解と比較したものである。ここで、 $\delta = v(L/2)$, $\delta_0 = v_0(L/2)$, θ_0 = 左端のたわみ角である。図より、本解析結果は変形の全域にわたって既往の解と非常によく一致することがわかる。次に補間法によって生ずると考えられる誤差について調べる。 Φ 方向補間は十分の数のデータを入力、スプライン補間を行っているため誤差は小さいと考えられるため、 P 方向補間によって生ずると考えられる誤差について調べる。そのために、問題 1 の中心軸圧縮柱の細長比のみを種々変化させ、公式法および補間法の両方法によって最高荷重を求め、公式法による解 ($p_{max,exact}$) を正解値とみ

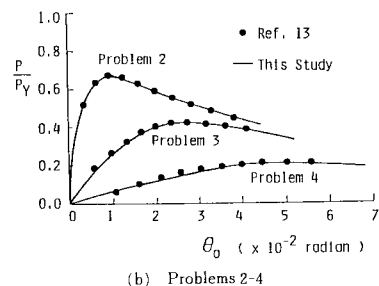
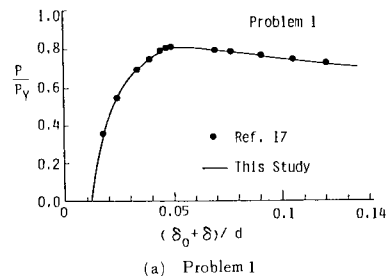


Fig. 4 Comparisons of Load-Deformation Curves.

なし、補間法による解 (p_{max}) の相対誤差 $= (p_{max} - p_{max,exact}) / p_{max,exact}$ を縦軸に、 p_{max} が、入力データとして与えられる2つの最近接軸力 p_1, p_2 (ただし、 $p_1 \leq p_{max} \leq p_2$) のどの位置にあるかを示す量 $10 \times (p_{max} - p_1)$ を横軸にとって Fig. 5 に示す。軸力 p は0.1きざみごとに入力しているため、横軸が0.0のとき $p_{max} = p_1$ 、1.0のとき $p_{max} = p_1 + 0.1 = p_2$ に一致する。この図より次のことがわかる：①誤差は最高荷重が大きくなるほど、すなわち短い柱ほど大きくなる。これは、 $m-p-\phi$ 関係のデータを軸力 p に対し0.1きざみで入力しているため、 p が大きくなるにつれて同じ曲率に対するモーメント m の間隔が大きくなるからである；②誤差は最高荷重がそれをささむ2つの軸力 p_1, p_2 の領域に占める位置によっても変化し、概略、中間の位置で誤差は最大となる；③補間法による解は正解値よりもほとんどの場合小さくなる。これは①と同じ理由による。以上の結果より、長さが極端に短い柱を除いては誤差が2%程度以下に納まり、しかも小さめ(安全側)の解が得られることから、軸力 p を0.1きざみごとに与えた本解析法で、工学的に十分信頼できる解が得られると思われる。

(2) 偏心圧縮箱形断面柱の実験結果との比較

著者らが行った²⁾11体の等偏心圧縮箱形断面柱の実験結果と本解析結果を比較する。実験はSM 58相当材よりなる正方形箱形および長方形箱形(高さ/幅 $\equiv d/b = 0.75$)断面で、細長比は40と65、偏心量は $r/4$ および $r/2$ である。フランジ板の幅厚比 b/t は29, 44, 58の3種類である。長柱の解析に先だち、短柱の $M-P-\phi$ 曲線をまず求めた^{6),7)}。短柱の材料定数、断面構成、残留応力、板要素の初期たわみは Table 1 にまとめている。アスペクト比 l/b は短柱の長さと同フランジ幅の比で、軸力と曲げの種々の組合せ荷重のもとで強度がほぼ最低になるように定めた。 R_f は次式で定義されるフランジ板の座屈パラメーター(等価幅厚比)である。

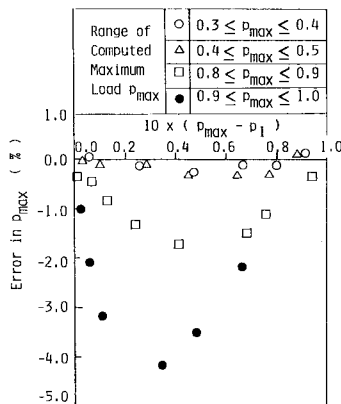


Fig. 5 Distribution of Errors.

Table 1 Input Data for Stub Box Column Analysis in Fig. 6.

Material	SM 58
Young's Modulus E	210 GPa
Yield Stress σ_Y	568 MPa
Plate Thickness t	4.5 mm
Poisson's Ratio ν	0.3
Depth/Breadth d/b	0.75 and 1.0
Aspect Ratio l/b	0.7
Width-thickness Ratio of Flange Plate b/t (R_f)	29, 44, and 58 (0.79, 1.20, and 1.59)
Residual Stress σ_{rc} / σ_Y	0.3, 0.2, and 0.15 for b/t = 29, 44, and 58, respectively
Initial Plate Deflection $\Delta_f / b = \Delta_w / d$	1/400

Note: l = Stub column length; R_f = Flange plate buckling parameter (Eq.11); σ_{rc} = Compressive residual stress; Δ_f = Maximum flange plate initial deflection; Δ_w = Maximum web plate initial deflection.

$$R_f = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E} \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 k}} \dots \dots \dots (11)$$

ここで、 ν = ポアソン比、 k = 座屈係数で4.0を用いた。 σ_{rc} は圧縮残留応力の値で実測値を丸めたものである。残留応力の分布形は矩形分布形⁹⁾を仮定した。 Δ_f および Δ_w はそれぞれフランジ板、ウェブ板の中央の最大初期たわみであり、形状は板要素の幅、長さ方向とも半波の余弦曲線を仮定した。これらのデータを用い、軸力 p を0.1きざみごとに与えて計算した短柱の $m-p-\phi$ 曲線の一部を Fig. 6 に示す。いずれの場合も局部座屈の影響で右下がりの部分が存在することがわかる。これらの関係は $\phi = \Phi / \Phi_Y$ について約0.025のきざみで離散値デー

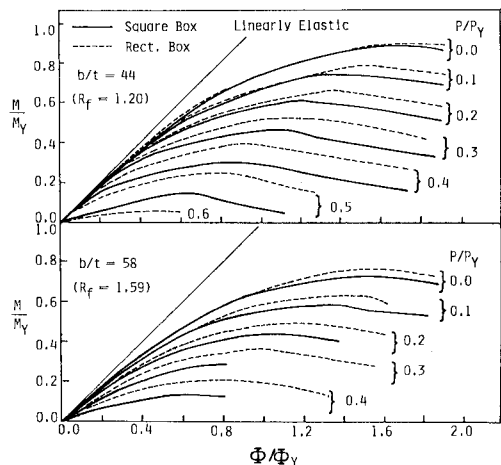


Fig. 6 $M-P-\phi$ Curves of Box Column Segments in Table 1.

タとして計算機に入力した。

Fig. 6 の $m-p-\phi$ 曲線をもとに 11 体の偏心圧縮柱の荷重-変形挙動を解析した。部材の最大初期たわみの大きさは実測値²⁾とし、初期たわみ形状は半波の正弦関数を仮定した。解析結果の一部を縦軸に平均応力 $\sigma_a (= P/A)$ 、横軸に部材長で無次元化した柱中央の全たわみ $(\delta + \delta_0)/L$ でプロットし、Fig. 7 に示す。ここで、 A は全断面積である。試験体番号の最初の英字の ER は長方形箱形断面であることを表わし、次の数値は細長比、2 番目の数値はフランジ幅厚比、最後の e_1 または e_2 はそれぞれ偏心量が $r/4$ または $r/2$ であることを示す。同図中には文献 2) で示した実験結果および有効幅理論による解もプロットしてある。また、Fig. 8 は本解析法、

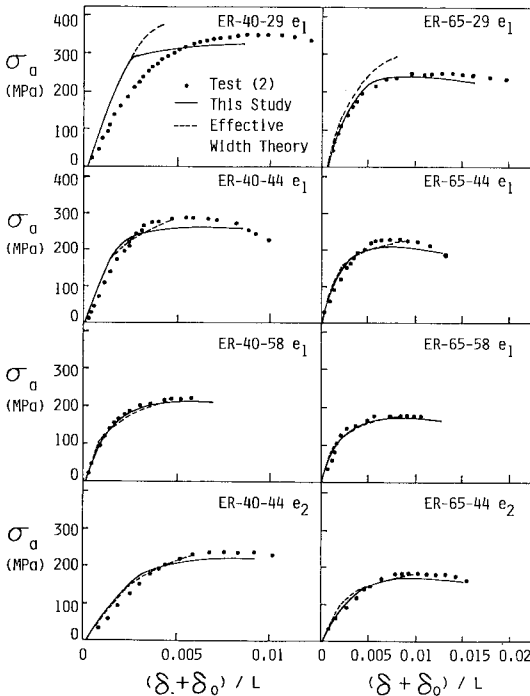


Fig. 7 Comparisons of Load-Deflection Curves.

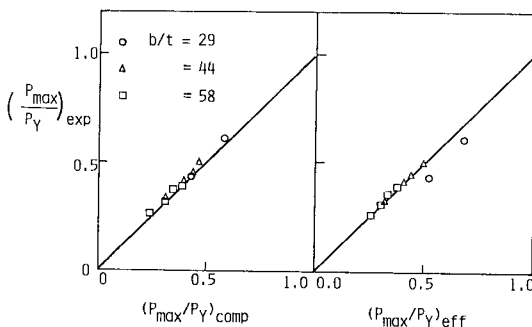


Fig. 8 Comparisons of Maximum Loads.

有効幅理論、および実験によって得られた最高荷重 (それぞれ $(P_{\max}/P_Y)_{\text{comp}}$, $(P_{\max}/P_Y)_{\text{eff}}$, $(P_{\max}/P_Y)_{\text{exp}}$ と記す) を比較して示したものである。これらの図よりわかるように、本解析法によって得られた結果は、全体的に多少低い最高荷重を与えるが、荷重-変形曲線は実験値と良好な一致を示している。有効幅理論による計算では幅厚比が 29 の部材 (ER-40-29 e_1 および ER-65-29 e_1) の強度を大幅に上回る結果を得ることは前述したが、本解析法ではほぼ満足すべき結果を得ている。

5. 設計公式の検討

著者らが文献 1)~3) で提案してきた局部座屈を考慮した中心軸圧縮柱および軸力と 1 軸曲げを受ける部材の設計強度式と数値計算から得られた強度との比較を行い、設計式の妥当性を検証する。

(1) 提案設計公式

フランジ幅 b 、ウェブ幅 d 、フランジ厚 t 、ウェブ厚 w の箱形断面を考え、設計公式を多少の修正を加え再録する。

① 次式より降伏応力の低減係数 Q を求める。

$$Q = 0.7/R \leq 1.0 \dots\dots\dots (12)$$

ここに R は次に示す R_f と R_w の小さい方の値とする。

$$R_f = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E} \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 \cdot 4}} \dots\dots\dots (13)$$

$$R_w = \frac{d}{w} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E} \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 \cdot 4}} \dots\dots\dots (14)$$

② 中心軸圧縮柱の強度 P_u は次式より求める。

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_u}{QP_Y} &= 1.0 & (\bar{\lambda} \leq 0.2) \\ &= 1.109 - 0.545 \bar{\lambda}' & (0.2 \leq \bar{\lambda}' \leq 1.0) \\ &= \frac{1}{0.773 + \bar{\lambda}'^2} & (\bar{\lambda}' \geq 1.0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、

$$\bar{\lambda}' = \sqrt{Q} \bar{\lambda}, \quad \bar{\lambda} = \frac{L}{r} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}} \dots\dots\dots (16_{a,b})$$

③ 両端に軸方向圧縮力 P と 1 軸曲げ M_0 , αM_0 (ただし、 $-1 \leq \alpha \leq 1$) を受けるはり-柱 (Fig. 1 (b)) は次式を満足するように設計する。

$$\frac{P}{P_u} + \frac{M_0 C_m}{M_u (1 - P/P_E)} \leq 1.0 \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{P}{QP_Y} + \frac{M_0}{M_u} \leq 1.0 \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 $P_E =$ オイラー座屈荷重、

$$\frac{M_u}{M_Y} = \frac{(2 + 3/\alpha)(0.7/R_f) + 2 + \alpha}{4 + \alpha + 3/\alpha} \leq 1.0 \dots\dots\dots (19)$$

$$\alpha = \frac{d \cdot w}{b \cdot t} \dots\dots\dots (20)$$

$$C_m = 0.6 + 0.4\alpha \geq 0.4 \dots\dots\dots (21)$$

式 (12) の Q は短柱実験から得られた経験式であり、式 (15) は $Q=1.0$ すなわち局部座屈の影響がないとき現行道路橋示方書¹⁸⁾の式に一致する。式 (17), (18) はそれぞれ部材全体の安定照査, 局部座屈照査式である。文献3)では道路橋示方書¹⁸⁾に準じ、式 (18) 右辺第2項の分母は $M_u(1-P/P_E)$ として設計式を提案したが、この式は本来、部材左端での局部座屈強度の照査式(局部座屈が生じないときは断面の降伏照査)であるから $1-P/P_E$ を分母に含めるのは疑問と思われるので、今回の提案ではこの係数を削除した。式 (18) の照査式の妥当性は文献7)で詳細に調べてある。

(2) 解析に用いるデータ

Table 2 Input Data for Box Column Analysis.

Young's Modulus E	205 GPa
Yield Stress σ_Y	350 MPa
Plate Thickness t	4.5 mm
Poisson's Ratio ν	0.3
Cross Section	Square Box ($b = d$)
Aspect Ratio L/b	0.7
Width-thickness Ratio b/t	30, 40, 60
(R_f)	(0.652, 0.868, 1.302)
Residual Stress σ_{rc}/σ_Y	0.3
Initial Plate Deflection $\Delta_f/b = \Delta_w/b$	1/250
Initial Column Deflection δ_o/L	1/1000

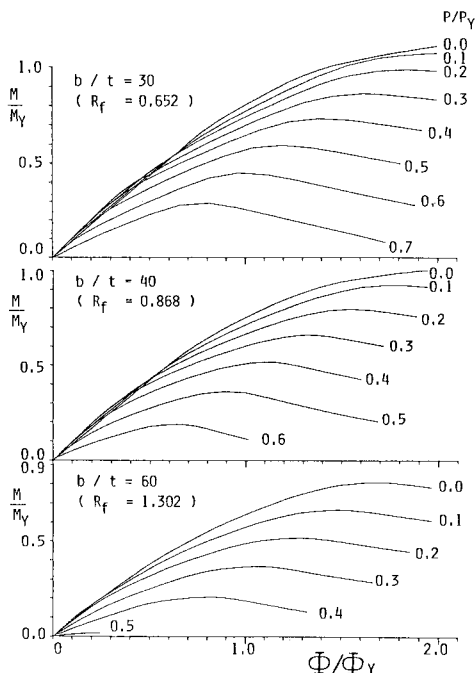


Fig. 9 $M-P-\phi$ Curves of Box Column Segments in Table 2.

解析には3種類の幅厚比をもつ等厚正方形箱断面を用い、それらの材料定数, 初期不整量は Table 2 に示すとおりである。板要素最大初期たわみ量は $b/250$ で道路橋示方書の許容量値 $b/150$ より小さいが、この程度の差は強度にはほとんど影響を与えない⁷⁾。また、部材軸線の初期たわみは道路橋示方書の許容値, 残留応力はほぼ上限値を仮定している。したがって、解析から得られる強度はほぼ下界値となると考えられる。Table 2 のデータを用いて計算した3種類の正方形箱断面短柱の $m-p-\phi$ 曲線を Fig. 9 に示す。なお、はり-柱の計算は、Fig. 1 (b) に示す、一定軸力と漸増モーメントを受ける部材として解析した。

(3) 数値計算結果および考察

a) 中心軸圧縮柱

中心軸圧縮柱に対する数値計算結果を式 (15) の提案式と比較して Fig. 10 に示す。図の ●▲■ は式 (12) の低減係数 Q を用いて整理した計算値, ○△□ は中心軸

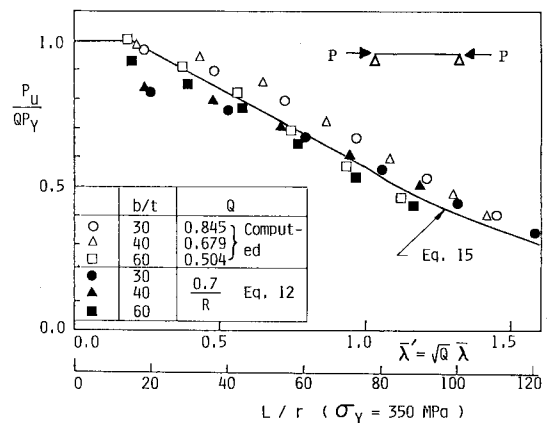


Fig. 10 Centrally Loaded Columns-Comparison of Computed Maximum Loads and Design Formula (Eq. 15).

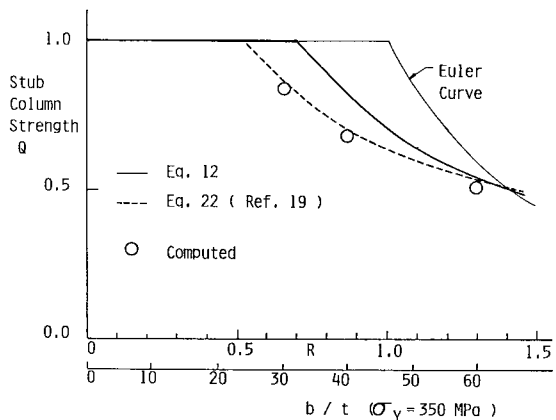


Fig. 11 Comparison of Computed and Predicted Stub-Column Strengths.

圧縮短柱の数値計算結果から得られた短柱強度を低減係数として整理した計算値である。式(12)とこの計算値との比較は Fig. 11 に示してある。これらの図より次のことがわかる。数値計算より得られた短柱強度を低減係数 Q に用いて整理した結果は、2, 3 の場合を除いて式(15)の推定強度を上回る。一方、式(12)を低減係数として整理した結果は、式(15)の強度を下回る場合がより多くなり、特に、修正細長比 $\bar{\lambda}$ が 0.25 以下の短い柱では最大 15% 推定強度を下回る。これは Fig. 11 からわかるように、式(12)は数値計算より求められた短柱強度を特に幅厚比の小さい領域で大幅に上回ることが原因である。式(12)は実験より求められた平均曲線であるのに対し、数値計算より得られた短柱強度は下界値に相当することからこの差が生じてきている。以上のように式(12)を低減係数 Q の算定式とすれば危険側になる部分もあるが、以下の理由により式(12)は妥当な式と考えてもよいと思われる：①実用的と考えられる細長比の領域 ($L/r \geq 30$) の計算値は式(15)の設計式と数%以内の誤差で一致する；②数値計算はおのこの初期不整には最悪と思われる条件を仮定して行われているが、実際には最悪の初期不整が同時に生起する確率は非常に小さく、得られた結果は実強度の下界と考えられる；③実験より得られた長柱強度^{1),2)}は式(12), (15)で推定された強度を上回る、などである。なお、上記の事実にかかわらず、常に安全側の設計式を望む場合には、低減係数 Q の推定式として、式(12)の代わりに、三上・堂垣・米沢の提案¹⁹⁾になる

$$Q = \frac{0.638}{R^{0.7}} \leq 1.0 \dots \dots \dots (22)$$

を使用することが考えられる。この式は Fig. 11 に示すように、短柱強度の計算値とほぼ一致していることから、Fig. 10 の○△□の点にほぼ一致する結果を得る。

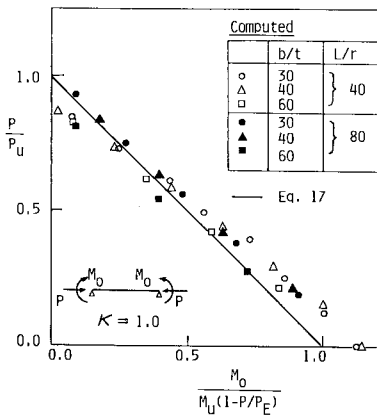


Fig. 12 Comparison of Computed Maximum Loads and Interaction Formula 17 ($\kappa=1.0$).

b) 軸方向圧縮力と1軸曲げを受けるはり-柱

軸方向圧縮力と等曲げ ($\kappa=1.0$) を受ける部材の数値計算結果を式(17)の相関式と比較して Fig. 12 に示す。この場合には式(18)は考えなくてもよい。低減係数 Q は式(12)を用い、細長比は 40, 80 の 2 種類を考えている。図からわかるように、計算値の一部は相関式(17)の下方に位置し、危険側になるものもあるが、差は小さく、式(17)は設計式として十分妥当な式であると思われる。なお、低減係数 Q として、式(22)を用いれば、ほとんどすべての計算値は相関式の上方安全側に来る。

軸方向圧縮力と不等曲げ ($\kappa < 1.0$) を受ける部材の数値計算結果を相関式と比較して Fig. 13 に示す。低減係数 Q は式(12)を用いている。上段は $\kappa=0.0$ 、下段は $\kappa=-1.0$ に対応し、細長比はいずれの場合も 80 としている。不等曲げの場合には式(17)と(18)の両方の相関式が必要で、軸力 P が大きい領域は安定照査式(17)、小さい領域は局部座屈照査式(18)に支配される。 $\kappa=-1.0$ の場合にはかなりの部分が局部座屈照査式に支配される。低減係数 Q に式(12)を用いているにもかかわらず、計算値はほとんどの場合安全側にある。 $\kappa=0.0$ の場合には、提案相関式は軸力が小さい領域を除いて非常に精度がよいが、 $\kappa=-1.0$ の場合は全般的にかなり安全側である。局部座屈がない場合にも、 $\kappa=-1.0$ に対する式(17), (18)の相関式は、式(17)に支配される部分に関してはかなり安全側になることはよく知られている²⁰⁾。

c) 曲げ強度 M_u の修正式

上述の相関式(17), (18)の曲げ強度 M_u (式(19))は、

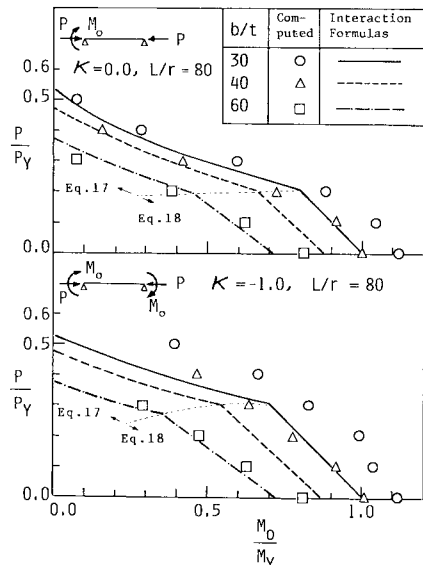


Fig. 13 Comparison of Computed Maximum Loads and Interaction Formulas 17 and 18 ($\kappa=0.0$ and -1.0).

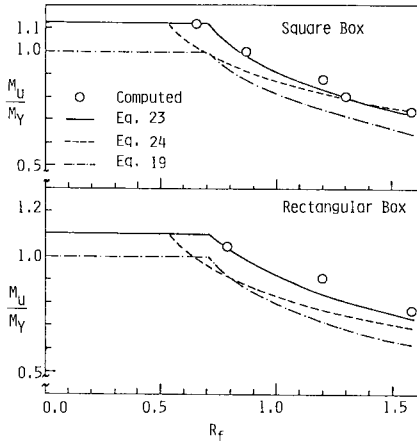


Fig. 14 Ultimate Bending Strength-Comparison of Computed Strengths and Design Formulas.

フランジ板の局部座屈の影響を有効幅理論によって近似し、フランジの応力が降伏応力に達するときに極限状態と仮定して求めた極限曲げモーメントである¹⁾。ところが、Fig. 12, 13の $P = 0$ のときの相関式と数値計算結果との比較からわかるように、式 (19) の M_u はかなり安全側にある。また、この式は、実験値に対しても安全側にあることは文献²⁾で指摘した。わが国の橋梁関係の示方書¹⁸⁾では、曲げ強度は降伏モーメントを基準に考えるのが普通であるため、これまでの考察では式 (19) を用いてきたが、もう少し精度のよい式を考えてみる。局部座屈がないときには、 M_u は全塑性モーメントに一致することより、式 (19) の降伏モーメント M_p を全塑性モーメント M_p に置き換えてみる。すなわち、

$$\frac{M_u}{M_p} = \frac{(2+3/\alpha)(0.7/R_f)+2+\alpha}{4+\alpha+3/\alpha} \leq 1.0 \dots\dots\dots(23)$$

次に、上式の $0.7/R_f$ は極限状態での圧縮フランジの有効幅である¹⁾ことから、この項を式 (22) に置き換え M_u の 2 番目の修正式を作る。

$$\frac{M_u}{M_p} = \frac{(2+3/\alpha)(0.638/R_f^{0.7})+2+\alpha}{4+\alpha+3/\alpha} \leq 1.0 \dots\dots\dots(24)$$

なお、薄肉箱形断面の M_p と M_p の間には

$$\frac{M_p}{M_p} \sim \frac{3}{2} \frac{2+\alpha}{3+\alpha} \dots\dots\dots(25)$$

の近似式が成り立つ。式 (19), (23), (24) から求められる曲げ強度 M_u を Table 1, 2 の箱形断面の数値計算結果と比較して Fig. 14 に示す。上記の簡単な置き換えによって得られた式 (23) は非常に精度のよい式になっていることがわかる。

6. 結 言

鋼箱形断面圧縮部材 (はり-柱) の局部座屈と全体座

屈の連成強度に関する理論的研究について述べた。この研究によって得られた主な結論を挙げると以下のようになる。

- (1) 短柱のモーメント-軸力-曲率曲線 ($M-P-\Phi$ 曲線) は局部座屈の影響で右下がりの領域が存在し、部材の解析はこの点に対処できる方法である必要がある。
- (2) 有限積分法^{8),9)}と Newton-Raphson 法を組み合わせた離散化手法によりはり-柱の荷重降下部を含めた有限変位挙動を精度よく解析できる。
- (3) 提案した数値解析手法は偏心圧縮を受ける薄肉箱形断面柱の実験結果²⁾とも非常によく一致する結果を与える (Fig. 7, 8)。

- (4) 先に提案した²⁾中心軸圧縮柱の強度推定式 (15) は細長比のごく小さい柱 ($L/r \leq 20$) を除いて数値計算結果とよく一致する (Fig. 10)。
- (5) 降伏応力の低減係数 Q を与える式 (12) を式 (22) に置き換えることにより、中心軸圧縮柱の強度式 (15) は細長比の全域にわたってほとんどの場合安全側になる。

- (6) 軸方向圧縮力と 1 軸曲げを受けるはり-柱に対する相関式 (17), (18) は工学的に十分な精度をもつとと考えてよい (Fig. 12, 13)。

- (7) 曲げ強度 M_u の推定式 (19) の降伏モーメント M_p を全塑性モーメント M_p に置き換えた修正式 (23) により、正方形箱形および長方形箱形 (断面高さ/幅 = 0.75) のフランジの局部座屈の影響を考えた曲げ強度を非常によい精度で推定できる (Fig. 14)。

本研究の一部は卒業研究として永田健氏 (現建設省) に分担していただいた。また、数値計算はすべて名古屋大学大形計算機センターの FACOM・M 382 を使用した。

Appendix マトリックス N_2 (式 (4))

はりの任意点のたわみと曲率の関係式は

$$v''(x) = -\Phi(x) \dots\dots\dots(A-1)$$

で表わされる。ここに、プライムは x に関する微分を表わす。式 (A-1) の両辺を 2 回積分し、 $v(0) = v(L) = 0$ であることを考慮すれば次式を得る。

$$v(x) = -\int_0^x \int_0^x \Phi(x) dx dx + \frac{x}{L} \int_0^L \int_0^x \Phi(x) dx dx \dots\dots\dots(A-2)$$

いま

$$f(x) = \int_0^x \int_0^x \Phi(x) dx dx \dots\dots\dots(A-3)$$

とおくと、有限積分法の手法^{8),9)}により、分割点 $i (i=1 \sim n+1)$ の $f(x)$ および $\Phi(x)$ を要素とする $(n+1)$ 次ベクトル f および Φ の間には次式が成り立つ。

$$f = (h^2/144) N \cdot N \cdot \Phi \dots\dots\dots(A-4)$$

ここに、 $h=L/n$ = 分割点間隔、 $N=(n+1)$ 次の正方形行列で具体的な形は文献 8), 9) に与えられている。行列 N は Simpson の 1/3 法則を利用することにより簡単に求まる。式 (A・2) を分割点 $i (i=1 \sim n+1)$ に適用することにより次式を得る。

$$v = (h^2/144)(-N \cdot N \cdot \Phi + X \cdot N_{n+1} \cdot N \cdot \Phi) \equiv N_2 \cdot \Phi \dots\dots\dots (A \cdot 5)$$

ここに

$$N_2 = (h^2/144)(-N \cdot N + X \cdot N_{n+1} \cdot N) \dots\dots\dots (A \cdot 6)$$

$$X = (1/n) \text{diag. } (0, 1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (A \cdot 7)$$

である。 N_{n+1} はすべての行が N の $(n+1)$ 行目に一致する $(n+1)$ 次正方形行列であり、 $\text{diag. } (0, 1, 2, \dots, n)$ は対角要素が $0, 1, \dots, n$ の $(n+1)$ 次対角行列である。式 (A・5) が式 (4) で与えられた v と Φ の関係である。

参 考 文 献

- 1) 宇佐美勉・福本昉士・青木徹彦：溶接箱形断面柱の局部座屈と全体座屈の連成強度に関する実験的研究，土木学会論文報告集，第 308 号，1981 年 4 月。
- 2) 宇佐美勉・福本昉士：鋼圧縮部材の連成座屈強度実験と有効幅理論による解析，土木学会論文報告集，第 326 号，1982 年 10 月。
- 3) 宇佐美勉・福本昉士・青木徹彦・松川昭夫：補剛箱形断面偏心圧縮柱の強度に関する実験的研究，土木学会論文集，第 350 号 / I-2，1984 年 10 月。
- 4) Usami, T. : Postbuckling of Plates in Compression and Bending, Journal of Structural Division, Proc. ASCE, No. ST3, Vol.108, March, 1982.
- 5) Little, G.H. : The Strength of Square Steel Box Columns-Design Curves and their Theoretical Basis, The Structural Engineer, Vol.57A, No.2, Feb.,1979.
- 6) 土屋信洋・宇佐美勉・大谷恭弘：薄板集成短柱の複合非線形挙動，第 39 回年次学術講演会講演概要集，第 1 部，

昭和 59 年 10 月。

- 7) 宇佐美勉・土屋信洋・大谷恭弘・福本昉士：薄板集成短柱の弾塑性有限変位解析，土木学会論文集，第 362 号 / I-4，1985 年 10 月。
- 8) Brown, P.T. and Trahair, N.S. : Finite Integral Solution of Differential Equations, Civil Engrg. Trans., Inst. of Engineers, Australia, Vol.C.E.10, No.2, Oct., 1968.
- 9) 福本昉士：構造物の座屈安定解析，新体系土木工学，第 9 巻，1982 年 7 月。
- 10) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 3rd ed., Pergamon press, 1982.
- 11) 山田嘉昭：塑性・粘弾性，コンピュータによる構造工学講座 II-2-A，培風館。
- 12) Herrmann, L.R. : Finite Element Bending Analysis for Plates, Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol.93, No.EM5, Oct., 1967.
- 13) Chen, W.F. and Atsuta, T. : Theory of Beam-Columns, Vol.1, McGraw-Hill, 1976.
- 14) 市田浩三・吉村富士夫：スプライン関数とその応用，教育出版，1979 年。
- 15) 三本木茂夫：梁および板の非線形解析，マトリックス構造解析法研究発表論文集，日本鋼構造協会，1971 年 6 月。
- 16) Yu, C.K. and Tall, L. : A 514 Steel Beam-Columns, Pub. IABSE, Vol.31-II, 1971.
- 17) Allen, H.G. and Bulson, P.S. : Background to Buckling, McGraw-Hill, 1980.
- 18) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，1980 年 2 月。
- 19) 三上市蔵・堂垣正博・米沢 博：補剛圧縮板の極限強度特性に関する研究，土木学会論文報告集，第 334 号，1983 年 6 月。
- 20) Trahair, N.S. : The Behavior and Design of Steel Structures, Chapman and Hall, 1977.

(1985.4.8・受付)