

## 二面塑性モデルの数学的再構成

### A MATHEMATICAL REFINEMENT OF THE TWO SURFACE MODEL OF PLASTICITY

橋口公一\*

By Koichi HASHIGUCHI

Various constitutive models for the description of the elastoplastic deformation with an anisotropic hardening and also a smooth transition from the elastic to the distinct-yield (fully-plastic) state have been proposed in the past. Among them the two surface model extended from the kinematic hardening model would be one of the most available models, and many constitutive equations have been presented using this model. They have not been formulated, however, in mathematically rational forms applicable to the generalized material with not only hardening but also softening behaviours. In this paper, a reasonable formulation of the two surface model is given by deriving the mathematical condition which must be satisfied in order that the surfaces do not intersect at their relative translation and which will be a "non-intersection condition" and by assuming a reasonable measure to describe a distance from the outer yield surface

#### 1. 緒 言

異方硬化を表現する最も簡単なモデルは Ishlinski<sup>1)</sup> および Prager<sup>2)</sup> により独立に提案された移動硬化モデルである。しかるに、このモデルにおいては、単一の降伏面を仮定しているので、弾性状態から弾塑性状態への滑らかな遷移（以後、“弾塑性遷移”とよぶ）を表現し得ない。ところで、弾塑性遷移過程において生じる変形は、一般に Masing<sup>3)</sup> の法則に従う。すなわち、応力-ひずみ曲線において、除荷開始時の勾配は初期荷重開始時のそれに等しく、また、除荷・逆荷重時には初期荷重時より滑らかな弾塑性遷移を生じる。

移動硬化モデルに Masing の法則を考慮する試みは、Mroz<sup>4)</sup> および Iwan<sup>5)</sup> により独立に行われ、特に、前者によるものは“加工硬化係数場のモデル”とよばれて、その後の異方硬化モデルの発展の1つの基礎を与えたものであった。なお、これらは、顕著な降伏状態に相当する降伏面のほかに、その内部に重畳した多くの降伏面を仮定するので、一般には“多面塑性モデル”とよばれている。しかるに、変形解析に際して多くの面の移動、配置を算定、記憶せねばならず、煩雑さを免れない。そこで、

顕著な降伏状態に相当する降伏面に加えて、純粋弾性域を囲む小降伏面のみを仮定する簡潔なモデルが提案され<sup>6),7)</sup>、その定式化が進められた<sup>8)-11)</sup>。これは“二面塑性モデル”とよばれている。

しかしながら、多面や二面塑性モデルに基づく既往の構成式は、数学的に厳密な考察に基づいて合理的に定式化されたものであるとはいいがたい。特に、ある面がこれを囲むべく仮定されたより大きな面から飛び出さないための条件、言い換えれば、面が互いに交差しないための数学的条件（以後、“非交差条件”とよぶ）に関する十分な配慮はなされていない。それゆえに、既往の構成式によれば、硬化現象の解析はなし得るとしても、軟化状態においては仮定された面の交差を来して解析不能となる。また、二面塑性モデルにおいて、塑性ひずみ速度を規定するにあたって仮定されている外側の降伏面からの隔たりの度合を表わす測度は応力がこの面に近づくとかえって大になるという不合理な場合が生じる。

本論文では、数学的合理性の面から、二面塑性モデルの再構成を行う。特に、面の非交差条件を導出し、本条件を満たすように降伏面の移動法則を規定する。また、外側の降伏面からの隔たりの度合を表わす合理的な測度を仮定し、この測度を導入しつつ、非交差条件に抵触しないように塑性ひずみ速度を規定する。さらに、ここ

\* 正会員 工博・農博 九州大学助教授 農学部農業工学科 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)

に規定された二面塑性モデルに基づく構成式と比較・対照しつつ、既往の同モデルに基づく諸構成式における矛盾点の指摘を行う。

2. 正規降伏状態に関する基本構成則

弾塑性材料の応力-ひずみ曲線は、模式的に Fig.1 のように示される。まず、再負荷曲線の包絡線に相当する状態を“正規降伏状態”と称することにし、本状態は次の正規降伏条件により規定されると仮定する。

$$f(\hat{\sigma}) - F(K) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここに、

$$\hat{\sigma} \equiv \sigma - \bar{\alpha} \dots\dots\dots (2)$$

2階テンソル  $\sigma$  は応力であり、また、スカラー  $K$  および 2階テンソル  $\hat{\alpha}$  は正規降伏面のそれぞれ膨張（硬化）・収縮（軟化）および移動を表すためのパラメーターである。なお、簡単のために、正規降伏面は応力空間において相似性を維持すると仮定する。ゆえに、関数  $f$  はその引数の同次関数であることになるが、その次数を  $n$  とする。以下に、 $K$  および  $\hat{\alpha}$  の発展式について述べる。

$\dot{K}$ （以後、上に付された・は時間微分を意味するものとする）は、応力、塑性ひずみおよび塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}^p$  の関数であると仮定する。なお、次元の恒等性により、 $\dot{K}$  は  $\dot{\epsilon}^p$  に関して一次の関数でなければならない。

$\hat{\alpha}$  については、Ziegler<sup>2)</sup> の提案式を土のような圧縮性材料にも都合のよいように一般化した著者<sup>1)</sup>の次の提案式を採用する。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\alpha}} &= A \text{tr}(\dot{\epsilon}^p I) I + B \text{tr}\left(\dot{\epsilon}^p \frac{\hat{\sigma}}{|\hat{\sigma}|}\right) \frac{\hat{\sigma}}{|\hat{\sigma}|} \\ &= A \dot{\epsilon}^p I + B \text{tr}\left(\dot{\epsilon}^p \frac{\hat{\sigma}}{|\hat{\sigma}|}\right) \frac{\hat{\sigma}}{|\hat{\sigma}|} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここに、 $\dot{\epsilon}^p$  は塑性体積ひずみ速度すなわち

$$\dot{\epsilon}^p \equiv \text{tr} \dot{\epsilon}^p \dots\dots\dots (4)$$

であり、また、 $A(\geq 0)$  および  $B(\geq 0)$  は  $K$  および  $\hat{\alpha}$  のスカラー関数である。なお、 $||$  は大きさを表す記号である。

式（1）を微分して得られる式に関係式

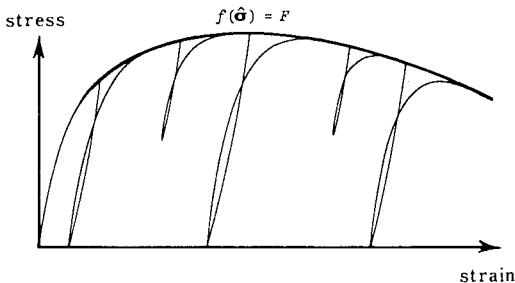


Fig.1 The distinct-yield state illustrated as an envelope curve of reloading curves.

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}} = \frac{nF}{\text{tr}(\hat{n}\hat{\sigma})} \hat{n} \dots\dots\dots (5)$$

$$\hat{n} \equiv \frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}} / \left| \frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}} \right| \dots\dots\dots (6)$$

を代入して、次の適応条件を得る。

$$\text{tr}\left\{\hat{n}\left(\dot{\hat{\sigma}} - \frac{1}{n} \frac{\dot{F}}{F} \hat{\sigma}\right)\right\} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

さらに、本式に式（3）を代入すれば、次式となる。

$$\begin{aligned} \text{tr}\left[\hat{n}\left\{\dot{\hat{\sigma}} - A \dot{\epsilon}^p I - B \text{tr}\left(\dot{\epsilon}^p \frac{\hat{\sigma}}{|\hat{\sigma}|}\right) \frac{\hat{\sigma}}{|\hat{\sigma}|} - \frac{1}{n} \frac{\dot{F}}{F} \hat{\sigma}\right\}\right] \\ = 0 \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここで、塑性ひずみ速度を規定するにあたって、正規降伏面内の応力によっては塑性変形は生じず、弾性変形のみが生じる。つまり、正規降伏面内は完全弾性域であり、また、弾性特性は塑性変形に影響されないと仮定する。本場合には、Drucker<sup>3)</sup>により論証されたように関連流動則が成り立つ。すなわち、

$$\dot{\epsilon}^p = \langle \dot{\lambda} \rangle \hat{n} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\dot{\lambda}$  は比例係数であり、記号  $\langle \ \rangle$  は MacCauley の括弧、つまり、 $f(\hat{\sigma}) = F$  で  $\dot{\lambda} > 0$  のとき  $\langle \dot{\lambda} \rangle = \dot{\lambda}$ 、その他のとき  $\langle \dot{\lambda} \rangle = 0$  を意味する。このように式（9）はそれ自身に荷重基準を含んでいる。

式（8）に式（9）を代入して、塑性ひずみ速度は次式で与えられる。

$$\dot{\epsilon}^p = \left\langle \frac{\text{tr}(\hat{n}\hat{\sigma})}{\hat{D}} \right\rangle \hat{n} \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$\hat{D} \equiv \frac{1}{n} \frac{F'}{F} \hat{x} \text{tr}(\hat{n}\hat{\sigma}) + A \text{tr}^2 \hat{n} + B \text{tr}^2 \left( \hat{n} \frac{\hat{\sigma}}{|\hat{\sigma}|} \right) \dots\dots\dots (11)$$

$$F' \equiv \frac{dF}{dK} \dots\dots\dots (12)$$

$\hat{x}$  は応力、塑性ひずみおよび  $\hat{n}$ （一次）のスカラー関数であり、次式により与えられる。

$$\hat{x} = \dot{K} / \langle \dot{\lambda} \rangle \dots\dots\dots (13)$$

3. 二面塑性モデル

正規降伏面に加えて、これに相似で、その内部を移動する下降伏面を仮定する（Fig.2）。応力は下降伏面上あるいはその内部に存在し得るとし、また、面上にあるときは弾塑性変形が生じ得るが、内部にあるときは弾性変形のみが生じると仮定する。そこで、下降伏面は次式で表わされるとする。

$$f(\hat{\sigma}) - r^n F(K) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

ここに、

$$\hat{\sigma} \equiv \sigma - \bar{\alpha} \dots\dots\dots (15)$$

$r(0 < r \leq 1)$  は正規降伏面の大きさに対する下降伏面の大きさの比を表す物質定数であり、また、2階テンソル  $\bar{\alpha}$  は下降伏面の移動を表すパラメーターである。

さて、 $f(\hat{\sigma}) < F$ ,  $f(\bar{\sigma}) = r^n F$  なる下降伏状態について考えよう。そこで、現在の応力点  $\sigma$  における下降伏面の外向き法線方向と同一のそれを有する正規降伏面上の共役点を  $\sigma_y$  と記すことにする (Fig. 2)。すなわち次式が成り立つ。

$$\hat{\sigma}_y = \frac{1}{r} \bar{\sigma} \quad (16)$$

$$\hat{n}_y = \bar{n} \quad (17)$$

ここに、

$$\hat{\sigma}_y \equiv \sigma_y - \hat{a} \quad (18)$$

$$\hat{n}_y \equiv \frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}_y} / \left| \frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}_y} \right| \quad (19)$$

$$\bar{n} \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} / \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \right| \quad (20)$$

ここで、式 (3) における応力を共役応力  $\sigma_y$  とみなすことにより、本式が下降伏状態においてもそのまま成り立つと仮定する。ゆえに、式(16)を考慮して次式を得る。

$$\dot{\hat{a}} = A \dot{\epsilon}^p I + B \text{tr} \left( \dot{\epsilon}^p \frac{\bar{\sigma}}{|\bar{\sigma}|} \right) \frac{\bar{\sigma}}{|\bar{\sigma}|} \quad (21)$$

次に、下降伏面の移動則、つまり、 $\dot{\hat{a}}$  について考える。下降伏面は正規降伏面の内部に存在するので、次式が成り立たねばならない。

$$f(\hat{\sigma}_c) \leq F \quad (22)$$

ここに、応力空間において、 $\hat{a}$  から出て  $\bar{\alpha}$  を通る半直線が下降伏面と交わる点を  $\sigma_c$  として (Fig. 2),  $\hat{\sigma}_c$  は次式で与えられる。

$$\hat{\sigma}_c \equiv \sigma_c - \hat{a} \quad (23)$$

式 (22) は微分形で次のように書かれる。

$$f(\hat{\sigma}_c) = F \text{ のとき } \text{tr} \left( \frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}_c} \dot{\hat{\sigma}}_c \right) \leq \dot{F} \quad (24)$$

なお、式 (22) や (24) のように面が交わらない (接触してもよい) ことを規定した式を“非交差条件”とよぶことにする。

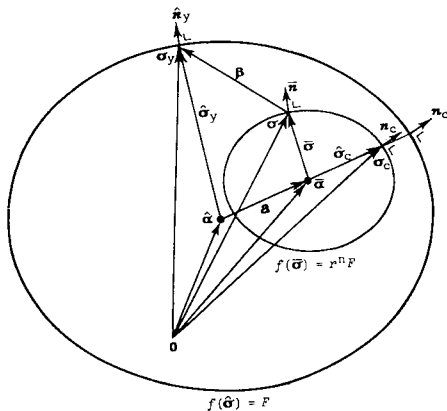


Fig. 2 The distinct-yield and the subyield surfaces.

下降伏面が正規降伏面と接触している状態においては次式が成り立つ。

$$f(\hat{\sigma}_c) = F \text{ のとき } \hat{\sigma}_c = \frac{1}{1-r} \alpha \quad (25)$$

ここに、

$$\alpha = \bar{\alpha} - \hat{a} \quad (26)$$

式 (25) により、式 (24) は次のように表わし得る。

$$f(\alpha) = (1-r)^n F \text{ のとき } \text{tr} \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \right) \leq (1-r)^n \dot{F} \quad (27)$$

さらに、関係式

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{n(1-r)^n}{\text{tr}(n_c \alpha)} n_c \quad (28)$$

$$n_c \equiv \frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}_c}}{\left| \frac{\partial f}{\partial \hat{\sigma}_c} \right|} \quad (29)$$

を用いれば、式 (27) は次のように表わされる。

$$f(\alpha) = (1-r)^n F \text{ のとき } \text{tr} \left[ n_c \left( \dot{\alpha} - \frac{1}{n} \frac{\dot{F}}{F} \alpha \right) \right] \leq 0 \quad (30)$$

ここで、正規、下降伏面は凸な面であるとし、式 (30) が満たされるものとして、次式を仮定する (Fig. 3 参照)。

$$\dot{\alpha} - \frac{1}{n} \frac{\dot{F}}{F} \alpha = \mu \beta \quad (31)$$

ここに、 $\mu (\geq 0)$  は比例係数であり、また、 $\beta$  は次式で与えられる。

$$\beta \equiv \sigma_y - \sigma \quad (32)$$

なお、 $\beta$  は式 (32) に式 (15), (16) および (18) を考慮して、次のように記し得る。

$$\beta = \frac{1}{r} \bar{\sigma} - \hat{\sigma} \quad (33)$$

式 (31) から  $\dot{\alpha}$  は次のように得られる。

$$\dot{\alpha} = \dot{\hat{a}} + \frac{1}{n} \frac{\dot{F}}{F} \alpha + \mu \beta \quad (34)$$

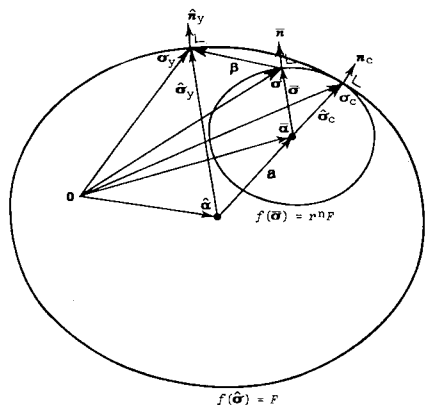


Fig. 3 The distinct-yield and the subyield surfaces in contact.

なお、式 (14) を微分し、関係式

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{n r^n F}{\text{tr}(\bar{n} \dot{\sigma})} \bar{n} \dots\dots\dots (35)$$

を考慮して得られる適応条件

$$\text{tr} \left\{ \bar{n} \left( \dot{\sigma} - \frac{1}{n} \frac{\dot{F}}{F} \sigma \right) \right\} = 0 \dots\dots\dots (36)$$

に式 (34) を代入することにより、 $\dot{\mu}$  は次のように与えられる。

$$\dot{\mu} = \frac{\text{tr} \left\{ \bar{n} \left( \dot{\sigma} - \frac{1}{n} \frac{\dot{F}}{F} \sigma \right) \right\}}{\text{tr}(\bar{n} \beta)} \dots\dots\dots (37)$$

ここに、 $\dot{\sigma}$  は式 (2) で与えられるが、そこにおける  $\sigma$  は共役点ではなく、現在の応力 (下降伏面上) を意味することを注意しておく。

最後に、付帯条件  $\dot{\mu} \geq 0$  を満たすように、塑性ひずみ速度を規定する。なお、下降伏面内は弾性領域であるので、Drucker<sup>(3)</sup> の論証法により、下降伏面に対しても関連流動則が成り立つ。すなわち

$$\dot{\epsilon}^p = \langle \dot{\lambda} \rangle \bar{n} \dots\dots\dots (38)$$

ここに、 $\dot{\lambda}$  は比例係数であり、 $f(\sigma) = r^n F$  で  $\dot{\lambda} > 0$  のとき  $\langle \dot{\lambda} \rangle = \dot{\lambda}$ 、その他のとき  $\langle \dot{\lambda} \rangle = 0$  である。

まず、式 (37) において

$$\text{tr}(\bar{n} \beta) \geq 0 \dots\dots\dots (39)$$

であることを考慮して、 $\dot{\mu} \geq 0$  であるための条件式

$$\text{tr} \left\{ \bar{n} \left( \dot{\sigma} - \frac{1}{n} \frac{\dot{F}}{F} \sigma \right) \right\} \geq 0 \dots\dots\dots (40)$$

を得る。

式 (40) に式 (21) および (38) を代入すれば、次式となる。

$$\text{tr}(\bar{n} \dot{\sigma}) - \bar{D} \langle \dot{\lambda} \rangle \geq 0 \dots\dots\dots (41)$$

ここに、

$$\bar{D} \equiv \frac{1}{n} \frac{F'}{F} \bar{x} \text{tr}(\bar{n} \dot{\sigma}) + A \text{tr}^2 \bar{n} + B \text{tr}^2 \left( \bar{n} \frac{\sigma}{|\sigma|} \right) \dots\dots\dots (42)$$

$\bar{x}$  は応力、塑性ひずみおよび  $\bar{n}$  (一次) のスカラー関数であり、次式により与えられる。

$$\bar{x} = \dot{K} / \langle \dot{\lambda} \rangle \dots\dots\dots (43)$$

また、 $\bar{x}$  は関数  $\bar{x}$  において引数  $\hat{n}$  を  $\bar{n}$  で置き替えたものに等しい。

さて、正規降伏状態 ( $\sigma = \sigma_y$ ) において塑性ひずみ速度式は式 (10)、(11) に帰着せねばならないことを考慮して、 $\dot{\lambda}$  は次式で与えられると仮定する。

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{tr}(\bar{n} \dot{\sigma})}{h \bar{D} + H} \dots\dots\dots (44)$$

ここに、 $h$  および  $H$  は、パラメーター

$$b \equiv \text{tr} \left( \bar{n} \frac{\beta}{F^{1/n}} \right) \dots\dots\dots (45)$$

の関数であり、次の条件を満たす。

$$\left. \begin{aligned} b > 0 : h > 1, H > 0 \\ b = 0 : h = 1, H = 0 \\ b < 0 : h < 1, H < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

なお、パラメーター  $b$  は正規降伏状態からの隔たりの度合を表す測度とみなされる。

式 (41) の左辺を  $\dot{x}$  と記すことにして、式 (44) を代入すれば、次式を得る。

$$\dot{x} = (h-1) \bar{D} + H \langle \dot{\lambda} \rangle \dots\dots\dots (47)$$

なお、一般に  $\bar{D}$  は正、負両値を取り得るので、式 (47) の  $\dot{x}$  は非負であるとは限らない。

さて、  
 $h \neq 1, H = 0 \dots\dots\dots (48)$

である場合には、式 (47) は

$$\dot{x} = (h-1) \bar{D} \langle \dot{\lambda} \rangle = \left( -\frac{h-1}{h} \text{tr}(\bar{n} \dot{\sigma}) \right) \dots\dots\dots (49)$$

となるが、これも非負であるとは限らない。

次に、

$$h = 1, H \geq 0 \dots\dots\dots (50)$$

である場合には、

$$\dot{x} = H \langle \dot{\lambda} \rangle \dots\dots\dots (51)$$

となる。これは非負であり、本場合には不等式 (41) が成立して  $\dot{\mu} \geq 0$  となり、非交差条件の成立が保証されることになる。

以上により、式 (38)、(44) および (50) から塑性ひずみ速度は次のように与えられる。

$$\dot{\epsilon}^p = \left\langle \frac{\text{tr}(\bar{n} \dot{\sigma})}{\bar{D} + H} \right\rangle \bar{n} \dots\dots\dots (52)$$

なお、 $\text{tr}(\bar{n} \dot{\sigma}) > 0$ 、 $\bar{D} > 0$  および  $\beta \neq 0$  である下降伏の硬化状態を参照すれば、 $b$  が大であるほど、塑性ひずみ速度は小であると考えられる。このことに着目すれば、硬化挙動を有する一般材料においては、 $H$  は  $b$  の単調増加関数でなければならないことが把握される。

#### 4. 既往の二面塑性モデル構成式における矛盾点の省察

以上に規定した二面塑性モデルに基づく塑性構成式と比較、対照しつつ、同モデルに基づく既往の諸構成式における諸矛盾点を考察、指摘しておく。

##### (1) 下降伏面の移動法則

Mroz<sup>(4)</sup> によって提案された多面塑性モデル (加工硬化係数場のモデル) において、活動下降伏面の移動法則は次のように与えられた。

$$\dot{\bar{a}} = \dot{\mu}_i \beta \quad (\dot{\mu}_i \geq 0) \dots\dots\dots (54)$$

本式を適応条件式 (36) に代入することにより、 $\dot{\mu}_i$  は次のように得られる。

$$\dot{\mu}_i = \frac{\text{tr} \left\{ \bar{n} \left( \dot{\sigma} - \frac{1}{n} \frac{\dot{F}}{F} \sigma \right) \right\}}{\text{tr}(\bar{n} \beta)} \dots\dots\dots (55)$$

また、式 (54), (55) を代入すると、非交差条件式 (40) の左辺は次式となる。

$$\frac{\text{tr}(\mathbf{n}_c\boldsymbol{\beta})}{\text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\boldsymbol{\beta})} \text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) - \text{tr}(\mathbf{n}_c\dot{\boldsymbol{\sigma}}) - \frac{1}{n} \frac{\dot{F}}{F} \left\{ \frac{\text{tr}(\mathbf{n}_c\boldsymbol{\beta})}{\text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\boldsymbol{\beta})} \text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \text{tr}(\mathbf{n}_c\mathbf{a}) \right\} \dots\dots\dots (56)$$

一方、近年、Mroz ほか<sup>10),14),15)</sup>は、多面および二面塑性モデルに関して

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = -\dot{\mu}_2 \boldsymbol{\beta} \quad (\dot{\mu}_2 \geq 0) \dots\dots\dots (57)$$

なる仮定に基づいて、式 (33) より得られる次式を用いている。

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = (1-r)\dot{\boldsymbol{\sigma}} + r\dot{\boldsymbol{\alpha}} + r\dot{\mu}_2 \boldsymbol{\beta} \dots\dots\dots (58)$$

ここに、

$$\dot{\mu}_2 = \frac{\text{tr} \left\{ \bar{\mathbf{n}} \left( \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{n} \frac{\dot{F}}{F} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right) \right\}}{\text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\boldsymbol{\beta})} \dots\dots\dots (59)$$

式 (58), (59) に対して、式 (40) の左辺は次式となる。

$$(1-r)\text{tr}(\mathbf{n}_c\dot{\boldsymbol{\sigma}}) + r \frac{\text{tr}(\mathbf{n}_c\boldsymbol{\beta})}{\text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\boldsymbol{\beta})} \text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) - \frac{1}{n} \frac{\dot{F}}{F} \left\{ \frac{\text{tr}(\mathbf{n}_c\boldsymbol{\beta})}{\text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\boldsymbol{\beta})} \text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \text{tr}(\mathbf{n}_c\mathbf{a}) \right\} \dots\dots\dots (60)$$

さらに、Dafalias ほか<sup>6)</sup>は、二面塑性モデルの定式化にあたって、下降伏面の移動法則として

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\mu}_3 \boldsymbol{\beta} \quad (\dot{\mu}_3 \geq 0) \dots\dots\dots (61)$$

なる仮定に基づいて得られる次式を用いている。

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\mu}_3 \boldsymbol{\beta} \dots\dots\dots (62)$$

ここに、

$$\dot{\mu}_3 = \frac{\text{tr} \left\{ \bar{\mathbf{n}} \left( \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{n} \frac{\dot{F}}{F} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right) \right\}}{\text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\boldsymbol{\beta})} \dots\dots\dots (63)$$

式 (62), (63) に対して、式 (40) の左辺は次式となる。

$$\frac{\text{tr}(\mathbf{n}_c\boldsymbol{\beta})}{\text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\boldsymbol{\beta})} \text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) - \frac{1}{n} \frac{\dot{F}}{F} \left\{ \frac{\text{tr}(\mathbf{n}_c\boldsymbol{\beta})}{\text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\boldsymbol{\beta})} \text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \text{tr}(\mathbf{n}_c\mathbf{a}) \right\} \dots\dots\dots (64)$$

さて、一例として、

$$\text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) < \text{tr}(\mathbf{n}_c\mathbf{a}) \dots\dots\dots (65)$$

かつ

$$\text{tr}(\mathbf{n}_c\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \geq 0, \text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \geq 0 \dots\dots\dots (66)$$

である場合について考えよう。なお、式 (65) は、 $r$  が小なる場合において成り立つ。ここで、正規降伏面の曲率が滑らかに変化する場合には、Fig. 3 を参照して、

$$\frac{\text{tr}(\mathbf{n}_c\boldsymbol{\beta})}{\text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\boldsymbol{\beta})} \approx -1 \dots\dots\dots (67)$$

であることに注意すれば、 $\dot{F} < 0$  および  $\text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) < 0$  を満たす軟化状態においては、式 (56), (60) および (64) は正となる。つまり、既往の下降伏面の移動法則 (54), (58) および (62) は一般には非交差条件式 (40) を満たさないことがわかる。

なお、式 (58) によれば、塑性ひずみ速度が生じない  $\text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = 0$  なる応力変化に対しても下降伏面は著しく運動するという矛盾を生じる。言い換えれば、下降伏面の移動法則には応力速度は  $\text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\dot{\boldsymbol{\sigma}})$  の形で含まれねばならない。

(2) 正規降伏面からの隔たりの測度

二面塑性モデルの定式化に際して、正規降伏面からの隔たりの測度として、Dafalias<sup>6),8),9)</sup>, Krieg<sup>7)</sup> および Mroz ほか<sup>10),15)</sup>は次のパラメーターを用いている。

$$b' \equiv |\boldsymbol{\beta}| / F^{1/n} \dots\dots\dots (68)$$

さて、正規降伏面からの隔たりの測度は、応力が正規降伏面に近づくにつれて小さくなるものでなければならない。しかし、Fig. 4 に例示するように、パラメーター  $b'$  は、添字  $a$  を付した状態より正規降伏面に近い添字  $b$  を付した状態における方がむしろ大きくなる場合を生じる。他方、本論文におけるパラメーター  $b$  はこのような不都合を生じない合理的な測度であると考えられる。なお、本図において、 $b \equiv \text{tr}(\bar{\mathbf{n}}\boldsymbol{\beta})\bar{\mathbf{n}} = bF^{1/n}\bar{\mathbf{n}}$  である。

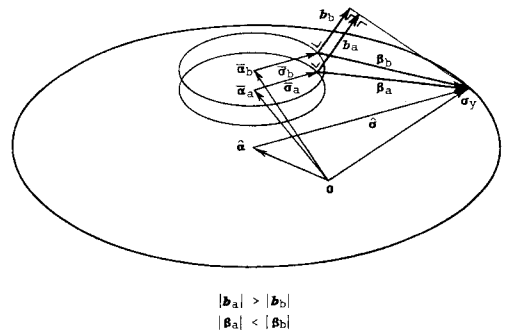


Fig. 4 Measures of distance from the distinct-yield state.

(3) 弾性領域消失の概念

Dafalias ほか<sup>9)</sup>および Mroz ほか<sup>10),15),16)</sup>は、二面塑性モデルにおいて下降伏面を点に縮退させる、つまり、弾性領域を消失させることを提案した。ここで正規降伏面上の共役点として、Dafalias ほかおよび Mroz ほかは、降伏面のそれぞれ核  $\hat{\mathbf{a}}$  および現在の応力  $\boldsymbol{\sigma}$  を通り、応力速度  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  に平行なベクトルの延長線の交点で与えておりいずれにおいても塑性ひずみ速度方向の応力速度方向への依存性が表現し得る。なお、後者においては応力が正規降伏面に近づくにつれて、この依存性が低下するのに対して、前者においては塑性ひずみ速度方向は応力状態には無関係であり、前者は物理的に受け入れがたい。

純粋弾性領域の仮定のもとに、応力空間を、これと弾塑性領域に区分し、負荷基準によりこれらのいずれの領域にあるかを判断して2種の構成式を使い分ける従来の弾塑性モデルと異なり、本概念においては、数学的に弾

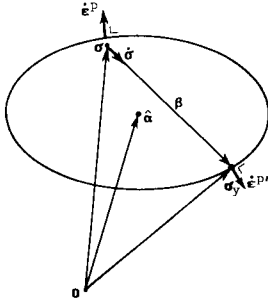


Fig. 5 An example of disproof for the idea of vanishing elastic domain (softening state).

塑性状態としての単一式を仮定するので、物理的に妥当であるとともに、解析・計算上も有利であるといえる。なお、正規降伏面からの隔たりの測度として、Dafaliasほか、Mrozほかは式(68)の $b'$ を用いている。しかし、これは $\beta$ を絶対値の形で含むので、現在の応力状態が正規降伏面の内外いずれにあるか判別できず、応力が正規降伏面から飛び出さないという保証はなし得ない。一方、式(45)の $b$ には、このような不備な面はみられない。

しかるに、いま一例として、Fig. 5のように正規降伏状態に近く顕著な塑性変形が生じる軟化状態を考えてみよう。本場合、上記のMrozほかの仮定によれば、共役応力は正規降伏面の反対側の点で与えられ、 $\beta$ は異常に大となる。ゆえに、このような軟化状態においては、本概念によれば、実際に生じると思われる塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^P$ とまったく異なった方向で、かつ、これよりはるかに小さい塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^{P*}$ が予測されることになる。

以上のように、弾性領域消失の概念は基本的には有利な面がみられるが、軟化状態には従来の定式化のままでは適用できず、今後の考察、発展に待たねばならない。

5. 結語：二面塑性モデルの応用について

本論文では、二面塑性モデルの数学的再構成を行ったが、その実在材料への応用にあたっては、含まれる諸物質関数を適切に特殊化せねばならない。代表的な弾塑性材料である金属および土に関して、主要な物質関数の妥当と思われる具体例を以下に記しておく。

金属に対して<sup>11)</sup>

$$f(\bar{\sigma}) = |\bar{\sigma}^*| \dots\dots\dots(69)$$

$$\dot{K} = |\dot{\epsilon}^{P*}| \dots\dots\dots(70)$$

$$A=0, B=B(K) \dots\dots\dots(71)$$

ここに、

$$\bar{\sigma}^* \equiv \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_m I \dots\dots\dots(72)$$

$$\bar{\sigma}_m \equiv \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\sigma} \dots\dots\dots(73)$$

$$\dot{\epsilon}^{P*} \equiv \dot{\epsilon}^P - \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_v^P I \dots\dots\dots(74)$$

土に対して<sup>17)</sup>

$$f(\bar{\sigma}) = \sqrt{\bar{\sigma}_m^2 + \left(\frac{|\bar{\sigma}^*|}{m}\right)^2} \dots\dots\dots(75)$$

$$F = F_0 \exp(-\epsilon_v^P/\rho) \dots\dots\dots(76)$$

$$A = \frac{m}{\rho M} F, B=0 \dots\dots\dots(77)$$

ここに、 $\rho$ 、 $m$  および  $M$  は物質定数であり、また、 $F_0$  は  $F$  の初期値である。

これらを導入した具体的な構成式さらには実測値との比較は、本論文とは異質な具体的問題に関するものであるので、新たな紙面において詳細に報告する。

最後に、本研究に際して、常に適切なご助言、ご意見を頂いた、名古屋大学教授 山口柏樹博士に、心より謝意を表す。

参考文献

- 1) Ishlinski, I. U. : General Theory of Plasticity with Linear Strain Hardening, Ukr. Mat. Zh., pp. 314~324, 1954.
- 2) Prager, W. : A New Method of Analyzing Stresses and Strains in Workhardening Plastic Solids, J. Appl. Mech., ASME, Vol. 23, pp. 493~496, 1956.
- 3) Masing, G. : Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing, Proc. 2nd Int. Congr. Appl. Mech., Zurich, 1926.
- 4) Mroz, Z. : On the description of Anisotropic Workhardening, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 15, pp. 163~175, 1967.
- 5) Iwan, W. D. : On a Class of Models for the Yield Behaviour of Continuous and Composite Theory, J. Appl. Mech., ASME, Vol. 42, pp. 641~646, 1967.
- 6) Dafalias, Y. E. and Popov, E. P. : A Model of Nonlinearly Hardening Materials for Complex Loading, Acta Mechanica, Vol. 27, pp. 173 ~ 192, 1975.
- 7) Krieg, R. D. : A Practical Two Surface Plasticity Theory, J. Appl. Mech., ASME, Vol. 42, pp. 641 ~ 646, 1975.
- 8) Dafalias, Y. F. and Popov, E. P. : Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity, J. Appl. Mech., Vol. 43, pp. 645~651, 1976.
- 9) Dafalias, Y. F. and Popov, E. P. : Cyclic Loading for Materials with a Vanishing Elastic Region, Nucl. Eng. Design, Vol. 41, pp. 293~302, 1977.
- 10) Mroz, Z., Norris, V. A. and Zienkiewicz, O. C. : Application of an Anisotropic Hardening Model in the Analysis of Elasto-Plastic Deformation of Soils, Geotechnique, Vol. 29, pp. 1~34, 1979.
- 11) Hashiguchi, K. : Constitutive Equations of Elastoplastic Materials with Anisotropic Hardening and Elastic-Plastic Transition, J. Appl. Mech., ASME,

- Vol.48, pp.297~301, 1981.
- 12) Ziegler, H. : A Modification of Prager's Hardening Rule, *Quart. Appl. Phys.*, Vol.17, pp.55~60, 1959.
  - 13) Drucker, D.C. : A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations, *Proc. 1st U.S. National Congr. Appl. Mech.*, ASME, Vol.1, pp.487~491, 1951.
  - 14) Mroz, Z., Norris, V.A. and Zienkiewicz, O.C. : An Anisotropic Hardening Model for Soils and its Application to Cyclic Loading, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.2, pp.203~211, 1978.
  - 15) Mroz, Z. and Norris, V.A. : Elasto-Plastic and Viscoplastic Constitutive Models for Soils with Anisotropic Loading, *Soil Mechanics-Transient Cyclic Loads* (eds. G.N. Pande and O.C. Zienkiewicz), John Wiley & Sons, Inc., pp.219~252, 1982.
  - 16) Mroz, Z. : On Hypoelasticity and Plasticity Approaches to Constitutive Model of Inelastic Behaviour of Soils, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.4, pp.45~55, 1980.
  - 17) Hashiguchi, K. : Constitutive Equations of Granular Materials (eds. J.T. Jenkins and M. Satake), Elsevier, pp.127~136, 1983.

(1984.11.27・受付)

---