

軸力を受ける鉄筋コンクリート棒部材の 材料非線形付着すべり解析*

NONLINEAR BOND SLIP ANALYSIS OF AXIALLY LOADED REINFORCED
CONCRETE PRISMATIC MEMBERS

上田正生**・土橋由造***

By Masaaki UEDA and Yoshizo DOBASHI

Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete prismatic members axially loaded in tension at both ends is described herein taking into account concrete cracking and steel yielding. Then, by using some numerical examples, discussions are made of (1) the effect of bond stress hysteresis inside the member on its stress distribution and crack width; as well as (2) that of concrete shrinkage on bond stress behaviors of the member.

1. はじめに

近年、世界の先進諸国において、RC構造の設計思想の主流になりつつある限界状態設計法では¹⁾、終局限界と使用限界に対する部材の安全性の検討に主眼が置かれており、RC構造の非弾性領域における変形性状の評価が、重要な課題となっている。

亀裂後のRC部材の直引張り、および曲げ変形挙動を理論的に予測する際の主たる困難は、亀裂発生後のコンクリートの引張り剛性（抵抗）をいかに評価するかにあり、これをどの程度正確に算定するかが、得られる解の精度を左右することになる。この被亀裂領域におけるコンクリートの引張り剛性は、鉄筋とコンクリートの付着作用の結果として生ずるものであるから、RC構造の変形挙動をより詳細に再現するためには、付着機構そのものを明らかにすることが必要である。

鉄筋からコンクリートへの力の伝達を支配する付着作用の重要性は、古くから認識されており、すでにこれまでにも、実験的のみならず理論的にも数多くの研究が行わ

れている。鉄筋とコンクリートの付着作用に関する既往の理論的な解析手法を大別すると、1)軸力のみを受けるRC棒部材を対象にした一次元付着すべり解析^{2)~10)}、2)ボンド・リンクを用いた二次元有限要素法によるRCはりの曲げ解析^{11)~14)}、3)付着現象を鉄筋近傍のコンクリートのせん断変形とみなして間接的に内部亀裂の影響を考慮する有限要素解析^{15)~17)}、4)通常のはり要素に付着すべりの効果を組み入れる解析手法等があり^{18)~20)}、付着現象を何らかの形で解析に取り入れるための多くの試みがなされている。これら既往の理論研究を概観すると、付着作用を鉄筋とコンクリートの界面における付着すべり現象としてとらえる立場が大多数を占めている。もちろん、実際の付着機構は、異形鉄筋の場合のように、鉄筋の近くのコンクリートに微細な内部亀裂を伴う複雑なものであるが²¹⁾、この現象をより単純化した付着すべり問題として取り扱う解析手法は、すでに多くの先駆の例が示すように、きわめて有用でありかつ妥当なものである。しかしながら、どの解法によるにせよ、付着作用を考慮してRC構造の変形挙動解析を行う場合に注意しなければならないのは、「実際のRC部材の中で起こっている鉄筋とコンクリートの付着作用は、亀裂の発生と進展に伴って、刻々と複雑に変化しながら推移する」という事実である。このことは換言すれば、「亀裂の逐次発生と

* 本報告の内容の一部は、土木学会北海道支部論文報告集第40号（昭和59年2月）に発表。

** 正会員 北海道大学助教授 工学部

（〒060 札幌市北区北13条西8）

*** 正会員 工博 北海道大学教授 工学部（同上）

ともに、断続的に縮小していく亀裂間隔をも追跡し得る解析手法を、確立することが必要なこと」を意味している。この観点からすれば、数多くある既往の理論解析のうちでも、計算を中断することなしに亀裂間隔まで表現し得るものは、きわめてわずかであり、しかもそれらのほとんどは、亀裂発生位置に新たな境界条件を導入しているため、亀裂の発生前と後では構造系が異なっており、結果的に解の連続性が失われている。本報告は、以上のような既往の研究の現状を踏まえ、軸力のみを受けるRC棒部材を対象として、コンクリートの亀裂と鉄筋の降伏を含む有限要素法による材料非線形付着すべり解析について述べたものである。ここで提案する解析手法では、長さのきわめて短い亀裂要素を導入することによって、要素の節点を分離することなしに亀裂現象を表示しているため、外荷重の増加とともに、散発的に発生するコンクリートの亀裂と、それに伴う亀裂幅の増大、および亀裂間隔の断続的な逐次減少をも、連続して追跡することが可能である。

2. エネルギー汎関数と支配微分方程式

RC部材のうちでも、軸力のみが作用する棒部材は、鉄筋とコンクリートの付着現象を純粋な型で具現する最も単純な構造であるため、過去の理論研究の多くもこれを対象にして行われているが、本報告では、このRC棒部材の付着作用を一次元付着すべり問題とみなして取り扱い、解析を進めることとする。

理論展開にあたって、次のような基本仮定を設ける

- ① コンクリートと鉄筋の材軸に垂直な横断面は、変形後も平面を保ち、それぞれの応力は断面内に一様分布するものとし、応力-ひずみ関係は線形弾性を仮定する。

② 材軸に垂直な方向の変形は無視する。

③ 鉄筋とコンクリートの界面には、材軸方向のすべりが生じ、ある位置における鉄筋のすべり変位は、その位置のコンクリート部分からの相対的なずれ変位で表わし、また、付着応力 τ とすべり変位 S の間には、部材内の位置に關係なく同一の線形關係が成り立つ。

上記の仮定に基づき、最小ポテンシャルエネルギー原理を用いて支配微分方程式を導くことを考える。任意の軸荷重に対して式を展開することが可能であるが、ここでは一例として、両端に鉄筋の引き抜き力の働く場合を取り上げてみる。図-1に示すように、部材の中央に座標軸を設定する。

全ポテンシャルエネルギー汎関数 H : 一般に、全ポ

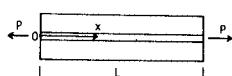


図-1 兩端に鉄筋の引き抜き力の作用する BC 檇部材

テンシャルエネルギーは次のように表わされる。

ここに、 U は外力の作用によって、構造系の内部に蓄えられる内部エネルギーで、一般にはひずみエネルギーを意味し、 V は外力がなす負荷ポテンシャルエネルギーを表わしている。

この場合の内部エネルギー U は次式で表示される

ここに、 U_{cn} と U_{st} は、それぞれコンクリートと鉄筋にかかるひずみエネルギーで、 U_{bs} は、鉄筋とコンクリートの界面に生ずる付着ポテンシャルとも称すべき内部エネルギーである。

このRC棒部材のコンクリート部分の材軸方向の変位を u 、コンクリートと鉄筋間の材軸方向のすべり変位を s とすると、任意の位置 x におけるコンクリートと鉄筋のひずみ ε_c と ε_s は、それぞれ次のようになる

また、付着応力 τ とすべり変位 S の間には、仮定③により次の関係が成立する

ここに、 $K_\mu : \tau$ と S を関係づける付着係数

したがって、コンクリートと鉄筋のヤング係数を、それぞれ E_c , E_s , 断面積を A_c , A_s , また鉄筋単位長さ当たりの付着表面積を A_{bs} とすれば、式(2)中の U_{cn} , U_{st} , U_{bs} は、おのおの次のようになる。

以上の関係より、部材の両端 ($x=0$, $x=L$) に鉄筋の引き抜き力 P が作用する場合の RC 棒部材の付着すべりに関する全ポテンシャルエネルギー汎関数 Π は、次式で表示することができる

$$II = \int_0^L \left[\frac{1}{2} \left(E_c A_c + E_s A_s \right) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + 2 E_s A_s \frac{du}{dx} \cdot \frac{dS}{dx} + E_s A_s \left(\frac{dS}{dx} \right)^2 + K_b \cdot A_{bs} \cdot S^2 \right] - P \left(\frac{du}{dr} + \frac{dS}{dr} \right) \right] dx \dots \dots \dots (9)$$

支配微分方程式：RC 棒部材の付着すべり現象を支配する基礎微分方程式は、式(9)の全ポテンシャルエネルギー H の停留関数として求められる。通常の変分手法に従い、変位 u と S に関する Euler-Lagrange 方程式を構成すると、以下の関係式を得る。

変位 u に関して,

$$E_c A_c \frac{d^2 u}{dx^2} + E_s A_s \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 S}{dx^2} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (10)$$

変位 S に関して,

$$E_s A_s \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 S}{dx^2} \right) = K_b \cdot A_{bs} \cdot S \quad \dots \dots \dots (11)$$

式 (10), (11) から $d^2 u / dx^2$ を消去し, 式 (5) の関係を用いて整理すると, よく知られた一次元付着すべりに関する基礎微分方程式が得られ, 下式となる.

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = A_{bs} \left(\frac{1+np}{E_s A_s} \right) \tau \quad \dots \dots \dots (12)$$

ここに, p : 鉄筋比 ($p = A_s / A_c$), n : 鉄筋とコンクリートのヤング係数比 ($n = E_s / E_c$)

また, 式 (3), (4) を用いて式 (10) および (11) を変形すると, 次のようになる.

$$A_c \frac{d\sigma_c}{dx} + A_s \frac{d\sigma_s}{dx} = 0 \quad \dots \dots \dots (13)$$

$$A_s \frac{d\sigma_s}{dx} = A_{bs} \cdot \tau \quad \dots \dots \dots (14)$$

ここに, σ_c : コンクリートの応力で $\sigma_c = E_c \epsilon_c$, σ_s : 鉄筋の応力で $\sigma_s = E_s \epsilon_s$

上の式 (13), (14) は, それぞれ軸方向の力のつり合い式と, 鉄筋の力のつり合い式である.

3. 有限要素法による付着すべり解析

RC 棒部材の非線形な付着すべり挙動を解析するためには, 前章の全ポテンシャルエネルギー汎関数に基づいて有限要素法への定式化を試みる.

(1) 線形付着すべり解析

非線形解析を行うのに先立ち, コンクリートと鉄筋の応力-ひずみ性状, および付着応力 τ とすべり変位 S の間の関係が, ともに線形関係にある最も基本的な場合を対象として, 変位 u と S に, 高・低 2 種の形状関数を用いて解析を行ってみる.

a) 一次の形状関数を用いた要素

変位 u と S に一次の形状関数を用いた図-2 に示す要素は, この問題に対する最も単純な型であり, 変位 u と S は次のように表示される.

$$u = [1 \ x] \begin{Bmatrix} d_{u1} \\ d_{u2} \end{Bmatrix} = [f_u] d_u \quad \dots \dots \dots (15)$$

$$S = [1 \ x] \begin{Bmatrix} d_{s1} \\ d_{s2} \end{Bmatrix} = [f_s] d_s \quad \dots \dots \dots (16)$$

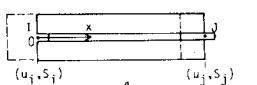


図-2 一次形状関数要素

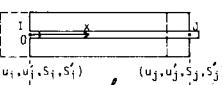


図-3 三次の形状関数要素

上 2 式中の一般化変位 $|d_u|$ と $|d_s|$ は, 式(15)および(16)の各式に, 節点 I, J の座標 ($X=0, X=l$) を代入し, u と S を対応するそれぞれの節点変位 (u_i, u_j および s_i, s_j) と等置することにより求められ, 次式を得る.

$$|d_u| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [C_1]^{-1} |\delta_u| \quad \dots \dots \dots (17)$$

$$|d_s| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_i \\ s_j \end{Bmatrix} = [C_1]^{-1} |\delta_s| \quad \dots \dots \dots (18)$$

ここで, $|\delta_u| = |u_i, u_j|^T$, $|\delta_s| = |s_i, s_j|^T$

変位 u と S の一次導関数は式 (17), (18) を式 (15), (16) に代入し, x に関して微分して得られ下式となる.

$$u' = \frac{du}{dx} = [0 \ 1] [C_1]^{-1} |\delta_u| \quad \dots \dots \dots (19)$$

$$S' = \frac{dS}{dx} = [0 \ 1] [C_1]^{-1} |\delta_s| \quad \dots \dots \dots (20)$$

式 (16) および (19), (20) を前章の汎関数式 (9) に代入し, 変分をとることによって, 下に示す線形付着すべり解析のための剛性マトリックスを得る.

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{us} \\ K_{us}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_u \\ \delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_u \\ P_s \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (21)$$

ここで P_u : 鉄筋とコンクリートに一様に作用する節点外荷重, P_s : 付着境界に作用する節点外荷重

b) 三次の形状関数を用いた要素

材料性状が全構造系にわたって一様な場合には, より高次の形状関数を採用する方が精度上有利となる. ここで変位 u と S に三次の関数を用いた理由は, 「鉄筋とコンクリートの界面に生ずる付着応力を, 式 (5) のすべり変位からだけでなく, 式 (14) の鉄筋応力からも得ること」を意図したところにある. 図-3 に示すように, この要素は両端の節点にそれぞれ 4 個の節点変位を有している. 変位 u と S は, 一般化変位 $|d_u|$ と $|d_s|$ を用いて次のように書かれる.

$$u = [1 \ x \ x^2 \ x^3] |d_{u1} \ d_{u2} \ d_{u3} \ d_{u4}|^T = [f_u] d_u \quad \dots \dots \dots (22)$$

$$S = [1 \ x \ x^2 \ x^3] |d_{s1} \ d_{s2} \ d_{s3} \ d_{s4}|^T = [f_s] d_s \quad \dots \dots \dots (23)$$

この要素に対する剛性マトリックスは, 前項 a) の一次形状関数の場合と同様の手順により, 前項の式 (21) と相似な型で求めることができる.

(2) 非線形付着すべり解析

RC 棒部材の非線形な付着作用を, 一次元問題として取り扱った既往の解析としては, Rehm, Holmyanski, 森田ら, 中田, 池田, 山本ら, 森田・角, Schafer, Tassios ら, 周ら^{31~33}, 数多くの有用な研究があるが, これらのほとんどは, あらかじめ設定された亀裂間隔を対象としたものであり, 材軸を横切って貫通するコンク

リートの亀裂の発生を考慮してはいない。亀裂の逐次発生をも表現し得るものとしては、青柳らの報告があるが⁸⁾、この研究では亀裂が生ずるたびに、その位置に新たな境界条件を導入し、再度計算をやり直す方法を用いているため、解の連続性が失われており、載荷履歴の影響が無視されている。

ここでは、コンクリートの引張り側での亀裂の発生と、圧縮側における非線形な応力-ひずみ性状、鉄筋の降伏、および非線形な付着応力-すべり挙動をも、連続して追跡することが可能なRC棒部材の繰り返し載荷を含む材料非線形付着すべり解析手法について記述する。

a) 仮定事項

非線形解析を行うために設定した仮定事項を以下に列挙する。

① コンクリートと鉄筋の応力-ひずみ、および付着応力-すべり関係は、部材全体にわたって同一の性質を有し、亀裂は材軸に垂直に生ずるものとする。

② 前節(1)で展開した一次の形状関数要素を採用し、接線剛性を用いた荷重増分・反復法により解析を行うこととし、構成材料と付着すべり性状の非線形性に起因して生ずる非つり合い応力を、初期応力とみなしてこれと等価な節点荷重に変換し、全構造系に分散させることによって解除する。

③ 引張り力を受ける部材を取り扱う場合には、亀裂の発生が予想される位置に、要素長のきわめて短い亀裂要素を分散して配置しておき、亀裂はこの要素に選択的に発生させる。

これらのうち、①の「部材内のあらゆる位置で同一の付着応力-すべり関係が成り立つ」という仮定には、多少の議論の余地はあるが、異形鉄筋に関しては、十分な妥当性のあることが森田らによって確かめられている。また、②の仮定の採用により、各増分段階においては、Piecewise Linear(部分的線形)が適用されるので、個々の増分区間では、先の式(10)の汎関数がそのまま有効であり、前節(1)の線形解析手法を増分形で表示することにより、繰り返し使用することが可能となる。

b) 材料性状と構成関係

1) コンクリートの応力-ひずみ関係

単調載荷時のコンクリートは、図-4に実線で表示するように、引張り側では線形弾性($E_{tc}=E_0$)が成立するが、引張り強度 σ_{ct} (T点)を超えると亀裂が生じて、その時点で急激に応力を失うものとし、圧縮側での応力-ひ

$$\sigma_c = \frac{E_0 \epsilon_c}{1 + (E_0/E_{cs} - 2)(\epsilon_c/\epsilon_{cc}) + (\epsilon_c/\epsilon_{cc})^2} \quad (24)$$

ただし、 E_0 、 E_{cs} 、 σ_{ct} 、 ϵ_{cc} 、 ϵ_{cs} : 図-4を参照
ずみ曲線は、圧縮強度 σ_{cc} (C点)に達するまで式(24)に示すSaenzの曲線で表示でき、C点で剛性を失い(E_{tc}

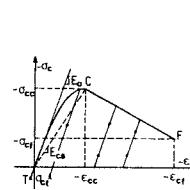


図-4 コンクリートの仮定

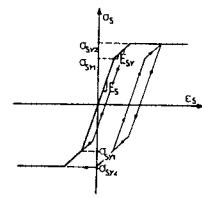


図-5 鉄筋の仮定応力-ひずみ関係

$=0$), C点からF点までは直線に従って徐々に応力を減らしていく、F点に至って全応力を消失するものと仮定する。したがって、任意のひずみ ϵ_c に対応する接線ヤング係数 E_{tc} は、次式で表示される。

$$E_{tc} = \frac{d\sigma_c}{d\epsilon_c} \quad (25)$$

また、繰り返し載荷に対しては、荷重の繰り返しによる剛性的低下を無視し、同図中に矢印でその方向を示した初期接線係数 E_0 に等しい傾きをもつ除荷および再載荷経路を仮定する。

2) 鉄筋の応力-ひずみ関係

鉄筋はtrilinear型の弾塑性材料として取り扱うこととする。図-5に単調増載荷、および繰り返し載荷時の仮定応力-ひずみモデルを掲げた。

3) 付着応力-すべり関係

RC部材の中に埋め込まれた鉄筋とコンクリートの界面における付着すべり挙動を、解析によって精度よく再現するためには、部材内部で実際に生じている付着応力-すべり(以下 $\tau-S$ と略記)関係を、可能な限り忠実な型でモデル化することが必要となる。

① 単調載荷時の $\tau-S$ モデル

本報告では、あらゆるタイプの $\tau-S$ 曲線が表示可能なように、図-6に示す5本の直線(①~⑤)からなる折れ線を用いて、単調載荷時の $\tau-S$ 曲線をシミュレートすることにする。すなわち、付着破壊(C点)以前をtrilinearの3本の直線①、②、③で表示し、付着係数として K_{b1} 、 K_{b2} 、 K_{b3} を、また④、⑤では、 $K_{b4}=K_{b5}=0$ を設定し、0からA点まで(直線①)は回復可能な弾性変形として、またA点以降(直線②~⑤)の変形には回復不能な塑性すべりが含まれるものとして取り扱う。これらの仮定のうち、付着破壊(C点)後

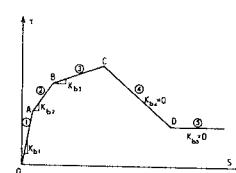
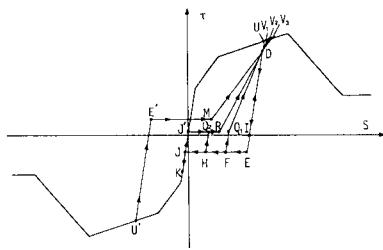


図-6 単調載荷時の仮定 $\tau-S$ モデル

図-7 繰り返し載荷時の仮定 τ - S モデル

の直線④, ⑤は、残留付着応力を規定し、解除すべき非つり合い応力を算定するために必要となる。

② 繰り返し載荷時の τ - S モデル

繰り返し載荷時における τ - S 関係を取り扱った実験データは、単調載荷時のそれに比べてきわめて少ないので現状であり、RC 部材の復元力特性の評価を目的とした既往の理論解析においても、それぞれ異なった τ - S モデルを設定して解析を行っている。したがって、現時点では、繰り返し荷重下における τ - S 関係の普遍的な法則化は、困難であるが、本報告では、既往のモデルのうちで最も優れていると思われる森田・角の構成則⁷⁾に準拠して、 τ - S 関係をモデル化することとする。

図-7 は、ここで設定した τ - S モデルの代表的な除荷、および再載荷経路を図示したものである。図中の U 点が除荷開始点を、また F, H, K, U' 点は、考え得る再載荷開始点の典型を、さらにまた、V_i は再載荷による単調載荷曲線への復帰点を、それぞれ表わしている。したがって、本モデルで表示可能な 1 サイクル当たりの繰り返し載荷経路は、次の 4 種である。

- イ) U → E → F → Q₁ → D → V_i(ただし $\tau_q > \tau_b$ のとき)
- ロ) U → E → H → Q₂ → R → D → V₂
- ハ) U → E → J → K → J' → R → D → V₃
- 二) U → E → J → U' → E' → M → D → V₄

除荷区間 U-E と再載荷区間 F-Q₁, H-Q₂, U'-E' の傾きが、初期付着係数 K_{b1} に等しい値をとるものとすれば、上記の全経路は、i) E, E', Q_i の τ 座標の値と、ii) D, I, M, R 各点の座標値 (τ , S) を、与えることによって決定することができる。これらの各点を規定するために、本モデルで用いた座標値を、以下に列記する。

i) E, E', Q_i 点の τ 座標値

$$\begin{aligned} \tau_E &= -\eta \tau_u \\ \tau_{E'} &= -\eta \tau_v \\ \tau_{Q_i} &= \tau_{Q_2} = -\eta \tau_E \end{aligned} \quad | \quad \dots \dots \dots \quad (26)$$

ii) D, I, M, R 点の座標値 (τ , S)

$$\begin{aligned} \tau_D &= \beta \tau_u, \quad S_D = S_u - (1-\beta) \tau_u / K_{b1} \\ \tau_I = 0, \quad S_I &= S_u - \tau_u / K_{b1} \\ \tau_M &= \tau_E, \quad S_M = (3S_E + S_E) / 4 \\ \tau_R &= \tau_Q, \quad S_R = S_I / 2 - (1+\eta) \tau_E / K_{b1} \end{aligned} \quad | \quad \dots \dots \dots \quad (27)$$

ただし、 $S_M > S_R$ のときは、 $S_M = S_R$ とする。また、 $\eta = 0.18$, $\beta = 0.9$ とする。

上記の本 τ - S モデルを規定する各点の座標値は、比較的大きなすべり変位振幅を対象にした森田らの再載荷時の τ - S 基本則を、すべり変位の小さな領域をも取り扱い得るように、一部修整を加えて設定したものである。

c) 非つり合い応力の等価節点力への変換

本報告では、接線剛性を用いて各荷重増分段階ごとに解析を行っているため、外荷重の増加につれて、部材内の各部の要素には、材料性状等の非線形性に起因するさまざまな非つり合い応力が発生する。これらの非つり合い応力は、初期応力とみなされ、構造系はこの初期応力の作用により、荷重の増加なしにさらに変形することになる。いま、ある荷重増分段階にある任意の要素を考える。この要素のコンクリート、鉄筋、および両者の境界に、それぞれ $\Delta_i \sigma_c$, $\Delta_i \sigma_s$, $\Delta_i \tau$ なる非つり合い応力が存在するものとすると、これと等価な節点荷重は、仮想仕事の原理を用いて求められ、下式となる。

$$|\Delta_e P_u| = (A_c \cdot \Delta_i \sigma_c + A_s \cdot \Delta_i \sigma_s) [C_1^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 \\ l \end{bmatrix} \dots \dots \dots \quad (28)$$

$$|\Delta_e P_s| = [C_1^{-1}]^T \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ l \end{bmatrix} A_s \cdot \Delta_i \sigma_s + \begin{bmatrix} l \\ l^2/2 \end{bmatrix} A_{bs} \cdot \Delta_i \tau \right\} \dots \dots \dots \quad (29)$$

ここに、 $|\Delta_e P_u|$, $|\Delta_e P_s|$ は、それぞれ式 (21) の P_u , P_s に対応する等価節点荷重

d) 非線形解析手法

本研究で採用している解析手法は、既往の有限要素法による材料非線形解析において広く用いられている一般的なものであり²³⁾、解析手順そのものを、改めて詳述する必要は認められないで、ここでは、本報告に特徴的な事項についてのみ、記述することとする。

1) 収束条件

各荷重増分段階での解の収束を判定するために、本解析で使用した条件は、下式のとおりである。

$$\Delta S_{max} < 0.001 \text{ mm} \dots \dots \dots \quad (30)$$

ここに、 ΔS_{max} ：各繰り返し計算ごとに求められる全節点すべり変位増分のうちの最大値

2) 亀裂荷重を求めるための荷重増分量の決定手法

一般に、増分手法により RC 部材の材料非線形解析を行う際には、一定の大きさの荷重増分を使用するか、あるいは、終局荷重に近い非線形性の著しい領域においてのみ増分量を小さくする手法をとることが多いが、本報告では、引張り荷重の作用する部材を解析する場合には、亀裂発生時の荷重を精度よく求めるために、各荷重段階ごとに増分量の調整を行う次のような手法を用いている。すなわち、いま、ある荷重ステップ n での計算を開始するにあたって、ここで適用すべき荷重増分

ΔP_n の決定手法を、以下に略記する。ただし、任意の定荷重増分 ΔP_0 は解析前の入力データとしてすでに与えられているものとする。

① 前ステップ $n-1$ の計算終了時点で、コンクリートの引張り応力が最大の要素を探し出し、この要素のコンクリートの全応力 $\sigma_{c\ max}$ と、このステップでの応力増分量 $\Delta\sigma_{c\ max}$ を記憶しておく。

② n ステップの開始時には、まず仮に定荷重増分 ΔP_0 を与えた場合の、この要素のコンクリートの予想全引張り応力 $\sigma_c \text{ pre}$ を、次式により求める。

ここに、 ΔP_{n-1} : $n-1$ ステップでの荷重増分
もし σ_c pre が引張り強度 σ_{ct} より小さければ、
 $\Delta P_n = \Delta P_0$ (32)

また、 $\lambda > \lambda_{\text{critical}}$ であれば、急型が発生する可能性がある。

また、 $\sigma_{\text{c}\text{re}} > \sigma_{\text{ct}}$ であれば、亀裂が発生する可能性があるから、より正確な亀裂荷重を得るため、荷重増分 ΔP_n は下式を用いて調整される。

$$\Delta P_n = \Delta P_{n-1} \left(\frac{\sigma_{ct} - \sigma_{c \max}}{\Delta \sigma_{c \max}} + \zeta \right) \dots \dots \dots \quad (33)$$

ここに、 ξ :亀裂の発生を早めるための加速係数で、本報告では、数値計算による検討の結果、上式中の係数 ξ の値として、 $\xi=0.0001$ を使用している。

3) 龜裂の亀裂要素への選択導入

RC 棒部材が、引張り荷重を受けてコンクリート部分に亀裂が生ずる場合、その亀裂は、部材内に適当な間隔をおいて配置してある亀裂要素に選択的に発生させる必要がある。もちろん、コンクリートの引張り応力が、荷重の増加に伴って、順次最大値をとり得る位置に亀裂要素を設置しておき、その亀裂要素の応力のみがコンクリートの引張り強度に等しくなるような荷重増分を、逐一正確に求めることができれば、理論的には何らの問題も生じない。しかしながら、隣接する他の要素は無傷のまま、亀裂要素だけに亀裂を発生させ得るような荷重増分量を正確に求めることは、実際上きわめて困難である。したがって、本報告では、亀裂を亀裂要素に選択的に発生させるため、「他の要素のコンクリートの引張り強度 σ_c を、亀裂要素のそれより幾分大きく設定する」という便宜的な追加仮定を導入することとした。この追加仮定は、次式で表わされる。

ここに、 $\bar{\sigma}_{ct}$:亀裂要素以外の要素のコンクリートの引張り強度、 λ :引張り強度割増し係数で、ここでは $\lambda=1.01$ を用いている。

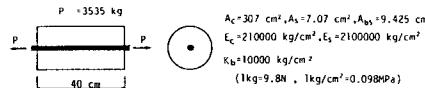
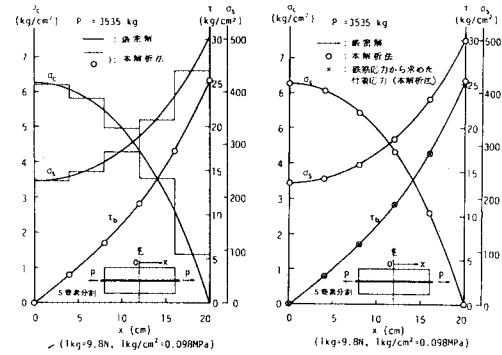


図-8 福田の計算モデル²⁾



(b) 3 次関数要素

4. 数値計算結果とその考察

(1) 線形計算例

3.(1)で展開した線形解析法の解の精度を調べるために、図-8に示す文献2)の福田の計算モデルを用いて解析を行った。図-9の(a)と(b)には、ともに5要素分割を用いた一次、および三次の形状関数による本解析結果を、コンクリート、鉄筋、および付着の各応力について、それぞれ厳密解と比較して掲げた。これらの図の結果は、両者とも、かなり粗い要素分割を使用しているにもかかわらず、十分な精度で理論値に近似することを示している。また、前述したように、三次の関数を用いた要素では、付着応力はすべり変位からだけではなく、式(14)の関係により、鉄筋の応力からも算出することができる所以、図(b)には参考のため、この値をも併記したが、両解析値はきわめてよく一致している。

(2) 非線形計算例

a) 既往の実験供試体の解析

軸力を受けるRC部材の代表的な2つの載荷形態である引き抜き、および両引き載荷の、既往の著名な実験供試体各1体を選んで解析を行うこととする。

① 山本らの引き抜き試験体の解析

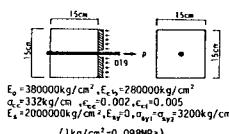
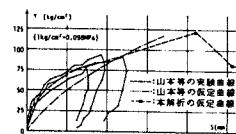


図-10 山本らの引き抜き
試験体⁵⁾



圖—11 σ -S曲線

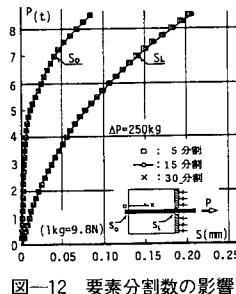


図-12 要素分割数の影響

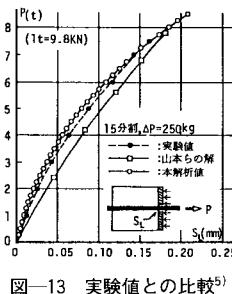
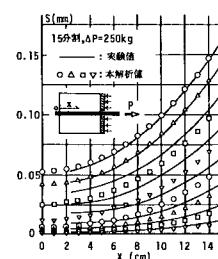
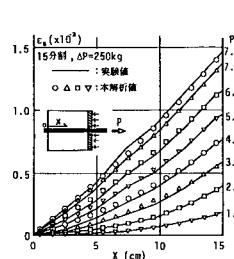
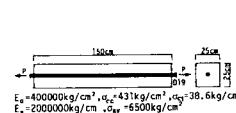
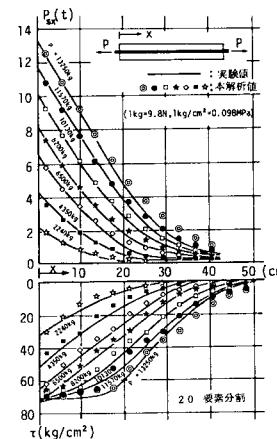
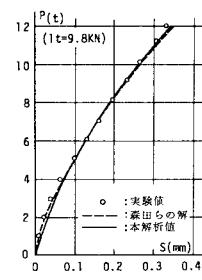
図-13 実験値との比較⁵⁾

図-10に、山本らの引き抜き試験体⁵⁾の概要と材料の力学性状を、また図-11には、 τ -S曲線の実験値と、著者および山本らのシミュレート曲線を対比して掲げる。ここではまず、この試験体を対象にして、要素分割数の違いが、解に及ぼす影響について検討を行った後、実験結果との比較・考察を試みる。

イ) 要素分割数の影響 前節(1)の線形解析例においては、5分割程度で十分な精度が得られることを明らかにしたが、これは、材料および付着剛性が部材全体にわたって変化しない線形領域に対してのみいえることであって、材料、ならびに付着性状が各要素ごとに、刻々変化する非線形解析の場合には、この結果をそのまま適用することはできない。図-12は、分割数5、15、30の3種に対する載荷端($x=L$)と自由端($x=0$)の荷重-すべり曲線に及ぼす要素分割の影響を比較したものである。図によれば、要素分割数の最も粗い5分割の載荷端のすべり曲線には、高荷重領域において曲線の傾きが幾分大きくなる傾向が認められるが、全体的にはさほど大きな違いはなく、また特に分割数15と30の解はほとんど一致しており、この試験体の解析には、要素分割数として15程度を用いれば十分であることを知る。

ロ) 実験結果との比較 前項イ)の検討結果より、実際の計算には要素分割数15を用いることにする。図-13は、載荷端における荷重-すべり曲線を、また図-14と15は8つの荷重段階に対する、材軸に沿うすべり変位と鉄筋ひずみ分布の推移状況を、実験値と比較したものである。本解析値は、いずれの場合も実験結果との

図-14 すべり曲線の実験値
との比較⁵⁾図-15 鉄筋ひずみ分布の
実験値との比較⁵⁾図-16 森田らの両引き抜き
試験体³⁾図-17 τ -S曲線図-18 材軸に沿う鉄筋合力 P_{sx}
および付着応力 τ の分布
の推移³⁾図-19 荷重-すべり
曲線の比較³⁾

良好な対応をみており、引き抜き試験における実際の付着すべり挙動を、ほぼ再現し得ることを示している。

② 森田らの両引き試験体の解析

図-16に、部材両端の鉄筋に引き抜き荷重の作用する森田らの試験体³⁾の概要を、図-17には、実験 τ -S曲線と解析に用いたシミュレート曲線を示す。この実験は、 τ -S関係に主眼を置いていたため、コンクリートと鉄筋はともに弾性領域にあり、貫通ひびわれの生ずるおそれがないので計算にあたっては亀裂要素を導入せずに、半部材長(対称性を考慮)を20等分割して、荷重増分 $\Delta P_0=1100\text{ kg}$ を用いて解析を行った。図-18は7段階の荷重に対する、材軸に沿う鉄筋の合応力 P_{sx} と付着応力 τ の分布を、それぞれ実験値と比較したものである。図によれば本解析値は、載荷端から遠く離れた位置においては、 P_{sx} 、 τ ともに実験値よりも大きめの値を与えており、実験曲線の全体的な傾向はかなりよく表現している。また、図-19には、本解析値と森田らの実験および解析結果を、載荷端の荷重-すべり曲線で対比して掲げたが、これらの各曲線の間には良好な近似が認められ、本非線形解析法が十分な妥当性を有していることを知り得る。

b) 両引きモデル試験体の解析

亀裂を含む両引きRC棒部材については、すでにおびただしい数の実験データが報告されているが、著者の

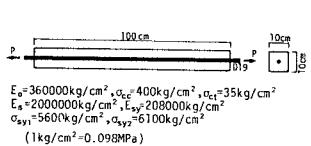
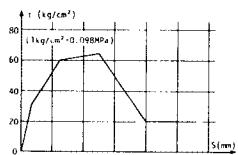


図-20 両引きモデル試験体

図-21 仮定 τ -S 曲線

知る限りでは、本解析法を用いて計算する場合に必要となる τ -S 曲線をも具備した信頼し得るデータは見当たらぬようである。したがってここでは、モデル試験体を設定して数値実験を行い、コンクリートの亀裂および鉄筋の降伏を含む RC 棒部材の非線形付着すべり変形挙動について若干の検討・考察を試みる。図-20 と 21 には、それぞれこのモデル RC 部材の概要と、計算に用いた仮定 τ -S 曲線を掲げる。なお、解析に際しては、半部材長を 80 等分した後、コンクリートの亀裂を表示するための亀裂要素（要素長=0.0001 mm）を、部材中央を含む位置に 10 要素おきの等間隔 (6.25 cm) で 8 個、また材軸に沿う応力分布をより精度よく求めるため、亀裂要素の両側に長さ 0.01 mm の通常要素各 1 個をそれぞれ分散配置し、合計 104 要素を用いて計算を行った。

① 単調載荷時の付着すべり挙動

図-22 は、単調増加荷重を受けるモデル試験体の、載荷時以前に生じ得るコンクリートの乾燥収縮ひずみを無視した場合の計算結果を荷重-平均ひずみの関係で図

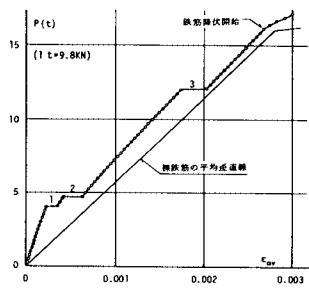


図-22 荷重-平均ひずみ曲線

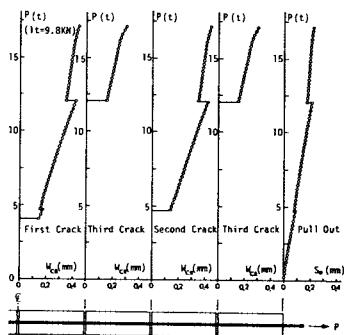


図-23 荷重-亀裂幅、および-材端すべり曲線

示したものである。解析曲線上に明瞭に認められる階段状の水平な部分は、亀裂の発生に伴う鉄筋の急激な抜け出しに起因して生ずるもので、これらの各部に記入した数値は、First crack 以後の亀裂の発生順位を表わしている。またこの解析曲線は、RC 部材が亀裂の発生のたびごとに急速に剛性を失い、しだいに同図中に併記した裸鉄筋の平均ひずみの値に近づいていくことを示している。図-23 には亀裂幅がどのように拡大形成されていくかを調べるために、各亀裂位置の荷重-亀裂幅曲線、および、材端の荷重-抜け出し曲線を掲げたが、図の結果は、「ある場所に新たに亀裂が発生する場合、すでに亀裂の生じている他の位置では、応力の再配分によって亀裂幅の一時的な縮小が起こり、各位置の亀裂幅を均等化しようとする動きが認められるが、それでもなお亀裂発生時の荷重差の大きい新・旧の亀裂間（たとえば、Third Crack とそれ以前の Crack）には、かなり大きな亀裂幅の開きが残る」ことを示唆している。また図-24 は、このモデル部材の 5 つの荷重段階に対するコンクリート、鉄筋および付着の各応力の分布形状を例示したものである。図の結果から、材軸に沿う各応力の分布形状は、荷重の増加に伴う亀裂の発生のたびごとに、大きく変化しながら推移しており、部材の受け持つ軸応力分担が付着応力を介してコンクリートから鉄筋へとしだいに移行していく様子を読み取ることができる。この付着応力分布の荷重 $P=12.077$ t 以後の曲線における、各亀裂間隔中央近傍の比較的低応力の水平に近い曲線部分は、Third Crack ($P=12.077$ t) の発生以前に、この部分が受けた付着応力の載荷履歴の影響によって生じたものである。すなわち、これらの曲線部分は、Third Crack の発生に伴って生じたすべり方向の逆転による各

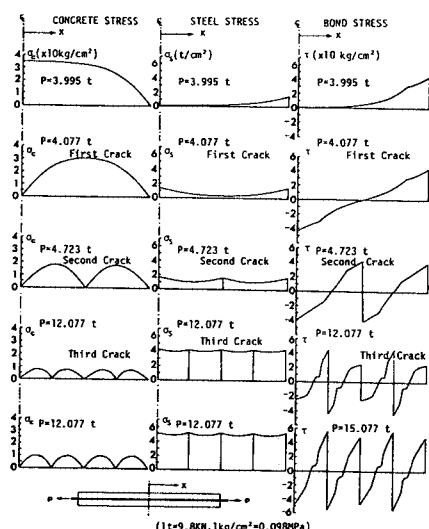


図-24 材軸に沿う各応力分布の推移

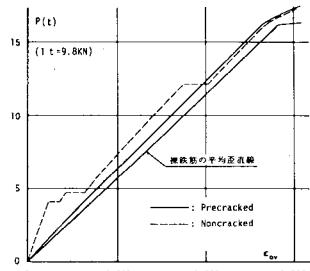


図-25 既亀裂試験体の荷重-平均ひずみ曲線

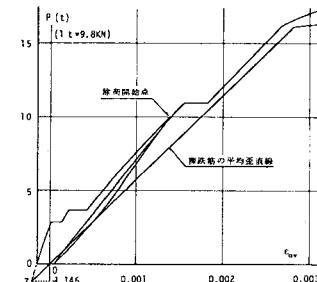


図-28 荷重-平均ひずみ曲線

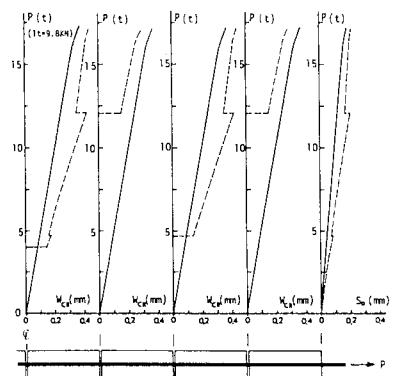


図-26 既亀裂試験体の荷重-亀裂幅、および-材端すべり曲線

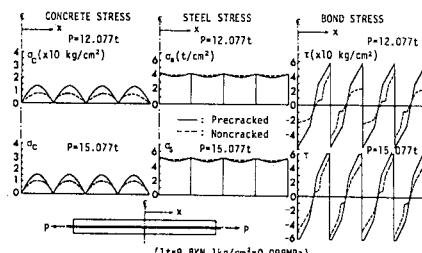


図-27 既亀裂試験体の材軸に沿う各応力分布

部の除荷の影響の名残を表わしている。図-25, 26, 27は、付着応力の載荷履歴の考慮の有無が、Third Crack以降における部材の荷重-平均ひずみ曲線、荷重-亀裂幅曲線、および材軸に沿うコンクリート、鉄筋、付着の各応力分布形状に、どのような影響を及ぼすかを調べるために、このモデル試験体にあらかじめ Third Crackの時点と同じように亀裂を入れておいた場合の、既亀裂モデル試験体の解析を行って、これに対応する先の図-22, 23, 24の結果と、それぞれ比較したものである。これらの各図には、載荷履歴の考慮の有無の差が明瞭に表れており、載荷履歴を無視すると、亀裂幅はすべての位置で同じ大きさとなり、また材軸に沿うコンクリートと付着の各応力分担を過大に評価することを示している。

② 繰り返し載荷時の付着すべり挙動

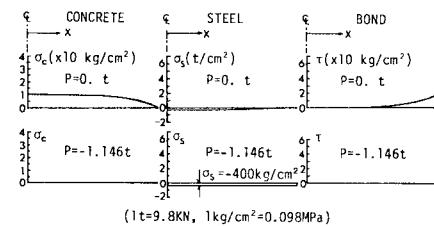
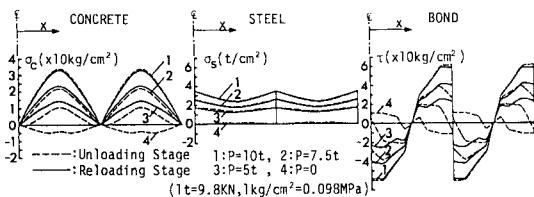
図-29 $P=0, P=1.146 t$ のときの材軸に沿う各応力分布

図-30 除荷および再載荷時における各応力分布の推移

繰り返し荷重を受ける部材の計算例を示すために、処女載荷途上の荷重 $P=10\text{ t}$ の時点から $P=0$ まで除荷し、再び鉄筋が降伏するまで載荷した場合の解析を行つてみる。ただし、この試験体のコンクリートには、載荷開始前に乾燥収縮ひずみ $\epsilon_{sh}=-0.0002$ が生じているものとする。図-28に、この部材の荷重-平均ひずみ解析曲線を示す。図からも明らかなように、この部材には載荷開始前に、コンクリートの収縮によって負の平均ひずみが生ずるため、荷重 $P=0$ におけるこの解析曲線と裸鉄筋の平均ひずみは一致しない。図中には参考のため、この試験体に逆方向の押し込み荷重を加え、本解析曲線と裸鉄筋のひずみ直線の交差する位置 Z を求めたときの計算結果を併記した。図-29には、載荷前 ($P=0$) と Z 点における、材軸に沿うコンクリート、鉄筋、付着の各応力分布を例示したが、 $P=0$ ではコンクリートの乾燥収縮の影響によって、コンクリートと鉄筋には、それぞれ引張応力と圧縮応力が生じており、また、 Z 点においては、コンクリートと付着はともにゼロ応力状態にあり、鉄筋にのみ一様な圧縮応力 ($\sigma_s=-400\text{ kg/cm}^2$) が生じている。また図-30には、 $P=10\text{ t}$ から $P=0$ の4段階の荷重に対するコンクリート、鉄筋、付

着の各応力の、除荷および再載荷時における材軸に沿う分布を対比して掲げたが、これらの各応力分布には、荷重の繰り返しによる付着劣化の影響が明瞭に現われている。

5. 結 言

本報告は、軸方向の力のみが作用する RC 棒部材を対象として、全ポテンシャル・エネルギー汎関数に基づく有限要素法による材料非線形付着すべり解析手法について述べたものである。4. の数値計算例では、線形解の精度および非線形解の性質を調べた後、既往の試験体二体を選んで実験結果との比較・検討を行い、コンクリートに引張り貫通亀裂の生じない場合に対する本非線形解析法の妥当性を検証し、さらにまた、両引きモデル試験体を設定して亀裂の発生を伴う場合の、単調載荷および繰り返し載荷時（コンクリートの乾燥収縮を含む）の解析例を示して、1) 新・旧亀裂の亀裂発生時の荷重差が大きければ、付着応力の載荷履歴の影響により亀裂幅は新しい方が旧いものより小さくなる、2) 載荷履歴を無視するとコンクリートと付着の応力分担が過大評価され全亀裂幅が等しい値となること、等を指摘した。

なお、本報告で提案した付着すべり解析法の基本的な考え方方は、鉄筋コンクリートはりおよびスラブに拡張して適用することが可能であり、これら他の RC 部材の材料非線形付着すべり問題については、後日稿を改めて報告する予定である。

謝 辞：貴重な実験資料を転載させて頂いた大成建設技術研究所 山本康弘博士と京都大学教授 森田司郎博士に、深甚なる謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 岡村 甫：コンクリート構造の限界状態設計法、共立出版、1978.
- 2) 福田武雄：軸方向力を受くる鉄筋コンクリート部材における、応力分布に関する二、三の理論的問題について、土木学会誌、第 19 卷、第 2 号、1933-3.
- 3) 六車 熙・森田司郎・富田幸次郎：鋼とコンクリートの付着に関する基礎的研究、建築学会論文報告集、第 131、132、134、139 号、1967-1, 2, 4, 9.
- 4) 中田慎介：付着特性を考慮した鉄筋コンクリート部材の復元力特性に関する研究、建築学会関東支部研究報告集、第 41 号、1971-1.
- 5) 中島 亨・山本康弘：鉄筋コンクリートの付着応力度の履歴とひびわれの復元性に関する研究、土木学会論文報告集、第 219 号、1973-11.
- 6) Safer, H. : A Contribution to the solution of contact problems with the aid of bond element, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, V. 6, 1975.
- 7) 森田司郎・角 徹三：繰り返し荷重下における鉄筋とコンクリート間の付着特性に関する研究、建築学会論文報告集、第 229 号、1975-3.
- 8) 青柳征夫・佐藤良一：低温度下における鉄筋コンクリート引張り部材の変形とひびわれ性状、セメント技術年報、V. 32, 1978.
- 9) Tassios, T. P. and Yannopoulos, P. J. : Analytical studies on reinforced concrete members under cyclic loading based on bond stress-slip relationships, ACI. Journal, V. 78, 6, 1981.
- 10) 周 礼良・山尾芳秀・岡村 甫：定着長が長い場合の局部付着応力—すべり関係について、第 5 回コンクリート工学年次講演会講演論文集、1983-6.
- 11) Ngo, D. and Scordelis, A. C. : Finite element analysis of reinforced concrete beams, ACI. Journal, V. 64, 3, 1967.
- 12) Nilson, A. H. : Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method, ACI. Journal, V. 65, 3, 1968.
- 13) 黒正清治・滝口克巳：有限要素法による鉄筋コンクリート部材の二次元非線形解析、建築学会論文報告集、第 189 号、1971-11.
- 14) 小坂義夫ほか：鉄筋とコンクリート間の付着特性について、セメント技術年報、V. 27, 1973.
- 15) 黒正清治ほか：異形鉄筋とコンクリートの付着に関する基礎的研究、建築学会昭和 49 年度講演梗概集、1974-10.
- 16) 野口 博：有限要素法による鉄筋コンクリートの非線形解析、建築学会論文報告集、第 258, 261, 262 号、1977-8, 11, 12.
- 17) 池田尚治：鉄筋コンクリート部材における鉄筋とコンクリートとの応力伝達に関する研究、土木学会論文報告集、第 307 号、1981-3.
- 18) 鬼沢浩志・林 静雄・黒正清治：付着剛性を考慮した鉄筋コンクリート部材の变形解析、建築学会大会学術講演会梗概集、1979-10.
- 19) Sato, R. and Aoyagi, Y. : Studies on deformation and crack of reinforced concrete flexural members under low temperature, Proc. of JSCE, No. 329, 1, 1983.
- 20) 市之瀬敏勝：付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート骨組の非線形解析、建築学会論文報告集、第 328 号、1983-6.
- 21) Goto, Y. : Cracks formed in concrete around deformed bars, ACI. Journal, V. 68, 3, 1971.
- 22) 上田正生・土橋由造：鉄筋コンクリート部材の材料非線形付着滑り解析、土木学会北海道支部論文報告集、第 40 号、1984-2.
- 23) 川本勝男・林 正夫：地盤工学における有限要素解析、培風館、1978-4.

(1984.8.29・受付)