

## 薄板集成短柱の弾塑性有限変位解析

ELASTIC-PLASTIC FINITE DISPLACEMENT ANALYSIS OF  
PLATE-ASSEMBLED COLUMN SEGMENTS

宇佐美 勉\*・土屋信洋\*\*・大谷恭弘\*\*\*・福本嘸士\*\*\*\*

By Tsutomu USAMI, Nobuhiro TSUTIYA, Yasuhiro OTANI and Yuhshi FUKUMOTO

A finite element method based on the modified Hellinger-Reissner's principle is applied to compute the elastic-plastic post-buckling behavior of plate-assembled steel column segments. The effects of both welding residual stresses and initial plate deflections are allowed for in the analysis. Load-shortening curves of uniaxially loaded single plates are shown to be in good agreement with Little's results which are supposed to be the most reliable solutions. Moment-thrust-curvature ( $M-P-\Phi$ ) curves of locally buckled box column segments are computed and, based on the results, an interaction formula for predicting the ultimate strength of box column segments in combined compression and bending is proposed.

## 1. 緒 言

局部座屈を考えた薄板集成鋼圧縮部材(柱, はり-柱)の荷重-変形特性を厳密に解析することは非常に難しい。このような部材の挙動は種々の初期不整, とりわけ, 構成板要素の初期たわみ, 溶接による残留応力, および部材軸線の初期曲がりに大きく左右され<sup>1), 2)</sup>, これらのすべてを考慮して厳密に解析することはほとんど不可能に近く, 何らかの近似解法に頼らざるを得ない。局部座屈を考えない圧縮部材の解析では, 断面のモーメント-軸力-曲率関係( $M-P-\Phi$ 関係)を残留応力を考慮してあらかじめ求めておき, それらを部材軸線の初期たわみを考慮して部材の長さ方向に積分する手法がよく用いられる<sup>3)</sup>。この考えは局部座屈を考えた圧縮部材の解析にも適用できると考えられる<sup>4)</sup>。ただし, 局部座屈が考慮できるように, “断面”の代わりに“短柱”を考える必要がある。短柱の構成板要素に残留応力および初期たわみを考えることにより, 短柱の挙動( $M-P-\Phi$ 関係)にはこれらの初期不整を含ませることができ, 後は局部座屈

を考えない解析と同様な計算を行えば主要な初期不整をすべて考えた圧縮部材の挙動が近似的に求められることになる。このように短柱の挙動は部材全体の挙動を解析をするうえに重要な役割を果たすこととなる。

本研究は局部座屈を考えた薄板集成鋼圧縮部材の挙動に関する理論的研究の第1段階として, 単独板要素および短柱要素の局部座屈後の弾塑性有限変位挙動の理論的解析について述べたものである。解析手法は, 薄板の弾塑性有限変位理論に基づく有限要素法であり, 混合法による定式化を行っている。

圧縮板の有限変位解析に関する論文はすでに数多く発表されているが, ここでは, 本論文と関連の深い2, 3の論文のみを取り上げ, その他の研究は文献5)~9)の参考文献を参照していただくことにする。初期たわみと残留応力を同時に考えた圧縮板の弾塑性有限変位解析としては, わが国では有限要素法による小松・北田<sup>5), 6)</sup>らの先駆的研究があり, その後同研究グループにより発表されている圧縮補剛板に関する一連の研究とともに高く評価されている研究である。海外では英国において多くの研究が発表されており, 有限要素法のほかに, Rayleigh-Ritz法, Dynamic Relaxation法による解法が用いられている。これらの研究はBradfield<sup>9)</sup>により詳細にレビューされており, 各解法の概要, 特徴, さらに,

\* 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科  
(〒464 名古屋市千種区不老町)

\*\* 正会員 工修 清水建設土木本部 技術部

\*\*\* 学生会員 工修 Purdue大学大学院博士課程

\*\*\*\* 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科

同一の問題に対する計算結果の比較など、参考になるところが多い。

上述のように、有限要素法による圧縮板の弾塑性有限変位に関する研究は数多くあるものの、ほとんどが変位法に属する解法であり、本論文のように混合法を用いた解法は、弾性域での解法<sup>10)~12)</sup>を除いて見当たらないようである。本研究では三角形平板要素を用い、曲げ変形に対しては一定応力場および線形変位場を用いる混合法 (Herrmann モデル<sup>13)</sup>、面内変形に関しては定ひずみモデルによる変位法を混用し、移動座標法による定式化を行っている。

2. 解析方法

(1) 基本仮定

以下に示す基本仮定のもとで基礎方程式を誘導する：

- Ⓐ 薄板理論に対する Kirchhoff<sup>14)</sup> の仮定が成り立つ。
- Ⓑ Von Karman のひずみ-変位関係<sup>14)</sup> が成り立つ。
- Ⓒ 材料は等方性の完全弾塑性体とし、Von Mises の降伏条件、Prandtl-Reuss の塑性流れ理論に従う<sup>15)</sup>。
- Ⓓ 変形前、後の部材は常にたわみのない三角形平板要素の集合として扱えるものとする。

(2) 接線剛性方程式の誘導

Fig. 1 に示すように、三角形平板要素 (板厚 =  $t$ ) の中央面に  $(x, y)$  座標、それと直角方向に右手系をなすように  $z$  軸を定める。また、要素各辺には  $(n, s)$  座標を  $n$  軸を辺の外向き法線方向、 $s$  軸を辺に沿って設ける。板の中央面の任意点の  $x, y, z$  軸方向変位をそれぞれ  $u, v, w$ 、各辺での  $s$  軸まわりの曲げモーメントを  $M_n$  とする。いま、 $u, v, w$  は要素間で連続で幾何学的境界条件を満たす変位、 $M_n$  は要素間で連続かつ力学的境界条件を満たす曲げモーメントとするならば、各辺での法線方向勾配 (以後たわみ角とよぶ)  $w_{,n} \equiv \partial w / \partial n$  の要素間での不連続を許した、いわゆる Herrmann の原理<sup>14)</sup> に対する Hellinger-Reissner 原理の汎関数  $\Pi_R$  は全要素に対して次式で表わされる<sup>14), 15)</sup>：

$$\Pi_R = \sum_{\text{全要素}} \Pi_R^e \dots \dots \dots (1)$$

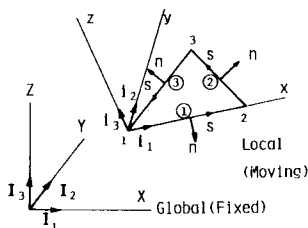


Fig. 1 Coordinate Systems.

$$\begin{aligned} \Pi_R^e = & \iint_{A_e} [-B(N_{ij}, M_{ij}) + M_{x,x} + M_{x,y}] w_{,x} \\ & + (M_{x,y,x} + M_{y,y}) w_{,y} + N_x(u_{,x} + 1/2 w_{,x}^2) \\ & + N_y(v_{,y} + 1/2 w_{,y}^2) + N_{xy}(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y}) \\ & - \bar{q} w] dA - \oint_{C_e^e} M_{ns} w_{,s} ds - \int_{C_e^e} [\bar{N}_{xn} u + \bar{N}_{yn} v \\ & + \bar{V}_n w] ds - \int_{C_e^e} M_n \bar{w}_{,n} ds \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

ここに、 $\Sigma$  = 全要素についての和； $A_e$  = 要素面積； $C^e$  = 要素全周； $C_e^e$  = 要素周辺のうち、力学的境界に含まれる部分； $C_u^e$  = 要素周辺のうち、幾何学的境界に含まれる部分； $B(N_{ij}, M_{ij})$  = 要素のコンプリメンタリーエネルギー密度関数； $N_x, N_y, N_{xy}$  =  $x, y$  方向膜力、せん断力； $M_x, M_y, M_{xy}$  =  $x, y$  断面曲げモーメント、ねじりモーメント； $M_{ns}$  = 要素辺の内向き法線 ( $-n$  軸) まわりのねじりモーメント； $\bar{q}, \bar{N}_{xn}, \bar{N}_{yn}, \bar{V}_n$  =  $z$  軸方向分布外力、力学的境界に作用する  $x, y$  方向面内力、 $z$  軸方向面外力； $\bar{w}_{,n}$  = 幾何学的境界での規定たわみ角、を表わす。

次に式 (2) の増分形を初期応力問題<sup>14)</sup> として求める。既知の応力状態すなわち初期応力状態 (状態 (0)) で、要素は完全に平らな板で近似できる (仮定Ⓓ) とし、Fig. 1 の  $(x, y, z)$  を移動座標系とし、この座標系で増分変形量を記述する。いま、荷重または強制変位が変化することにより初期応力状態からそれに近接する変形状態 (状態 (1)) に移動したとすると、 $\Pi_R^e$  の変化量  $\Delta \Pi_R^e$  は初期応力状態で要素が完全に平らであることより式 (2) の諸量で、変形量  $(u, v, w)$  は増分量その他の量は初期応力状態の量と増分量の和と置くことにより次式を得る：

$$\Delta \Pi_R^e = \Delta \Pi_{R1}^e + \Delta \Pi_{R2}^e \dots \dots \dots (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_{R1}^e = & \iint_{A_e} [(M_x + \Delta M_x)_{,x} + (M_{xy} + \Delta M_{xy})_{,y}] \Delta w_{,x} \\ & + [(M_{xy} + \Delta M_{xy})_{,x} + (M_y + \Delta M_y)_{,y}] \Delta w_{,y} \\ & - (\bar{q} + \Delta \bar{q}) \Delta w] dA - \oint_{C_e^e} (M_{ns} + \Delta M_{ns}) \Delta w_{,s} ds \\ & - \int_{C_e^e} (\bar{V}_n + \Delta \bar{V}_n) \Delta w ds - \int_{C_e^e} \Delta M_n (\bar{w}_{,n} + \Delta \bar{w}_{,n}) ds \\ & \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_{R2}^e = & \iint_{A_e} [(N_x + \Delta N_x) (\Delta u_{,x} + 1/2 \Delta w_{,x}^2) \\ & + (N_y + \Delta N_y) (\Delta v_{,y} + 1/2 \Delta w_{,y}^2) \\ & + (N_{xy} + \Delta N_{xy}) (\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x} + \Delta w_{,x} \Delta w_{,y}) \\ & - \Delta B(\Delta N_{ij}, \Delta M_{ij}; N_{ij}, M_{ij})] dA \\ & - \int_{C_e^e} [(\bar{N}_{xn} + \Delta \bar{N}_{xn}) \Delta u + (\bar{N}_{yn} + \Delta \bar{N}_{yn}) \Delta v] ds \\ & \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

ここに、 $\Delta$  の付いた量は増分量、 $\Delta$  の付いてない量は初期応力状態での量を表わす。式 (4) の最終項には

$M_n(\bar{w}_n + \Delta\bar{w}_n)$ の項があるべきだが、変分を受けると零となるため省略してある。

増分変位  $\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta w$  を要素内で線形変化, 増分曲げモーメント, ねじりモーメント  $\Delta M_x$ ,  $\Delta M_y$ ,  $\Delta M_{xy}$  を要素内で一定と仮定すれば, 式 (3) は次式のようにマトリックス表示できる (右肩の  $T$  は転置行列を示す):

$$\begin{aligned} \Delta\Pi_n^e = & 1/2(\Delta u_p^T k_{11} \Delta u_p + \Delta w^T k_{22} \Delta w + \Delta M_n^T k_{33} \Delta M_n) \\ & + \Delta u_p^T k_{13} \Delta M_n + \Delta w^T k_{23} \Delta M_n \\ & - \Delta u_p^T (\Delta \bar{p}_p + \bar{p}_p - p^*) - \Delta w^T (\Delta \bar{q} + \bar{q} - q^*) \\ & - \Delta M_n^T (\Delta \bar{\theta} + \bar{\theta} - \theta^*) \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

上式の誘導および記号は Appendix I および II に示してある。上式で変分を受ける量は  $\Delta u_p$ ,  $\Delta w$  および  $\Delta M_n$  である。式 (6) の停留条件より次式で表わされる要素の“接線剛性方程式”を得る:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} \\ & k_{22} & k_{23} \\ \text{sym.} & & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta M_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta p \\ \Delta \theta \\ \Delta M_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{p} \\ \bar{\theta} \\ \bar{M}_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} p^* \\ \theta^* \\ M_n^* \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (7)$$

ここで,  $\Delta u^T = [\Delta u_p^T, \Delta w^T]$  は節点変位増分;  $\Delta \bar{p}^T = [\Delta \bar{p}_p^T, \Delta \bar{q}^T]$  は節点力増分;  $\bar{p}^T = [\bar{p}_p^T, \bar{q}^T]$  は初期応力状態での節点力;  $p^{*T} = [p_p^{*T}, q^{*T}]$  は初期応力状態での応力場から求められる等価節点力;  $\Delta M_n$  は節辺曲げモーメント増分;  $\Delta \theta$  は節辺の規定たわみ角増分;  $\bar{\theta}$  は初期応力状態での節辺の規定たわみ角;  $\theta^*$  は初期応力状態での曲率から求められる等価節点たわみ角である。式 (7) の未知量は変位増分と曲げモーメント増分で, 係数行列は剛性行列ではないが, ここでは便宜上“接線剛性方程式”とよぶ。式 (7) を全要素について求め, 全体座標系に座標変換した後に重ね合わせ, 境界条件の処理をすることにより, 構造物全体の接線剛性方程式が求まる。すなわち,

$$[K] \begin{Bmatrix} \Delta U \\ \Delta m_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \bar{P} \\ \Delta \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{P} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P^* \\ \theta^* \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (8)$$

ここに,  $K$  は構造物全体の接線剛性行列,  $\Delta U$ ,  $\Delta m_n$ ,  $\Delta \bar{P} \dots \theta^*$  はそれぞれ  $\Delta u$ ,  $\Delta M_n$ ,  $\Delta \bar{p} \dots \theta^*$  に対応する構造物全体の量である。局所座標から全体座標への座標変換行列はたとえば文献 15) pp. 139~141 に与えられている。式 (8) の右辺項  $\Delta \bar{P} + \bar{P} - P^*$  は節点における不つり合い力項で通常の変位法における解法と同じである。混合法では  $\Delta \bar{\theta} + \bar{\theta} - \theta^*$  の項があるが, これは節辺に生ずるたわみ角の不連続性を表わす項である。

(3) 数値計算方法

数値計算は式 (8) の右辺項が零になるまで Newton-Raphson 法に従い繰り返し計算を行う。ただし, 本解析では変位増分法を用いたので,  $\Delta \bar{P}$  には荷重増分の代わりに, 既知 (強制) 変位増分に関連する項が入ることとなる。式 (8) の連立方程式は帯行列に対する Gauss

の消去法を用いて解いた。以下, 数値計算に必要な手法の概要を述べる。

a) ひずみ増分, 応力増分

各要素の節点変位増分  $\Delta u$ , 節辺曲げモーメント増分  $\Delta M_n$  が既知のとき, 要素内のひずみ増分, 応力増分を求める方法について述べる。要素の中央面ひずみ増分は, 新しい変形状態 (状態 (1)) での要素座標系の節点座標から, 元の変形状態 (状態 (0)) の要素座標系の節点座標を差し引き, 要素の剛体変位成分を除去した節点変位増分を求め, ひずみ増分-変位増分関係の線形項 (式 (A・3), (A・34) の  $\Delta e_L$ ) のみから求める。いま  $(x_i^0, y_i^0)$ ,  $(x_i^1, y_i^1)$  ( $i=1, 2, 3$ ) をそれぞれ節点  $i$  の (0), (1) 状態での  $(x, y)$  座標とすれば, Fig. 1 の要素について, 変形後の座標で測った, 剛体変位を除去した変位増分は,

$$\Delta u_p^T = [0, x_2^1 - x_2^0, x_3^1 - x_3^0, 0, 0, y_3^1 - y_3^0] \dots \dots (9)$$

で表わされる。したがって, ひずみ増分は式 (A・34), (A・32) より求められる。要素内の曲げモーメント増分  $\Delta M$  は,  $\Delta M_n$  を式 (A・17) に代入すれば求められる。ここで  $\Delta M$  は式 (A・2) に定義されている。要素内の  $\Delta e_L$ ,  $\Delta M$  が求まれば, 構成則 (式 (A・36)) より, 膜力増分  $\Delta N$ , 曲率増分  $\Delta \kappa$  (式 (A・2)) が求まり, 要素内任意点のひずみ増分  $\Delta \bar{e}$ , 応力増分  $\Delta \bar{\sigma}$  は, それぞれ, 式 (A・20) で  $\Delta e \equiv \Delta e_L$  と置いた式, および式 (A・35) より求められる。なお, 弾性域から塑性域へ移行する要素の構成則の取り扱い方法, および降伏曲面をはずれた点を降伏曲面に戻す操作は文献 16) pp. 249~257 の手法を用い, 後者についてはそのうち“refined process for reducing a stress point to the yield surface”を用いた。

b) 等価節点力  $p^*$ , 等価たわみ角  $\theta^*$

上で求められた  $\Delta N$ ,  $\Delta M_n$ ,  $\Delta \kappa$  を状態 (0) の対応する量に加え, 状態 (1) での量  $N$ ,  $M_n$ ,  $\kappa$  を求め, それぞれ, 式 (A・30), (A・11), (A・31) に代入すれば,  $p^{*T} = [p_p^{*T}, q^{*T}]$ ,  $\theta^*$  は求められる。

c) 節辺の規定たわみ角  $\Delta \bar{\theta}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\Delta \bar{\theta}$ ,  $\bar{\theta}$

混合法における変位場は, 要素間節辺または法線方向勾配が規定された幾何学的境界で, 法線方向勾配 (たわみ角) の連続性が要求されていないため, 変形が進むにつれて変位場から得られる変形形状は要素間または幾何学的境界で要素が折れ曲がり, たわみ角の不連続が生ずる。状態 (0) におけるこの折れ曲がり角度が  $\bar{\theta}$  になる。一方  $\Delta \bar{\theta}$  は要素間で零と置いてよく, また, 本解析では幾何学的境界において規定されたたわみ角は零としている (固定端) ので,  $\Delta \bar{\theta}$  または  $\Delta \bar{\theta}$  は考えなくてもよい。結局,  $\bar{\theta}$  の各要素節辺での値を求める必要があるが, これは次のような幾何学的考察から求めることができる (Fig. 1, 2 参照)。要素節辺  $\textcircled{6}$  の単位法線ベクトルを  $n_k$

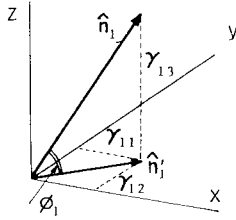


Fig. 2 Definition of  $\phi_k$  and  $\gamma_{lm}$ .

( $k=1, 2, 3$ ), 局所座標系 ( $x, y, z$ ) 方向の単位基底ベクトルを  $\hat{i}_i (i=1, 2, 3; x=1, y=2, z=3)$  とし, 無載荷状態 (後述の初期たわみを板要素に与えた状態) での対応する量に記号  $\hat{\cdot}$  を上に付け,  $\hat{n}_k, \hat{i}_i$  などのように表わす. いま, 全体座標系 ( $X, Y, Z$ ) の単位基底ベクトルを  $I_j (j=1, 2, 3; X=1, Y=2, Z=3)$  とすれば, 次式が成り立つ.

$$\hat{n}_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \hat{l}_{ki} \hat{l}_{ij} I_j, \quad \mathbf{i}_m = \sum_{n=1}^3 l_{mn} I_n \quad (10)$$

ここに,  $\hat{l}_{ki}$  は  $\hat{n}_k$  の局所座標系 ( $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ ) における方向余弦,  $\hat{l}_{ij}, l_{mn}$  は, それぞれ,  $\hat{i}_i, \mathbf{i}_i$  の全体座標系における方向余弦で具体的な形はたとえば文献15) の pp.139~141 に与えられている.  $l_{mn}$  を成分とする行列  $[l_{mn}]$  は直交行列であることを考慮すれば, 式 (10) より次式が得られる.

$$\hat{n}_k = \sum_{m=1}^3 \gamma_{km} \mathbf{i}_m, \quad \gamma_{km} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \hat{l}_{ki} \hat{l}_{ij} l_{mj} \quad (11)$$

したがって, ベクトル  $\hat{n}_k$  とベクトル  $\mathbf{i}_k$  を ( $x, y$ ) 平面に射影したベクトル  $\hat{n}'_k$  のなす角度  $\phi_k (k=1, 2, 3)$  は,

$$\tan \phi_k = \gamma_{k3} / \sqrt{\gamma_{k1}^2 + \gamma_{k2}^2} \quad (12)$$

で表わされる. この  $\phi_k$  が初期応力状態 (0) での規定勾配ベクトル  $\bar{w}_n^0$  (式 (A・1)) の成分となり,  $\bar{\theta}$  は定義式 (A・10), (A・16) より次式で与えられる.

$$\bar{\theta}^T = [a_1 \phi_1, a_2 \phi_2, a_3 \phi_3] \quad (13)$$

d) 初期不整量の導入

初期不整として構成板要素の初期たわみと溶接による残留応力を同時に考慮する. 初期たわみを有する構成板要素は平面三角形要素の集合と考え, 残留応力は要素内で一定と考える. 初期たわみ, 残留応力の具体的な形は後述する. このように両初期不整を同時に考慮した場合, 無載荷状態で要素の節点につり合い力が生ずる<sup>5)</sup>. これを解消するため, 無載荷状態で各節点に次式で求まる仮想外力  $\bar{P}_i$  を作用させる.

$$\bar{P}_i = P_i^* \quad (14)$$

ここに,  $P_i^*$  は構造物の形状として初期たわみを与えた形状を用い, 応力状態として残留応力のみを用いて算出した等価節点力  $P_i^*$  である.

### 3. 短柱の $M-P-\Phi$ 曲線の数値計算方法

前節の一般的解析法を用い短柱の  $M-P-\Phi$  曲線を解析する手法について述べる. 短柱断面は少なくとも1軸対称とし, 端モーメント  $M$  は対称面内に作用するものとする. 計算は一定軸方向圧縮力  $P$  のもとで漸増する端モーメント  $M$  に対応する短柱の平均曲率  $\Phi$  を求めることにある. そのために, Fig. 3(a) に示すように, 部材端に  $Y$  軸方向に線形的に変化する強制軸方向変位 (以下強制変位という) を与え, それによって生ずる部材端での節点の軸方向反力 (以下単に反力という) より軸力, 端モーメントを求め, 軸力が所定の値  $P$  になるまで強制変位を修正する. 部材の平均曲率は部材端部に与えた強制変位の勾配  $\varphi_T$  より次式を用いて計算することができる.

$$\Phi = 2 \varphi_T / l \quad (15)$$

ここに,  $l$  は短柱の部材長である. 軸力を与えられた値  $P$  に収束させるための数値計算方法は以下に示すとおりである (Fig. 3(b), (c) 参照). ここで, 状態 (0) での軸力が  $P$  に収束しており, 端モーメント  $M_0$ , 曲率  $\Phi_0$  が既知であるとする.

- Ⓐ 部材端に断面の重心軸まわりの微小回転  $\Delta\varphi$  によって生ずる強制変位増分  $\Delta\bar{U}$  を与える.
- Ⓑ 変位増分後の状態 (状態 (1) とする) での反力  $F^{(1)}$  (引張力を正とする) を求める.
- Ⓒ 反力  $F^{(1)}$  より軸力  $P^{(1)}$ , 端モーメント  $M^{(1)}$  を求める. このとき,  $P^{(1)} \cong P$  ならば  $M^{(1)}$  を端モーメントの収束値  $M_0$  とし, 対応する曲率は  $\Phi_0 + 2 \Delta\varphi / l$  より求める. 収束しないときは次のステップにゆく.

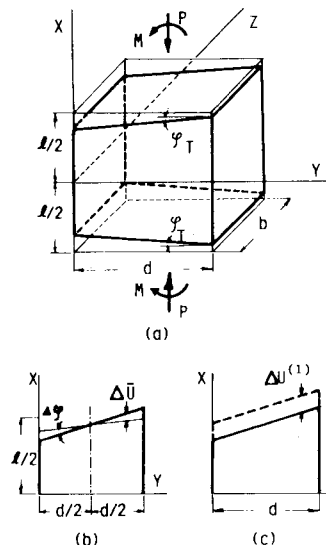


Fig. 3 Procedures to Compute  $M-P-\Phi$  Curves.

④ 強制変位増分  $\Delta\bar{U}$  の修正値  $\Delta U^{(i)}$  ( $Y$  方向に一定とする) を次式より求める。

$$\Delta U^{(i)} = -(P - P^{(i)}) / \sum \Delta F_u \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 $\sum$  = 端部断面節点についての総和、 $\Delta F_u$  = 一様単位強制変位増分 (Fig. 3(c) で  $\Delta U^{(i)} = 1.0$  とおいた変位増分) を状態 (1) に与えたときの反力増分である。式 (16) は状態 (1) での軸力  $P^{(i)}$  と軸力増分  $-\Delta U^{(i)} \sum \Delta F_u$  の和が  $P$  に等しくなる条件から求められる。

⑤  $\Delta\bar{U}$  に修正値  $\Delta U^{(i)}$  を加えた新しい強制変位増分を  $\Delta\bar{U}$  とし、⑥~④の過程を繰り返す。

上記の計算過程では 2 か所で収束判定が必要であり、次のように行った。

ステップ⑥での収束判定

次のいずれの条件も満足するとき、解は収束したとみなす。

$$\left. \begin{aligned} ① \quad & \|\Delta U\| \leq \epsilon_1 \|\sum \Delta U\| \\ ② \quad & \|\Delta m_n\| \leq \epsilon_2 \|\sum \Delta m_n\| \\ ③ \quad & \|\Delta P + \bar{P} - P^*\| \leq \epsilon_3 \|\Delta F\| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 $\|\cdot\|$  = ユークリッドノルム、 $\sum$  = 反復計算中の総和、 $\Delta F$  = 強制変位増分  $\Delta\bar{U}$  によって生ずる反力増分である。数値計算では  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0.01$  を用いた。

ステップ④での収束判定

$$④ \quad |P - P^{(i)}| \leq \epsilon_4 P_r \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 $P_r$  は断面の降伏軸力 (断面積  $\times$  降伏応力) であり、 $\epsilon_4 = 10^{-4}$  を用いた。

4. 数値計算結果

(1) 一様圧縮板

解析プログラムの精度の確認のため、Fig. 4(a) に示す圧縮板の解析を行い、文献 8) の解などと比較する。境界条件は  $Y = \pm b/2$  で面内変位自由、 $X = \pm a/2$  で

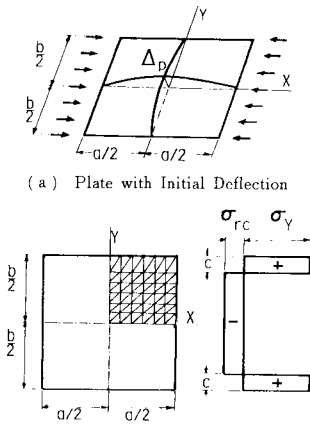


Fig. 4

せん断応力が零として一様面内変位を  $X$  方向に与える。面外変形に対する境界条件は単純支持とする。残留応力分布は Fig. 4(b) に示す形とし、片側の引張残留応力部分の幅  $c$  は、文献 8) に従い、 $c/t = 3$  とした。断面内で残留応力が自己つり合いにある条件より、最大圧縮残留応力  $\sigma_{rc}$  は  $\sigma_{rc}/\sigma_r = 6/(b/t - 6)$  より求められる。ここに  $\sigma_r$  は降伏応力である。初期たわみ  $W_0$  の形状は

$$W_0 = \Delta_p \cos \frac{\pi X}{a} \cos \frac{\pi Y}{b} \dots\dots\dots (19)$$

とした。ここに、 $\Delta_p$  は最大初期たわみで、板幅  $b$  の 1/1 000 または 1/200 とした。有限要素分割は Fig. 4(b) に示すように、幅方向の半分を、引張残留応力部を 1 分割、圧縮残留応力部を 5 分割、計 6 分割し、長さ方向の半分を 6 等分割した。計算に用いた入力データは、弾性係数  $E = 205$  GPa、降伏応力  $\sigma_r = 250$  MPa、板厚  $t = 8$  mm、ポアソン比  $\nu = 0.3$ 、アスペクト比  $a/b = 0.875$ 、幅厚比  $b/t = 30, 40, 55, 80$  である。なお、これらの幅厚比を次式で定義される幅厚比パラメーターで表わすと、それぞれ、0.551, 0.735, 1.01, 1.47 となる。

$$R = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_r}{E} \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 k}} \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 $k$  = 座屈係数で 4.0 を用いた。

縦軸に平均応力  $\sigma_a$  と降伏応力  $\sigma_r$  の比、横軸に平均ひずみ  $\epsilon_a$  と降伏ひずみ  $\epsilon_r$  の比で表わした結果を Moxham および Little の結果<sup>8), 17), 18)</sup> とともに Fig. 5 に示す。平均応力は載荷辺での反力の総和を断面積  $bt$  で除した量、平均ひずみは載荷辺の相対的な  $X$  軸方向変位を長さ  $a$  で除した量である。Little の解<sup>18)</sup> は、文献 9) によれば最も正確な解といわれ、文献 8) に示されている 6 種類の解のほぼ中間あたりに位置する。Moxham の解は一般的に Little の解の上側にあるが、幅厚比の小さい板

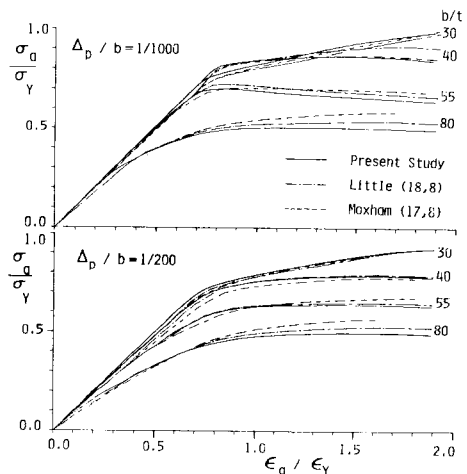


Fig. 5 Average Stress-Average Strain Curves of Single Plates.

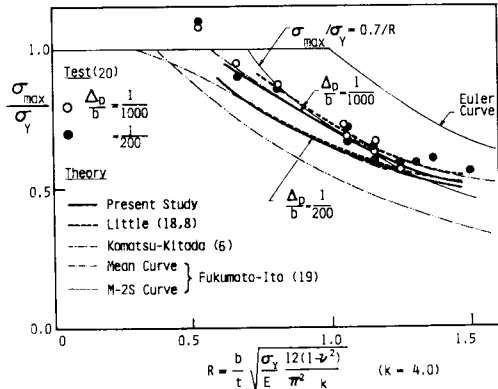


Fig. 6 Comparison of Maximum Strengths of Single Plates.

に対しては下側にある場合もある。本解析結果は、すべてのケースについて、Littleの解を多少下回る位置にあるがその差はあまり大きくないことがわかり、本解析が十分信頼できるものと判断できる。次にこれらの図から各曲線のピークすなわち極限平均応力  $\sigma_{max}/\sigma_y$  を求め、幅厚比パラメーター  $R$  に対してプロットし、Littleの解析結果、小松・北田の耐荷力曲線<sup>6)</sup>、福本・伊藤のデータベースより得られた耐荷力曲線<sup>19)</sup>、およびBradfieldの実験結果<sup>20)</sup>と比較したものがFig. 6である。小松・北田の曲線は  $\sigma_{rc}/\sigma_y = 0.4$ 、 $\Delta_p/b = 1/150$  として計算されたものであり、福本・伊藤の曲線は383個の実験より得られた耐荷力の平均値および平均値-2・標準偏差を表わす曲線である。Bradfieldの実験は供試体に  $\Delta_p/b = 1/1000$  または  $1/200$  の初期たわみを強制的に付け、入熱量を制御した溶接ビードを非載荷辺に盛った一枚板を用いて行われたものである。残留応力の実測データによれば  $b/t \cong 52$  で  $\sigma_{rc}/\sigma_y = 0.22$  (Wシリーズ) および  $\sigma_{rc}/\sigma_y = 0.076$  (Lシリーズ) であり、残留応力の自己つり合い条件より  $c/t$  を求めると、それぞれ、4.7および1.84となり、計算で用いた値はこれらの中間にあることがわかる。実験結果は残留応力の大きさによる強度の有意な差はみられないので、初期たわみの大きさのみを区別してプロットしてある。この図より次のことがわかる：①本解析結果は  $\Delta_p/b = 1/200$  のとき、Littleの解とほとんど一致し、 $\Delta_p/b = 1/1000$  のときには多少低めの位置にある、②初期たわみが  $b/1000$  から  $b/200$  に変化することによる強度の低下は高々10%程度であり、幅厚比が大きくなるにつれて小さくなる、③初期たわみが  $b/1000$  の実験結果は本解析結果とよく一致するもの、 $b/200$  の実験結果は解析結果を上回り、むしろ  $b/1000$  の解析結果とよく一致する、④初期たわみが  $b/1000$  の本解析結果は、福本・伊藤の平均耐荷力曲線とほとんど一致する、⑤小松・北田の曲線は  $\Delta_p =$

$b/200$  の本解析結果とほとんど一致する。

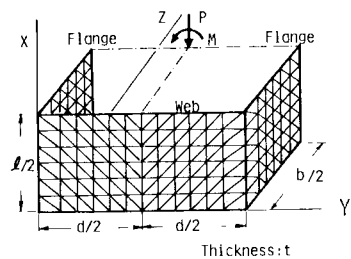
(2) 曲げと圧縮を受ける箱形断面短柱

計算データ

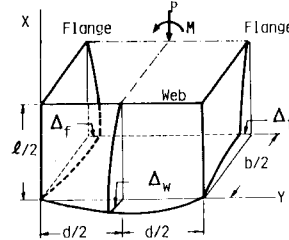
Fig. 7(a) に示すような曲げと圧縮を受ける箱形断面短柱 (フランジ幅 =  $b$ 、ウェブ幅 =  $d$ 、板厚 =  $t$ 、長さ =  $l$ ) を考え、対称性から、1/4 の部分を解析の対象とした。載荷辺 ( $X = l/2$ ) は単純支持で面内せん断力が零として強制面内変位を  $X$  軸方向に与える。初期たわみ形状は、Fig. 7(b) に示すように、各板要素に式 (19) で表わされる初期たわみを仮定した。ただし、フランジ部分の初期たわみは断面の内側に、ウェブ部分は外側に仮定し、フランジとウェブの境界は直角を保つように仮定した。したがって、フランジ板とウェブ板の最大初期たわみ (それぞれ  $\Delta_f$  と  $\Delta_w$  と記す) には  $\Delta_f/b = \Delta_w/d$  の関係がある。残留応力は Fig. 4(b) に示す分布形を各板要素に与え、分割方法は Fig. 7(a) に示すように、各フランジを  $6 \times 6$ 、ウェブを  $12 \times 6$  分割した。計算の対象とした短柱は著者らが実験した<sup>2)</sup>正方形および長方形 ( $d/b = 0.75$ ) 箱形断面で計算に用いたデータは：材質 = SM 58； $E = 210$  GPa； $\sigma_y = 568$  MPa； $t = 4.5$  mm； $\nu = 0.3$ ； $d/b = 1.0, 0.75$ ； $b/t = 29, 44, 58$  ( $R_f = 0.79, 1.20, 1.59$ )； $\sigma_{rc}/\sigma_y = 0.3, 0.2, 0.15$  ( $b/t = 29, 44, 58$  に対して)； $\Delta_f/b = \Delta_w/d = 1/400$  である。ただし、 $R_f$  はフランジ板の幅厚比パラメーター ( $k = 4.0$ ) である。

アスペクト比  $l/b$  の決定

短柱の挙動は構成板要素のアスペクト比  $l/b$  によって変動すると考えられ、安全側をみて、最小の強度を与



(a) FEM Mesh in Box Column Analysis



(b) Box Column with Initial Deflection

Fig. 7

えるアスペクト比で解析するのがよいと考えられる。前節の純圧縮板に対しては、Moxham<sup>17)</sup>はアスペクト比  $a/b=0.875$  で最小の強度が得られるとしているが、小松・北田<sup>6)</sup>は幅厚比の大きさによって  $a/b=0.5\sim 1.0$  と変化することを示している。このアスペクト比は、初期不整の大きさにも依存するといわれているが<sup>8)</sup>、いずれにしても  $a/b$  の変化に対し強度はあまり敏感ではない。圧縮と曲げを受ける短柱では、幅厚比、初期不整以外に、荷重条件 ( $P$  と  $M$  の比)、断面形状 ( $d/b$  比) によっても最小の強度を与えるアスペクト比 (以後  $(l/b)_0$  と書く) は異なると考えられ、厳密に  $(l/b)_0$  を定めることは大変な数値計算を必要とする。そこで、ここでは、初期不整のない理想短柱の弾性座屈解析から求められた  $(l/b)_0$  を参考に、2, 3の極限強度解析のみから  $(l/b)_0$  を定める。弾性座屈解析は有限帯板法を用いて行い、結果を縦軸に  $(l/b)_0$ 、横軸に応力勾配係数  $\psi=(\sigma_1-\sigma_2)/\sigma_1$  をとって Fig. 8 に示す。ここに、 $\sigma_1, \sigma_2$  はそれぞれ最大、最小圧縮応力である。一方、前述の計算データを用い、 $b/t=29 (R_f=0.79)$  で  $P/P_y \approx 0.5$ 、および  $b/t=58 (R_f=1.59)$  で  $P/P_y=0.0$  (純曲げ) のもつで数種類のアスペクト比を与えて弾塑性有限変位解析を行い、 $(l/b)_0$  の値を求め、 $\psi$  に対して Fig. 8 にプロットした。ただし、 $P/P_y=0.5$  に対する  $\psi$  の値は  $P/P_y=0.5$  および  $(l/b)_0$  に対応する  $M-P-\phi$  曲線のピークの値  $M_{max}$  より弾性応力分布を仮定して求めた。有限変位解析より得られた  $\psi=0$  (純圧縮) での  $(l/b)_0$  の値は、前述の Moxham の結果をプロットしたものである。有限変位解析より得られた  $(l/b)_0$  の値は、弾性座屈解析より得られた値の 76~88% であることが図よりわかる。純圧縮板に対する小松・北田<sup>6)</sup>の計算によれば、 $R=0.7, 1.3$  の単独圧縮板に対しアスペクト比が 0.7 から 1.0 に変化しても強度の変化は高々数% であること、および本解析から得ら

れた短柱の極限強度の変化もアスペクト比の変化に対しと同様の鈍感さであったことより、本解析では、すべて、 $l/b=0.7$  を用いることにした。

**M-P- $\phi$  曲線**

前述のデータを用い 5 種類の短柱 ( $b/t=29$  の短柱については  $d/b=0.75$  の断面のみ) について  $M-P-\phi$  曲線を計算した。計算はあらかじめ純圧縮について極限軸方向圧縮力を求めておき、それに至るまでの軸力  $P$  を  $P_y$  の 0.1 きざみごとに与えていった。得られた結果の一部を Fig. 9 に示す。ここで、 $M_y$  は局部座屈を考慮しないで求めた断面の降伏モーメント、 $\phi_y$  は  $M_y$  に対応する降伏時の曲率である。いずれのケースについても軸力  $P$  が大きくなるにつれ局部座屈の影響が顕著に現われ、しかも、断面形状の差が出てくるのがわかる。これは、軸力が大きくなるとフランジ板の局部座屈ばかりでなくウェブ板の局部座屈の影響が出てくるためである。このことをはっきり示すために、本解析結果の一部 ( $b/t=44$  の正方形断面) を Little の方法<sup>4)</sup>で求めた結果と比較することにする (Fig. 10)。Little の方法は、フランジ単独板の弾塑性有限変位解析から Fig. 5 に示したような板要素の平均応力-平均ひずみ関係をあらかじめ求めておき、それをフランジ板材料の応力-ひずみ関係とみなして断面の  $M-P-\phi$  曲線を求める方法であり、ウェブ板の応力-ひずみ関係をフランジ板のそれと同一とみなして計算した結果が点線 (Web Buckling Considered-WB)、完全弾塑性応力-ひずみ関係を用いて計算した結果が一点鎖線 (No Web Buckling-NWB) である。なお、この短柱の純圧縮強度は  $P_{max}/P_y=0.567$  である。この図より、軸力が  $0.2 P_y$  (または  $0.35 P_{max}$ ) 以下と比較的小さいときには、近似解 NWB は本解析結果と比較的よく合うが、軸力が  $0.4 P_y$  (または  $0.7 P_{max}$ ) となると、近似解 WB の方が精度

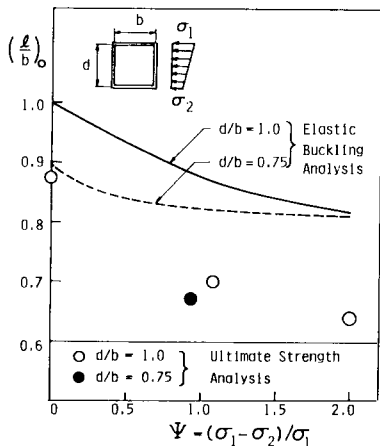


Fig. 8 Aspect Ratio giving the Minimum Strength.

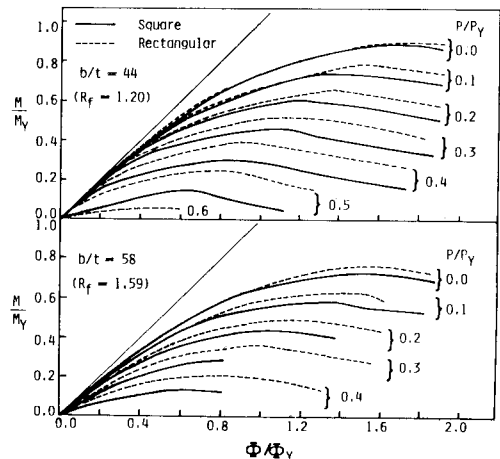


Fig. 9 Computed  $M-P-\phi$  Curves of Box Columns.

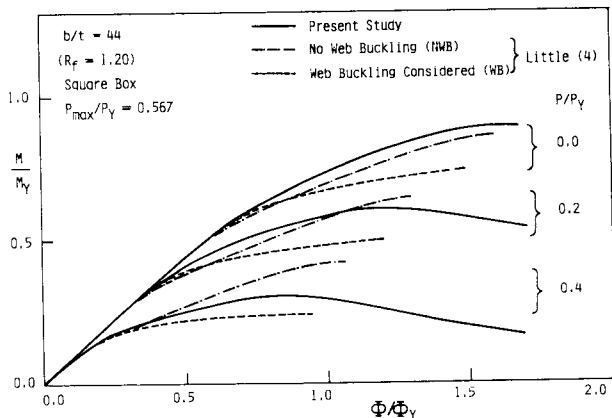


Fig. 10 Comparison of  $M-P-\phi$  Curves Computed by the Present Analysis and Little's Method.

がよくなることわかる。この事実は当然のことであるが、Littleの方法は場合によっては相当の誤差を含むことになり、軸方向圧縮力が小さいときのNWBによる解以外、あまり信頼できる解を得ることができない。

これまでの箱形断面の  $M-P-\phi$  曲線は、フランジ板の初期たわみが断面の内側に生じていると仮定して求めたものである。板要素の初期たわみの方向が  $M-P-\phi$  曲線に与える影響を調べるため、 $b/t=44$  の正方形箱形断面に、 $P/P_y=0.2$  の軸力が作用したときの  $M-P-\phi$  曲線を、大きさは同一で方向が逆の初期たわみを与えて計算したが、差は最大モーメントで1%以下であった。したがって、Fig. 9の結果は、初期たわみが仮定方向と逆の場合にも適用できると考えられる。

極限強度の相関公式

Fig. 9に示した  $M-P-\phi$  曲線より曲げと圧縮を受ける短柱の極限強度を求め、軸方向圧縮力  $P/P_y$  と曲げモーメント  $M/M_y$  の相関関係の形でプロットしたものが Fig. 11 である。同図中には、局部座屈を考えないときの箱形断面（ただし、 $b/t=44$  の正方形箱形）の極限強度の相関曲線<sup>3)</sup>および、次式で表わされる局部座屈を考えた相関曲線もプロットしてある。

$$\frac{P}{QP_y} + \frac{M}{M_u} = 1.0 \dots\dots\dots(21)$$

ここに

$$Q = 0.737/R \le 1.0$$

$$\frac{M_u}{M_y} = \frac{(2+3/\alpha)(0.737/R) + 2 + \alpha}{4 + \alpha + 3/\alpha} \le 1.0 \dots\dots\dots(22)$$

$$\alpha = d/b \dots\dots\dots(23)$$

である。Qは実験より求められる中心軸圧縮短柱の強度の推定式<sup>2)</sup>であり、Rは短柱の幅厚比パラメータで、式(20)で、座屈係数  $k$  に等価座屈係数とよばれる量<sup>1)</sup>  $k_{eq}$  を代入した量である。また、 $M_u$ は圧縮フランジの

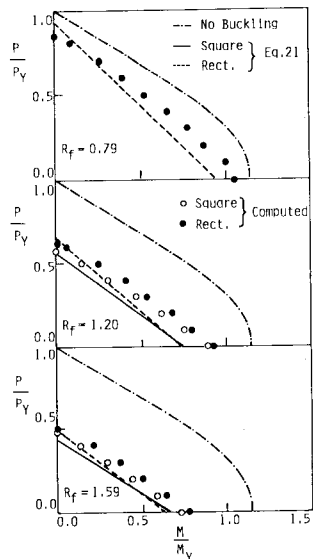


Fig. 11 Interaction Curves of Locally Buckled Column Segments.

局部座屈を考えた極限曲げモーメント<sup>1)</sup>である。図よりわかるように、式(21)の相関式は、ごく狭い部分を除き、計算値に比べ安全側にある。また、計算値は、幅厚比  $R_f$  が大きくなるに従い直線に近くなり、式(21)のような直線式を用いる妥当性がうかがえる。なお、現行道路橋示方書では、式(21)の  $Q, M_u$  として式(22)、(23)よりさらに安全な(小さい値を与える)式を用い、しかも、式(21)左辺第2項の分母を  $M_u(1-P/P_E)$  (ただし、 $P_E$ は長柱のオイラー座屈荷重)としているため、式(21)よりさらに安全側となる。

5. 結 言

鋼薄板により構成される短柱の局部座屈後の弾塑性有限変位挙動の解析手法を提示し、純圧縮単独板要素および圧縮と曲げを受ける箱形断面短柱に対する数値計算結果について述べた。解析手法は混合法による有限要素法を用いた。この研究によって得られた結論をまとめると次のようになる。

- (1) 残留応力および初期たわみを同時に考慮した短柱の弾塑性有限変位解析手法を提示した。
- (2) 変位場は線形式で仮定しているため、“接線剛性マトリックス”の計算が非常に簡単である。
- (3) 移動座標法における剛体変位除去の手法も、変位法<sup>5)</sup>に比べ格段に簡単である。
- (4) 純圧縮板に対する本解析結果は現在最も信頼できるといわれている Little の解<sup>3), 23)</sup>と大きな差がない。
- (5) 単独板要素の平均応力-平均ひずみ関係を構成板要素材料の応力-ひずみ関係とみなして短柱の  $M-P-$



Φ 曲線を求める方法 (Little の方法<sup>4)</sup>) は軸方向圧縮力が小さい場合以外信頼できる結果を得ることができない。

(6) 式 (21) で表わされる短柱の極限強度の相関式は解析結果に対し、安全側の式となっている (Fig. 11 参照)。

数値計算はすべて本学大形計算機センターの FACOM M 382 を使用した。本研究の初期の段階で討議に加わっていたいただいた、愛知工業大学の青木徹彦助教授に感謝する。

Appendix I 汎関数 ΔΠ<sub>R</sub><sup>e</sup> (式 (6)) の誘導

Fig. 1 に示す三角形要素の節点 i (i=1, 2, 3), 節辺Ⓔ (k=1, 2, 3) で定義される次の量を導入する。

$$\begin{aligned} \Delta u_i^r &= [\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i, \Delta v_i, \Delta v_i, \Delta v_i] \\ \Delta \bar{p}_i^r &= [\Delta \bar{p}_{xi}, \Delta \bar{p}_{x2}, \Delta \bar{p}_{x3}, \Delta \bar{p}_{yi}, \Delta \bar{p}_{y2}, \Delta \bar{p}_{y3}] \\ \Delta w_i^r &= [\Delta w_i, \Delta w_2, \Delta w_3], \Delta M_n^r = [\Delta M_{n1}, \Delta M_{n2}, \Delta M_{n3}] \\ \Delta M_{ns}^r &= [\Delta M_{ns1}, \Delta M_{ns2}, \Delta M_{ns3}] \\ \Delta V_n^r &= [\Delta V_{n1}, \Delta V_{n2}, \Delta V_{n3}] \\ \Delta \bar{w}_n &= [\Delta \bar{w}_{n1}, \Delta \bar{w}_{n2}, \Delta \bar{w}_{n3}] \dots \dots \dots (A.1) \end{aligned}$$

ここに、Δu<sub>i</sub>, Δv<sub>i</sub>, Δw<sub>i</sub> は節点 i における変位増分 Δu, Δv, Δw; Δp̄<sub>xi</sub>, Δp̄<sub>yi</sub> は節点 i における節点力増分; ΔM<sub>nk</sub>, ΔM<sub>nsk</sub>, ΔV̄<sub>nk</sub>, Δw̄<sub>nk</sub> は節辺Ⓔにおける ΔM<sub>n</sub>, ΔM<sub>ns</sub>, ΔV<sub>n</sub>, Δw<sub>n</sub> である。また、要素内で定義される次の記号を導入する。

$$\begin{aligned} \Delta N^T &= [\Delta N_x, \Delta N_y, \Delta N_{xy}], \Delta M^T = [\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_{xy}] \\ \Delta x^T &= [\Delta x_x, \Delta x_y, \Delta x_{xy}] \\ \Delta e_L^T &= [\Delta u_x, \Delta v_y, \Delta u_y + \Delta v_x] \\ \Delta e_{NL}^T &= [1/2 \Delta w_x^2, 1/2 \Delta w_y^2, \Delta w_x \Delta w_y] \\ \Delta e &= \Delta e_L + \Delta e_{NL} \dots \dots \dots (A.2), (A.3) \end{aligned}$$

ここで、Δx = ΔM に対応する曲率; Δe<sub>L</sub>, Δe<sub>NL</sub> = 中央面のひずみ増分の線形、非線形成分。なお、式 (A.1) ~ (A.3) で定義した量の初期応力状態での量は Δなしで用いる。

本解析では変位増分を線形式、曲げモーメント増分を要素内で一定と仮定しているの、変位増分は次式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta u(x, y) \\ \Delta v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix} \Delta u_p \dots \dots \dots (A.4)$$

$$\Delta w(x, y) = [1, x, y] A^{-1} \Delta w \dots \dots \dots (A.5)$$

ここに、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (A.6)$$

であり、(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>) は節点 i の (x, y) 座標である。

ΔΠ<sub>R1</sub><sup>e</sup> … この項はすべて板の曲げ変形に関する項であ

るため、Herrmann モデルの定式化がそのまま利用でき、誘導は文献 15) に譲り、結果のみ記す。

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_{R1}^e &= \Delta w^T k_{23} \Delta M_n - \Delta w^T (\Delta \bar{q} + \bar{q} - q^*) \\ &\quad - \Delta M_n^T (\Delta \bar{\theta} + \bar{\theta}) \end{aligned}$$

ここで、k<sub>23</sub> = -FRE<sup>-1</sup>, q̄ = L̄V<sub>n</sub> + q̄A<sub>d</sub>[1, 1, 1]<sup>T</sup>/3, θ̄ = S̄w<sub>n</sub>, q\* = -FRE<sup>-1</sup>M<sub>n</sub>

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \sin^2 \alpha_1 & \sin 2\alpha_1 \\ \cos^2 \alpha_2 & \sin^2 \alpha_2 & \sin 2\alpha_2 \\ \cos^2 \alpha_3 & \sin^2 \alpha_3 & \sin 2\alpha_3 \end{bmatrix}, \\ F &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ R &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sin 2\alpha_1 & \sin 2\alpha_1 & 2\cos 2\alpha_1 \\ -\sin 2\alpha_2 & \sin 2\alpha_2 & 2\cos 2\alpha_2 \\ -\sin 2\alpha_3 & \sin 2\alpha_3 & 2\cos 2\alpha_3 \end{bmatrix}, \\ L &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$S = \text{diag.}(a_1, a_2, a_3) \dots \dots \dots (A.7) \sim (A.16)$$

上式中、a<sub>k</sub> は節辺Ⓔの長さ、α<sub>k</sub> は節辺Ⓔの法線 n の x 軸からの角度、diag.(a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>) は対角項が a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub> の 3×3 の対角行列を表わす。式 (A.12), (A.14) の行列 E, R はそれぞれ次式で定義される変換行列である。

$$\Delta M_n = E \Delta M, \Delta M_{ns} = R \Delta M \dots \dots \dots (A.17, 18)$$

ΔΠ<sub>R2</sub><sup>e</sup> … コンプリメンタリーエネルギー密度関数の増分量 ΔB は次式で与えられる。

$$\Delta B = \int_{-t/2}^{t/2} (\Delta \bar{\sigma}^T \bar{e} + 1/2 \Delta \bar{\sigma}^T \Delta \bar{e}) dz \dots \dots \dots (A.19)$$

ここに、Δσ̄ は要素内任意点の応力増分、Δē は要素内任意点のひずみ増分で、次式で表わされる。

$$\Delta \bar{e} = \Delta e + z \Delta x \dots \dots \dots (A.20)$$

ē は要素内任意点の初期応力状態のひずみであるが、初期応力状態での座標系では板の中央面は無ひずみと考えてよく、中央面以外の任意点では曲率 x に対応するひずみを考えなくてはならない。すなわち、

$$\bar{e} = z x \dots \dots \dots (A.21)$$

式 (A.20), (A.21) を式 (A.19) に代入し、

$$\Delta N = \int_{-t/2}^{t/2} \Delta \bar{\sigma} dz, \Delta M = \int_{-t/2}^{t/2} \Delta \bar{\sigma} z dz \dots \dots \dots (A.22, 23)$$

とおくと、次式を得る。

$$\Delta B = \Delta M^T x + 1/2 (\Delta e^T N + \Delta M^T \Delta x) \dots \dots \dots (A.24)$$

式 (A.24) を式 (5) に代入し、式 (A.1) ~ (A.3) の諸量を導入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_{R2}^e &= \iint_{A_e} [1/2 \Delta e^T \Delta N - 1/2 \Delta M^T \Delta x + \Delta e^T N \\ &\quad - \Delta M^T x] dA - \Delta u_p^T (\bar{p}_p + \Delta p) \dots \dots \dots (A.25) \end{aligned}$$

上式の積分内の第1項の  $\Delta e$  を  $\Delta e_L$  で近似し、式 (A・3) ~ (A・5), (A・17), (A・18) および Appendix II の構成則を用い、また、積分内の各項は要素内で一定であることを考慮し、式 (A・7) と (A・25) の和を取れば  $\Delta \Pi_e^*$  は式 (6) のようになる。ここに、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_{11} &= A_e \mathbf{B}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B}, \quad \mathbf{k}_{13} = A_e \mathbf{B}^T \mathbf{C}_1 \mathbf{E}^{-1} \\
 \mathbf{k}_{33} &= -A_e (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{C}_2 \mathbf{E}^{-1}, \quad \mathbf{k}_{22} = A_e (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{G} \mathbf{A}^{-1} \\
 \mathbf{p}_p^* &= A_e \mathbf{B}^T \mathbf{N}, \quad \boldsymbol{\theta}^* = A_e (\mathbf{E}^{-1})^T \boldsymbol{\kappa} \\
 \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_x & N_{xy} \\ 0 & N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A\cdot 26) \sim (A\cdot 33)
 \end{aligned}$$

上式で  $\mathbf{B}$  は次式で定義される変換行列である。

$$\Delta e_L = \mathbf{B} \Delta u_p \dots\dots\dots (A\cdot 34)$$

また、 $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$  は式 (A・36) の構成則に現われる行列であり、 $\mathbf{k}_{22}$  は通常幾何剛性行列とよばれる行列である。 $\mathbf{k}_{11}$ ,  $\mathbf{k}_{12} \sim \mathbf{k}_{33}$  は要素の接線剛性行列を構成するが、これらを求めるためには、数値積分の必要はない(ただし構成則を求めるために板厚方向の積分を行う必要はある)。

Appendix II 構成則

塑性論におけるひずみ増分理論<sup>15)</sup>に従えば  $\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}$  と  $\Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  の間には

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{ep} \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \dots\dots\dots (A\cdot 35)$$

が成り立つ。ここに  $\mathbf{D}^{ep}$  は弾塑性性応力マトリックスで具体的な形は文献 15) に与えられている。いま  $\Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cong \Delta e_L + \boldsymbol{z} \Delta \boldsymbol{x}$  と近似し、式 (A・35) を式 (A・22), (A・23) に代入し変形すれば

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{N} \\ \Delta \boldsymbol{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{C}_1 \\ -\mathbf{C}_1^T & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta e_L \\ \Delta \mathbf{M} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (A\cdot 36)$$

を得る。ここに、

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_{11} - \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_{22}^{-1} \mathbf{D}_{12}^T, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_{22}^{-1}, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{D}_{22}^{-1} \dots\dots\dots (A\cdot 37)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_{11} &= \int_{-l/2}^{l/2} \mathbf{D}^{ep} dz, \quad \mathbf{D}_{12} = \int_{-l/2}^{l/2} \mathbf{D}^{ep} z dz \\
 \mathbf{D}_{22} &= \int_{-l/2}^{l/2} \mathbf{D}^{ep} z^2 dz \dots\dots\dots (A\cdot 38)
 \end{aligned}$$

である。式 (A・36) が本解析で用いられる構成則である。なお、式 (A・38) の積分するため、本解析では板厚を 4 等分割し、分割点での応力状態から定まる  $\mathbf{D}^{ep}$  より Simpson の積分公式より計算した。

参 考 文 献

1) 宇佐美勉・福本啓士・青木徹彦：溶接箱形断面柱の局部

座屈と全体座屈の連成強度に関する実験的研究，土木学会論文報告集，第 308 号，1981 年 4 月。  
 2) 宇佐美勉・福本啓士：鋼圧縮部材の連成座屈強度実験と有効幅理論による解析，土木学会論文報告集，第 326 号，1982 年 10 月。  
 3) Galambos, T. V. (福本啓士・西野文雄訳)：鋼構造部材と骨組一強度と設計一，丸善，1970 年。  
 4) Little, G. H. : The Strength of Square Steel Box Columns, The Structural Engineer, Vol. 57 A, No. 2., Feb., 1979.  
 5) 小松定夫・北田俊行・宮崎清司：残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析，土木学会論文報告集，第 244 号，1975 年 12 月。  
 6) 小松定夫・北田俊行：初期不整を有する圧縮板の極限強度特性に関する研究，土木学会論文報告集，第 270 号，1978 年 2 月。  
 7) 吉田 裕・増田陳紀・松田 隆：薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変形離散化要素解析法，土木学会論文報告集，第 288 号，1979 年 8 月。  
 8) Bradfield, C. D. : An Evaluation of the Elastic-Plastic Analysis of Plates Loaded by Uniaxial In-Plane Compression, Int. J. Mech. Sci., Vol. 24, No. 3, 1982.  
 9) Bradfield, C. D. and Stonor, R. W. P. : Simple Collapse Analysis of Plates in Compression, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 110, No. 12, Dec., 1984.  
 10) Tahiani, C. and Lachnce, L. : Linear and Nonlinear Analysis of Thin Shallow Shells by Mixed Finite Elements, Computers and Structures, Vol. 5, 1975.  
 11) Noor, A. K. and Hartley, S. J. : Nonlinear Shell Analysis Via Mixed Isoparametric Elements, Computers and Structures, Vol. 7, 1977.  
 12) Noor, A. K. and Andersen, C. M. : Mixed Models and Reduced/Selective Integration Displacement Models for Nonlinear Shell Analysis, Int. J. Num. Meth. Engrng. Vol. 18, 1982.  
 13) Herrmann, L. R. : Finite Element Bending Analysis for Plates, J. Engr. Mech. Division, ASCE, Vol. 93, No. EM 5, Oct., 1967.  
 14) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 3rd ed., Pergamon press, 1982.  
 15) 山田嘉昭編：マトリックス法の応用，東大出版会，1972。  
 16) Owen, D. R. J. and Hinton, E. : Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press Limited, 1980.  
 17) Moxham, K. E. : Compression in Welded Web Plates, Ph. D. Thesis, Univ. of Cambridge, 1970.  
 18) Little, G. H. : Rapid Analysis of Plate Collapse by Live Energy Minimization, Int. J. Mech. Sci., Vol. 19, 1977.  
 19) Fukumoto, Y. and Itoh, Y. : Basic Compression Strength of Steel Plates from Test Data, Proc. JSCE, No. 344 / I - 1, April, 1984.  
 20) Bradfield, C. D. : Tests on Plates loaded in In-Plane Compression, J. Const. Steel Res. Vol. 1, No. 1, 1980. (1985. 2. 27・受付)