

# 梯形断面，三角形断面，放物線断面，円形断面の 水路における流量測定

正 員 春 日 屋 伸 昌\*

要旨 本論文では，梯形断面，三角形断面，放物線断面，円形断面の水路における流量算定式を導いた。すなわち， $x-z$  平面上で与えられたこれら断面形を  $t-u$  平面上の矩形に写像することによつて，前の論文で求めた矩形断面における流量算定式を用い，上述の各断面における流速観測点の座標と観測された流速に乘じるべき定係数とを決定し，流速の1次結合として流量算定式を導くことができる。筆者は各断面形に対して8点法の公式のみを誘導したが，この算定式は，流速を表わす写像後の函数と函数行列式  $\partial(x, z)/\partial(t, u)$  との積が  $t, u$  に関して高々5次の有理整式で表わされるならば誤差をとまなわない。そして，Bazin の実験例にこれを適用し，満足すべき結果のえられることが示される。

## 1. まえがき

前に発表した論文<sup>1)</sup>では，水面幅  $b$ ，水深  $h$  の矩形断面水路における全断面平均流速  $V_m$  は，一方の岸に原点，水面幅に沿つて  $x$  軸，深さに沿つて  $z$  軸をとつて，流速分布曲面の方程式を  $v=f(x, z)$  とすれば，

$$V_m = \frac{1}{bh} \int_0^h \int_0^b v dx \dots\dots\dots (1)$$

そこで，次の変数変換，

$$x = (1+t)b/2, \quad z = (1+u)h/2 \dots\dots\dots (2)$$

を行い，

$$v = f(x, z) = f\{(1+t)b/2, (1+u)h/2\} = g(t, u) \dots\dots\dots (3)$$

とおけば，(1) 式は，

$$V_m = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(t, u) dt du \dots\dots\dots (4)$$

ここで， $g(t, u)$  を， $t, u$  に関する Maclaurin の級数に展開し，(4) 式の右辺に入れて積分した結果が，領域  $-1 \leq t \leq 1, -1 \leq u \leq 1$  内に適当に選んだ  $n$  個の点  $(t_i, u_i)$  における流速  $v_i = g(t_i, u_i)$  とこれらのおのおのに乘じるべき係数  $R_i$  とをもつて，次の形，

$$V_m = R_1 v_1 + R_2 v_2 + \dots\dots + R_n v_n = \sum_{i=1}^n R_i v_i \dots\dots\dots (5)$$

に等しくなるように， $t_i, u_i, R_i (i=1, 2, \dots, n)$  の値を定める。計算の結果によると， $v=f(x, z)$  が  $x, z$  に関して高々5次の有理整式ならば， $n=8$  として誤差をとまなわない式を導くことができ，そのときの座標点(すなわち観測点)  $(t_i, u_i)$  と係数  $R_i$  とは，

$$\left. \begin{aligned} &(-\sqrt{7/15}, 0), (\sqrt{7/15}, 0), (0, -\sqrt{7/15}), (0, \sqrt{7/15}) \\ &R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 40/196 \\ &(-\sqrt{7/9}, -\sqrt{7/9}), (\sqrt{7/9}, -\sqrt{7/9}), (-\sqrt{7/9}, \sqrt{7/9}), (\sqrt{7/9}, \sqrt{7/9}) \\ &R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = 9/196 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

これら  $t_i, u_i$  の値を(2)式によつて  $x_i, z_i$  の値になおして，全断面平均流速算定式を導くと，

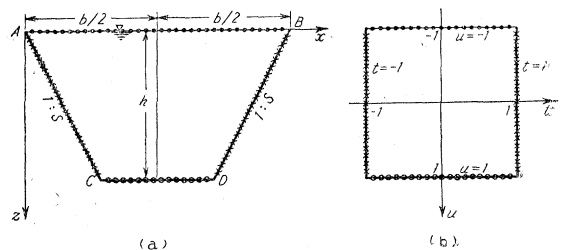
$$V_m = (1/196) \{ 40 \left( \begin{smallmatrix} 0.158 & 0.842 & 0.500 & 0.500 \\ 0.500 & 0.500 & 0.158 & 0.842 \end{smallmatrix} \right) + 9 \left( \begin{smallmatrix} 0.059 & 0.941 & 0.059 & 0.941 \\ 0.059 & 0.059 & 0.941 & 0.941 \end{smallmatrix} \right) \} \dots\dots\dots (7)$$

## 2. 梯形断面の水路における流量測定

水面幅が  $b$ ，水深が  $h$ ，側壁の勾配がいずれも  $1:s$  である梯形断面の水路について考える。図-1 (a) に示すように，一方の岸に原点，水面幅に沿つて  $x$  軸，深さに沿つて  $z$  軸をとつて，流速分布曲面の方程式を  $v=f(x, z)$  とすれば，全断面平均流速  $V_m$  は，流積が  $(b-sh)h$  であるから，

$$V_m = \frac{1}{(b-sh)h} \int_0^h \int_{sz}^{b-sz} v dx \dots\dots\dots (8)$$

図-1



\* 中央大学助教授，工学部土木工学教室

ここで, 積分変数  $x, z$  を次の関係式によつて  $t, u$  に変換する。

$$x = \{b(1+t) - sh(1+u)t\}/2, z = (1+u)h/2 \dots\dots\dots (9)$$

(9) 式より  $u, t$  を消去した式はそれぞれ,

$$x = \{b(1+t) - 2stz\}/2, z = (1+u)h/2 \dots\dots\dots (10)$$

ゆえに, 図-1 において,  $z=0$  [直線 AB] は  $u=-1$ ;  $z=h$  [直線 CD] は  $u=1$ ;  $x=sz$  [直線 AC] は  $t=-1$ ;  $x=b-sz$  [直線 BC] は  $t=1$  となる。すなわち,  $xz$  平面上の梯形 ABCD は  $tu$  平面上の 1 辺の長さが 2 の矩形に写像され,  $xz$  平面上の梯形の内部の点はすべて  $tu$  平面上の矩形の内部に 1:1 に写像される。ゆえに, (8) 式は次の積分に変わる<sup>2)</sup>。

$$V_m = \frac{1}{(b-sh)h} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 v |J| dt du \dots\dots\dots (11)$$

ここに,  $J$  は函数行列式であつて,

$$J = \frac{\partial(x, z)}{\partial(t, u)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

さて,  $sh/b=m$  とおくと, (9) 式より,

$$x = \{1+t-m(1+u)t\}b/2, z = (1+u)h/2 \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{aligned} \therefore J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \{1-m(1+u)\}b/2 & -mtb/2 \\ 0 & h/2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{bh}{4} \{1-m(1+u)\} = \frac{(1-m)bh}{4} \left(1 - \frac{m}{1-m} u\right) \end{aligned}$$

したがつて, (11) 式は,

$$V_m = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 v \left(1 - \frac{m}{1-m} u\right) dt du \dots\dots\dots (14)$$

ここで,  $v$  は  $t, u$  の函数となるから,

$$g(t, u) \equiv \{1 - mu/(1-m)\}v \dots\dots\dots (15)$$

とおけば, (14) 式は (4) 式とまったく同じになり, 矩形断面での結果をそのまま適用することができる。

そこで, 8 点法を用いることとすれば,  $tu$  平面上での観測点の座標は (6) で与えられるから, 点  $(t_i, u_i)$  における被積分函数値を  $g_i$  とすれば,

$$g_i \equiv g(t_i, u_i) \equiv \{1 - mu_i/(1-m)\}v_i \dots\dots\dots (16)$$

ここに,  $v_i$  は点  $(t_i, u_i)$  における流速で, (13) 式を用いて  $t_i, u_i$  を  $x_i, z_i$  になおせば,  $v_i$  の値は観測点  $(x_i, z_i)$  において観測される。

図-1 (a) より明らかなように,  $0 \leq sh/b \leq 1$  すなわち  $0 \leq m \leq 1/2$  である。そこで, 種々な  $m$  の値に対して, 観測点の位置と全断面平均流速算定式とを導くことができる。例えば,  $m=0.3$  の場合には, (13) 式と (16) 式とより,

$$x_i = \{1 + 0.3(7/3 - u_i)t_i\}b/2, z_i = (1 + u_i)h/2, g_i = (1 - 3u_i/7)v_i$$

これらの式に (6) を入れると,

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - 0.3 \times 7/3 \times \sqrt{7/15})b/2 = 0.261b, z_1 = h/2 = 0.500h, g_1 = v_1 \\ x_2 &= (1 + 0.3 \times 7/3 \times \sqrt{7/15})b/2 = 0.739b, z_2 = h/2 = 0.500h, g_2 = v_2 \\ x_3 &= b/2 = 0.500b, z_3 = (1 - \sqrt{7/15})h/2 = 0.158h, g_3 = \{1 + (3/7)\sqrt{7/15}\}v_3 = 1.293v_3 \\ x_4 &= b/2 = 0.500b, z_4 = (1 + \sqrt{7/15})h/2 = 0.842h, g_4 = \{1 - (3/7)\sqrt{7/15}\}v_4 = 0.707v_4 \\ x_5 &= \{1 - 0.3(7/3 + \sqrt{7/9})\}b/2 = 0.075b, z_5 = (1 - \sqrt{7/9})h/2 = 0.059h, \\ &g_5 = \{1 + (3/7)\sqrt{7/9}\}v_5 = 1.378v_5 \\ x_6 &= \{1 + 0.3(7/3 + \sqrt{7/9})\}b/2 = 0.925b, z_6 = (1 + \sqrt{7/9})h/2 = 0.059h, \\ &g_6 = \{1 + (3/7)\sqrt{7/9}\}v_6 = 1.378v_6 \\ x_7 &= \{1 - 0.3(7/3 - \sqrt{7/9})\}b/2 = 0.308b, z_7 = (1 + \sqrt{7/9})h/2 = 0.941h, \\ &g_7 = \{1 - (3/7)\sqrt{7/9}\}v_7 = 0.622v_7 \end{aligned}$$

$$x_s = \{1 + 0.3(7/3 - \sqrt{7/9})\} \sqrt{7/9} b / 2 = 0.692 b, \quad z_s = (1 + \sqrt{7/9}) h / 2 = 0.941 h,$$

$$g_s = \{1 - (3/7)\sqrt{7/9}\} v_s = 0.622 v_s$$

ゆえに、全断面平均流速算定式は、

$$V_m = (1/196) \left\{ 40 \left( \frac{v_{0.261}}{0.500} + \frac{v_{0.739}}{0.500} + 1.293 \frac{v_{0.500}}{0.158} + 0.707 \frac{v_{0.500}}{0.842} \right) + 9 \left( 1.378 \frac{v_{0.075}}{0.059} + 1.378 \frac{v_{0.925}}{0.059} \right) \right.$$

$$\left. + 0.622 \frac{v_{0.308}}{0.941} + 0.622 \frac{v_{0.692}}{0.941} \right\}$$

$$= 0.204 \left( \frac{v_{0.261}}{0.500} + \frac{v_{0.739}}{0.500} \right) + 0.264 \frac{v_{0.500}}{0.158} + 0.144 \frac{v_{0.500}}{0.842} + 0.063 \left( \frac{v_{0.075}}{0.059} + \frac{v_{0.925}}{0.059} \right) + 0.029 \left( \frac{v_{0.308}}{0.941} + \frac{v_{0.692}}{0.941} \right) \quad (17)$$

$m = 0.0 \sim 0.5$  に対する観測点の位置の割合  $x_i/b, z_i/h$  および観測点  $(x_i, z_i)$  における流速に乘じるべき係数  $R_i$  の値 [この  $R_i$  は (6) の  $R_i$  に  $1 - mu_i/(1 - m)$  を掛けたもの] をあげると表-1 のようになる。図-2 は  $x_i/b$  および  $R_i$  の値と  $m$  との関係を示すグラフである。 $z_i/h$  の値は  $m$  に無関係に一定であるから省略した。

表-1

番号	$m$		0.0			0.1			0.2			0.3			0.4			0.5			
	$x_i/b$	$z_i/h$	$x_i/b$	$z_i/h$	$R_i$	$x_i/b$	$z_i/h$	$R_i$	$x_i/b$	$z_i/h$	$R_i$	$x_i/b$	$z_i/h$	$R_i$	$x_i/b$	$z_i/h$	$R_i$	$x_i/b$	$z_i/h$	$R_i$	
1	0.158	0.500	0.204	0.192	0.500	0.204	0.226	0.500	0.204	0.261	0.500	0.204	0.295	0.500	0.204	0.329	0.500	0.204			
2	0.842	0.500	0.204	0.808	0.500	0.204	0.774	0.500	0.204	0.739	0.500	0.204	0.705	0.500	0.204	0.671	0.500	0.204			
3	0.500	0.158	0.204	0.500	0.158	0.220	0.500	0.158	0.239	0.500	0.158	0.264	0.500	0.158	0.297	0.500	0.158	0.344			
4	0.500	0.842	0.204	0.500	0.842	0.188	0.500	0.842	0.169	0.500	0.842	0.144	0.500	0.842	0.111	0.500	0.842	0.064			
5	0.059	0.059	0.046	0.064	0.059	0.050	0.069	0.059	0.056	0.075	0.059	0.063	0.080	0.059	0.073	0.085	0.059	0.086			
6	0.941	0.059	0.046	0.936	0.059	0.050	0.931	0.059	0.056	0.925	0.059	0.063	0.920	0.059	0.073	0.915	0.059	0.086			
7	0.059	0.941	0.046	0.142	0.941	0.041	0.225	0.941	0.036	0.308	0.941	0.029	0.391	0.941	0.019	0.474	0.941	0.005			
8	0.941	0.941	0.046	0.858	0.941	0.041	0.775	0.941	0.036	0.692	0.941	0.029	0.609	0.941	0.019	0.526	0.941	0.005			

図-2

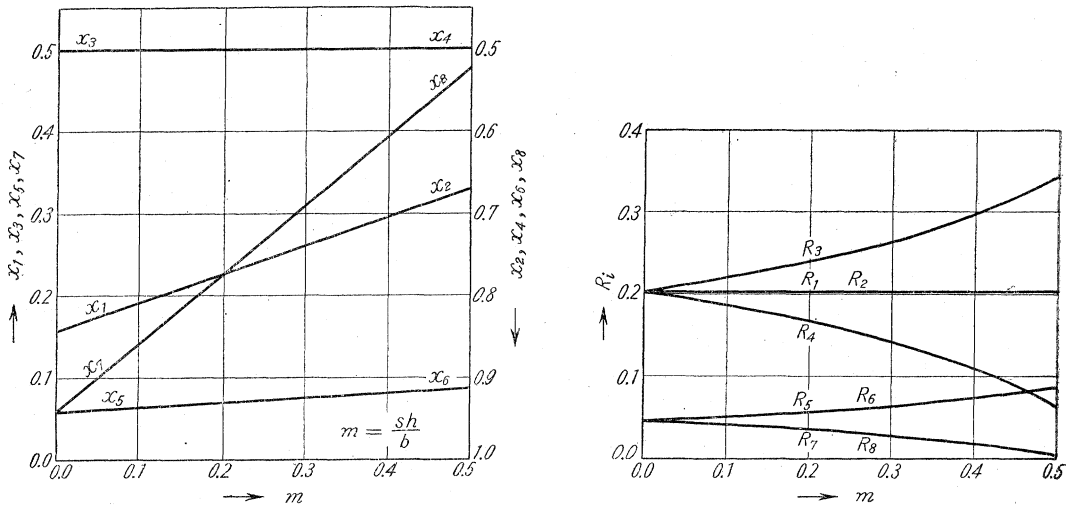


表-1 または 図-2 より、与えられた  $m$  の値に対する観測点の位置  $(x_i, z_i)$  を定め、それらの点に流速計またはピトー管を差し入れて、流速  $v_i$  を測定し、かつ、表または図より、各流速に乘じる係数  $R_i$  を読みとれば、全断面平均流速  $V_m$  は、流速の1次結合として次の式より計算される。

$$V_m = \sum_{i=1}^8 R_i v_i \quad \dots \dots \dots (18)$$

この算定式は、流速を表わす写像後の函数と函数行列式との積が  $t, u$  に関して高々5次の有理整式で表わされるならば誤差をとまなわない。一般に、梯形のような整正断面内でも流れは複雑な状態を示すであろうが、梯形を矩形に写像した後の流速を表わす函数と函数行列式との積は十分近似的に  $t, u$  に関する高々5次の有理整式で表わされると考えられるから、(18) 式は相当に高い精度をもつであろう。

Bazin は開水路での流速分布を研究するため、矩形、梯形、三角形、円形の各断面の水路について広範かつ精密な測定を行い、その結果を発表している。その中より、梯形断面についての資料を採り上げよう<sup>3)</sup>。これは組番

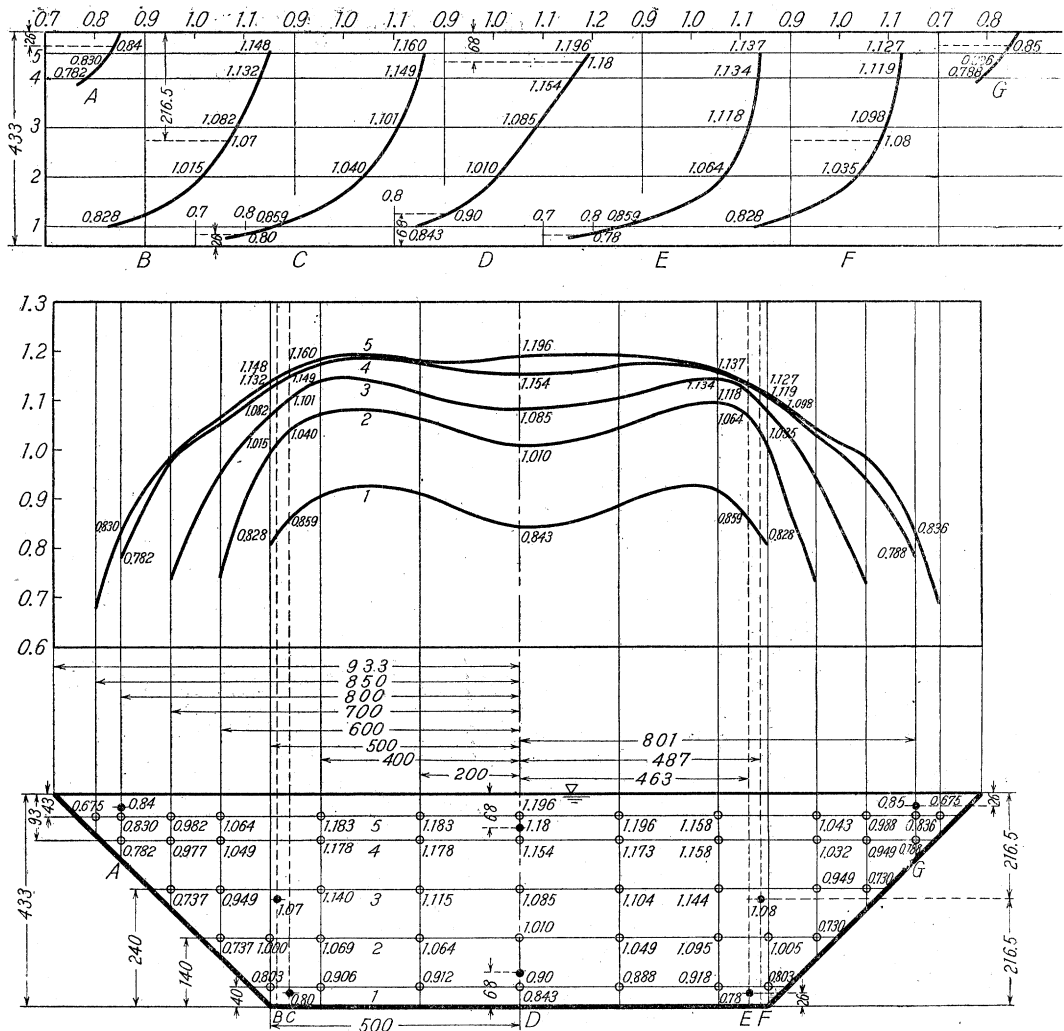
号 68 で実験番号 1~4 の 4 つの実験よりなる。実験水路は木製で両側の壁面のコウ配は 1:1 であり、水深、下底の幅、水面幅、平均流速、流量、観測点数は下のとおりである。実験番号 4 の断面形は厳密には梯形でなく、

番号	水深 (m)	下底の幅 (m)	水面幅 (m)	平均流速 (m/sec)	流量 (m <sup>3</sup> /sec)	観測点数
68-1	0.191	1.000	1.382	0.908	0.203	27
68-2	0.290	1.000	1.580	1.118	0.411	25
68-3	0.433	1.000	1.886	1.329	0.824	49
68-4	0.540	1.000	2.080	1.497	1.236	60

上部の両側に微小な切欠きがあるが梯形とみなしてさしつかえない。各観測点 (図-3 での白丸) での観測流速は全断面平均流速に対する比として与えられている。そこで、(18) 式を適用するに当り、平均法での

観測点の位置を実験水路の断面形と観測流速 (実は流速比) とを再現させた図上に求め (図-3 での黒丸)、その点での流速を、水平および垂直方向の流速分布曲線を与えられた資料より画くことによつて定めた。ここでは、実験番号 1 は水深がきわめて浅いためこれを省略し、他の 3 つの実験について計算を行つた。資料での流速値は小数点以下 3 桁まで与えられているが、流速分布曲線上より読みとられる流速値は小数点以下 2 桁までとし、(18) 式に入れて計算した結果は小数点以下 2 桁目に丸めた。したがつて、計算値が 1.00 となれば誤差のないことになる。図-3 は実験番号 3 に対するものである。いま、(6) に与えられている矩形断面での観測点の位置に対応して定められる、梯形断面での観測点における流速を順次  $v_1, v_2, \dots, v_n$  とすれば、これらの値とこれらを用い

図 - 3



組番号 68, 実験番号 3

番号	$m$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	平均流速
68-2	0.1835	1.08	1.07	1.15	0.90	0.75	0.73	0.80	0.79	1.00
68-3	0.2320	1.07	1.08	1.18	0.90	0.84	0.85	0.80	0.78	1.03
68-4	0.2596	1.03	1.04	1.20	0.96	0.81	0.85	0.78	0.86	1.03

て(18)式より計算された平均流速の値とは上のようになった。すなわち、平均+2%の誤差があるが、満足すべき結果であると考えてよいであろう。

3. 三角形断面の水路における流量測定

梯形断面において、 $m = sh/b$ の値が0.0のときは矩形断面の場合であり、 $m = 0.5$ のときは三角形断面(正確には二等辺三角形断面)

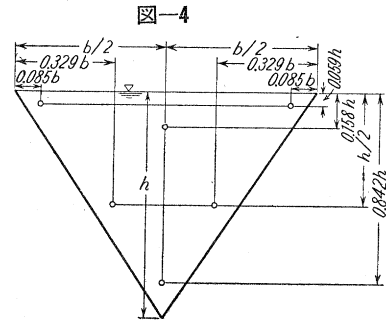
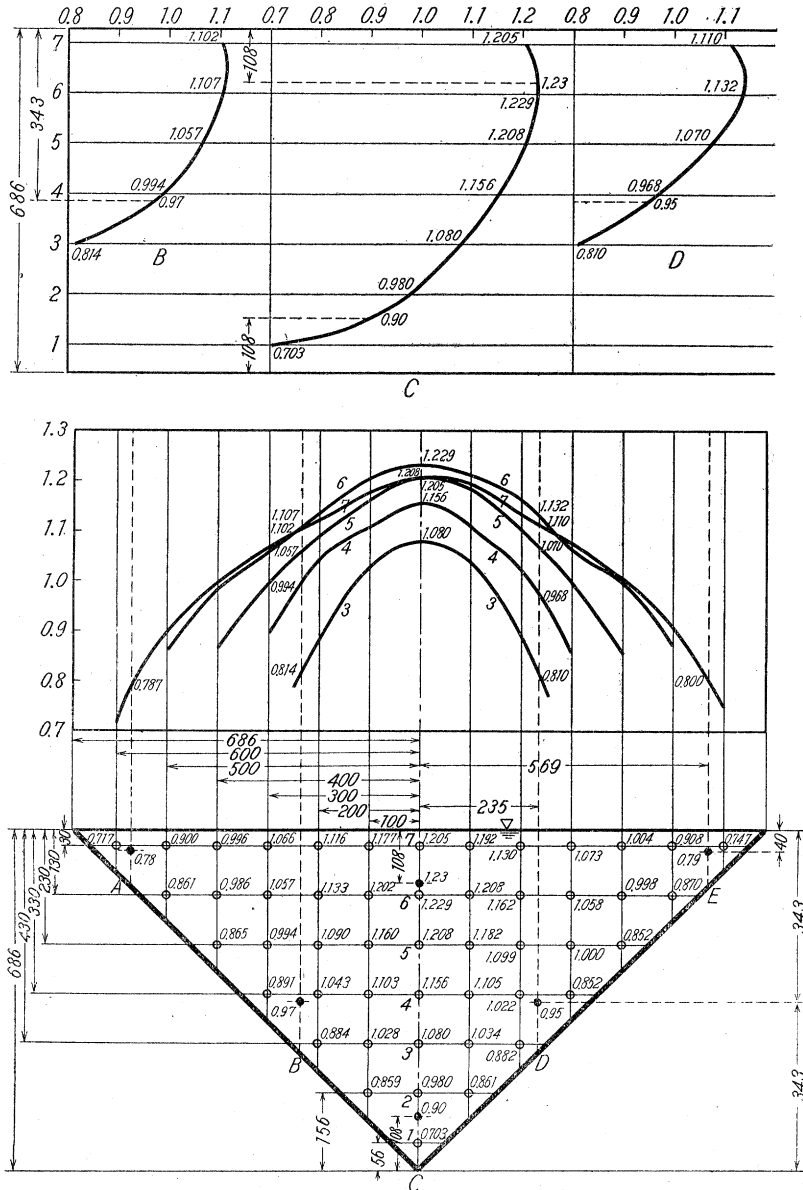


図-5



組番号70, 実験番号5

の場合である。

表—1または図—2より，三角形断面の水路に対する8点法による全断面平均流速算定式を書き下すと，

$$V_m = 0.204 \left( \underset{0.500}{v_{0.329}} + \underset{0.500}{v_{0.671}} \right) + 0.344 \underset{0.158}{v_{0.500}} + 0.064 \underset{0.842}{v_{0.500}} + 0.086 \left( \underset{0.059}{v_{0.085}} + \underset{0.059}{v_{0.915}} \right) + 0.005 \left( \underset{0.941}{v_{0.474}} + \underset{0.941}{v_{0.526}} \right) \dots (19)$$

番号	水深 (m)	水面幅 (m)	平均流速 (m/sec)	流量 (m³/sec)	観測点数
70-1	0.380	0.760	1.406	0.203	16
70-2	0.489	0.978	1.719	0.411	25
70-3	0.570	1.140	1.922	0.618	36
70-4	0.630	1.260	2.084	0.824	36
70-5	0.686	1.372	2.218	1.030	49
70-6	0.735	1.470	2.294	1.236	63

(19)式において，右辺の末項はその係数がきわめて小さく，かつ，観測点が底部に近くて流速も小さいから，この項の値は他の項の値の総和にくらべて非常に小さくなる（流速が全断面ですべて等しいと仮定してすべし，末項の値は全体の1%に過ぎない）。そこで，この2点での測定を省略すれば，三角形断面内での観測点は前頁の図—4に示すような6点となる。

資料として，前に記した Bazin の三角形断面の水路に対する実験結果を用いよう<sup>4)</sup>。これは組番号 70 で実験番号が 1~6 の 6つの実験よりなる。実験水路は木製で両側の壁面のコウ配は 1:1 であり，水深，水面幅，平均流速，流量，観測点数は上のとおりである。他の詳細は梯形断面の場合と同じである。

番号	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	平均流速
70-1	0.95	0.95	1.26	0.80	0.87	0.87	1.02
70-2	0.97	0.96	1.24	0.76	0.84	0.82	1.01
70-3	0.95	0.92	1.25	0.86	0.82	0.77	1.00
70-4	0.97	0.97	1.23	0.91	0.85	0.84	1.02
70-5	0.97	0.95	1.23	0.90	0.78	0.79	1.01
70-6	0.96	0.97	1.22	0.87	0.79	0.83	1.01

前頁の図—5は実験番号5に対するものである。

平均値法による観測点での流速および(19)式の末項を省略した式より計算した平均流速の値は右のようになつた。すなわち，6つの平均は1.01となり誤差は+1%である。

4. 放物線断面の水路における流量測定

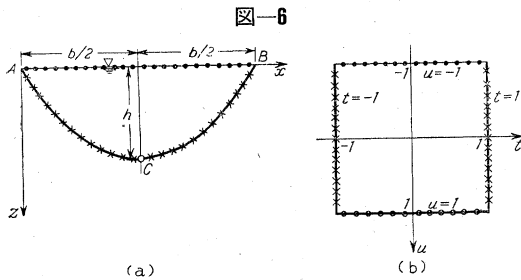
図—6(a)は水面幅が  $b$ ，水深が  $h$  の放物線断面の水路を表わす。水路壁の方程式は，一方の岸に原点，水面幅に沿つて  $x$  軸，深さに沿つて  $z$  軸をとれば，

$$z = (4h/b^2)(b-x)x$$

いま，点  $(x, z)$  における流速を  $v = f(x, z)$  とすれば，全断面平均流速  $V_m$  は，流積が  $(2/3)bh$  であるから，

$$V_m = \frac{1}{(2/3)bh} \int_0^h dz \int_{b/2}^b \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{z}{h}} \right) v dx \dots (20)$$

ここで，積分変数  $x, z$  を次の関係式によつて  $t, u$



に変換する。

$$x = \{1 + \sqrt{(1-u)/2} t\} b/2, \quad z = (1+u)h/2 \dots (21)$$

(21)式より  $u, t$  を消去した式はそれぞれ，

$$x = (1 + \sqrt{1-z/h} t) b/2, \quad z = (1+u)h/2 \dots (22)$$

ゆえに，図—6において， $z=0$  [直線 AB] は  $u=-1$ ； $x=b/2, z=h$  [点 C] は  $u=1$ ； $z = (4h/b^2)(b-x)x, 0 \leq x < b/2$  [曲線 AC] は  $t=-1$ ； $z = (4h/b^2)(b-x)x, b/2 < x \leq b$  [曲線 BC] は  $t=1$  となる。すなわち， $xz$  平面上の放物線断面 ABC は  $tu$  平面上の1辺の長さが2の矩形に写像され，放物線断面の内部の点は矩形の内部に1:1に写像される。したがつて，(20)式は，

$$V_m = \frac{1}{(2/3)bh} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 v |J| dt du \dots (23)$$

函数行列式  $J$  の値は (21) 式より，

$$J = \begin{vmatrix} \sqrt{(1-u)/2} b/2 & -bt(4\sqrt{2}\sqrt{1-u}) \\ 0 & h/2 \end{vmatrix} = \frac{bh}{4} \sqrt{\frac{1-u}{2}}$$

$$\therefore V_m = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 v \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1-u}{2}} dt du \dots (24)$$

ここで， $v$  は  $t, u$  の函数となるから，

$$g(t, u) \equiv (3/2) \sqrt{(1-u)/2} v \dots (25)$$

とおけば，(24)式は(4)式とまったく同じになり，矩形断面で求めた結果を用いて，全断面平均流速算定式を導くことができる。次の(26)式は8点法に対する算定式である。この式の末項は省略してきつつかえない。な

ぜならば、末項における観測点の位置は、いずれもその点を通る垂直線が水面と底面とで切られる線分上水面より 0.986 の点にあるからきわめて底面に近く、したがって流速の値が小さく、かつ、係数も小さいからである。

$$V_m = 0.216 \frac{v_{0.255} + v_{0.742}}{0.500} + 0.281 \frac{v_{0.500}}{0.158} + 0.172 \frac{v_{0.500}}{0.842} + 0.080 \frac{(v_{0.072} + v_{0.928})}{0.059} + 0.016 \frac{(v_{0.393} + v_{0.607})}{0.941} \dots (26)$$

5. 円形断面の水路における流量測定

図-7 (a) に示すように、底が円弧をなす水路を考える。この円の半径を  $r$  とし、水面に平行な直径を  $x$  軸にとり、この直径の端を原点とし、 $x$  軸に垂直に水深に沿って  $z$  軸をとる。水面  $AB$  の  $x$  軸からの距離を  $c$  ( $-r \leq c < r$ ) とし、流速分布曲面の方程式を  $v = f(x, z)$  とする。弓形をなす流積  $A$  は、弧  $ACB$  の中心角を  $\theta$  ラジアンとすれば、

$$A = r^2(\theta - \sin \theta)/2 = r^2\{2(\theta/2) - 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)\}/2 = r^2\{\cos^{-1}(c/r) - \sin(\sqrt{r^2 - c^2}/r) \cos(\sqrt{r^2 - c^2}/r)\}$$

ここで、 $c/r = m$  ( $-1 \leq m < 1$ ) とおけば、

$$A = r^2(\cos^{-1} m - m\sqrt{1 - m^2})$$

したがって、全断面平均流速  $V_m$  は、

$$V_m = \frac{1}{r^2(\cos^{-1} m - m\sqrt{1 - m^2})} \int_c^r dz \int_{r - \sqrt{r^2 - z^2}}^{r + \sqrt{r^2 - z^2}} v dx \dots (27)$$

ここで、積分変数  $x, z$  を次の関係式によつて  $t, u$  に変換する。

$$\left. \begin{aligned} x &= r[2 + \sqrt{(1-m)(1-u)}\{3+m+(1-m)u\}t]/2 \\ z &= r\{1+m+(1-m)u\}/2 \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

(28) 式より  $u, t$  を消去した式はそれぞれ、

$$x = r + \sqrt{r^2 - z^2} t, \quad z = r\{1+m+(1-m)u\}/2 \dots (29)$$

ゆえに、図-7 において、 $z = c = mr$  [直線  $AB$ ] は  $u = -1$ ;  $x = r, z = r$  [点  $C$ ] は  $u = 1$ ;  $x = r - \sqrt{r^2 - z^2}$  [円弧  $AC$ ] は  $t = -1$ ;  $x = r + \sqrt{r^2 - z^2}$  [円弧  $BC$ ] は  $t = 1$  となる。したがって、(27) 式は、

$$V_m = \frac{1}{r^2(\cos^{-1} m - m\sqrt{1 - m^2})} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 v |J| dt du \dots (30)$$

さて、(28) 式より、 $\partial x/\partial t, \partial x/\partial u, \partial z/\partial t, \partial z/\partial u$  を計算すれば、 $J$  の値は、

$$J = r^2(1-m)^{3/2} \sqrt{(1-u)\{3+m+(1-m)u\}}/4 = \frac{r^2(1-m)^2}{4} \sqrt{(1-u)\left(\frac{3+m}{1-m} + u\right)}$$

これを (30) 式に入れれば、

$$V_m = \frac{(1-m)^2}{\cos^{-1} m - m\sqrt{1 - m^2}} \left\{ \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{(1-u)\left(\frac{3+m}{1-m} + u\right)} v dt du \right\} \dots (31)$$

ここで、 $v$  は  $t, u$  の函数となるから、

$$g(t, u) \equiv \sqrt{(1-u)\left(\frac{3+m}{1-m} + u\right)} v \dots (32)$$

とおけば、矩形断面での結果を用いて全断面平均流速算定式を導くことができる。

半円断面は  $m=0$  の場合であるから、(28) 式、(31) 式、(32) 式において  $m=0$  とおけば、これらの式はそれぞれ、

$$\begin{aligned} x &= r\{2 + \sqrt{(1-u)(3+u)}t\}/2, \quad z = r(1+u)/2 \\ g(t, u) &= \sqrt{(1-u)(3+u)} v \\ V_m &= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(t, u) dt du \right\} \end{aligned}$$

そこで、全断面平均流速算定式は次のようになる。

$$V_m = 0.225 \frac{v_{0.408} + v_{1.592}}{0.500} + 0.257 \frac{v_{1.000}}{0.158} + 0.140 \frac{v_{1.000}}{0.842} + 0.058 \frac{(v_{0.120} + v_{1.880})}{0.059} + 0.020 \frac{(v_{0.701} + v_{1.299})}{0.941} \dots (33)$$

ここで、例えば、 $\frac{v_{0.120}}{0.059}$  は水平直径に沿つてその端より 0.120  $r$ 、深さに沿つて 0.059  $r$  の点での流速を意味し、他も同様である。上の式の末項における観測点の位置は、円の中心より 0.987  $r$  の距離にあるからきわめて壁面

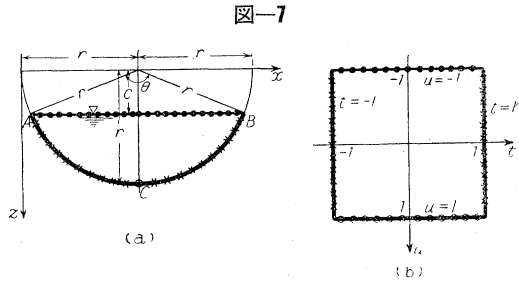
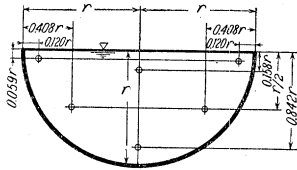


表 - 2

番号	$m$ $x_i, z_i, R_i$	-1.0			-0.5			0.0			0.5		
		$x_i/r$	$z_i/r$	$R_i$	$x_i/r$	$z_i/r$	$R_i$	$x_i/r$	$z_i/r$	$R_i$	$x_i/r$	$z_i/r$	$R_i$
1		0.317	0.000	0.260	0.339	0.250	0.235	0.408	0.500	0.225	0.548	0.750	0.220
2		1.683	0.000	0.260	1.661	0.250	0.235	1.592	0.500	0.225	1.452	0.750	0.220
3		1.000	-0.683	0.190	1.000	-0.262	0.234	1.000	0.158	0.257	1.000	0.579	0.271
4		1.000	0.683	0.190	1.000	0.762	0.157	1.000	0.842	0.140	1.000	0.921	0.130
5		0.584	-0.882	0.028	0.196	-0.411	0.050	0.120	0.059	0.058	0.252	0.530	0.063
6		1.416	-0.882	0.028	1.804	-0.411	0.050	1.880	0.059	0.058	1.748	0.530	0.063
7		0.584	0.882	0.028	0.637	0.911	0.022	0.701	0.941	0.020	0.787	0.970	0.018
8		1.416	0.882	0.028	1.363	0.911	0.022	1.299	0.941	0.020	1.213	0.970	0.018

図-8



に近く，流速が他の項のにくらべて非常に小さい。かつ，これらに対する係数も他にくらべて小さいから，末項は省略してもさしつかえなく，観測点は6つで十分である。図-8 は半円断面の水路における6つの観測点の位置を図示したものである。

表-2 は  $m$  の種々な値に対する観測点の位置の割合  $x_i/r, z_i/r$  および観測点

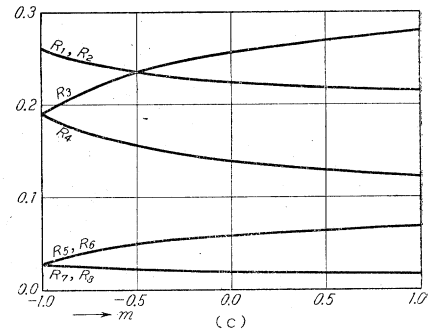
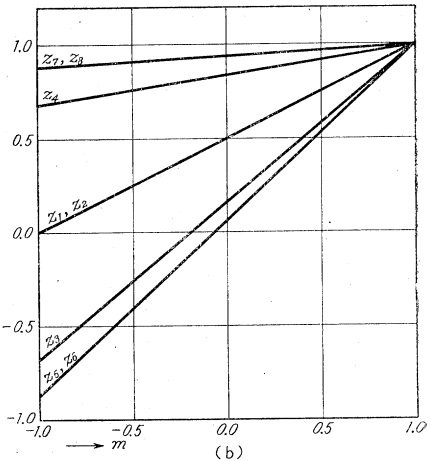
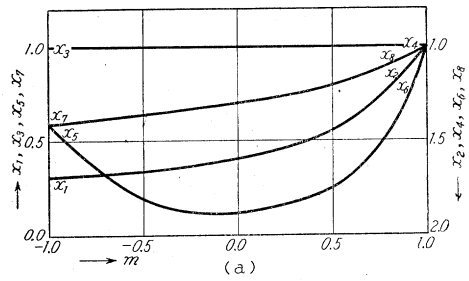
( $x_i, z_i$ ) における流速  $v_i$  に乗じるべき係数  $R_i$  の値をあげたものであり，図-9 は  $x_i/r, z_i/r$  および  $R_i$  と  $m$  との関係を示すグラフである。  
表-2 または 図-9 より，与えられた  $m$  の値に対する観測点の位置 ( $x_i, z_i$ ) を定め，そこでの流速  $v_i$  に乗じるべき係数  $R_i$  を読みとれば，全断面平均流速  $V_m$  は，(18) 式と同じように観測流速の1次結合として計算される。ただし， $i=7, 8$  に対する2つの観測点はきわめて壁面に近く，かつ，係数も小さいので，これらを省略してさしつかえない。この傾向は  $m$  が1に近づく程顕著である。

ここに注意すべきことは， $x_i/r, z_i/r$  の値は図-7 (a) のように設けた両座標軸についての値であつて，半円断面の場合でない以上，水面幅や水深に沿つてのものではないということである。また， $m=-1$  は管水路の場合となるが，管水路では，平均値法を領域が円である3次元の場合に拡張すれば，直接これを解いて観測点の位置と係数とを定めることができ，しかも，観測点はその1つが円の中心に他の8つが半径  $\sqrt{2/3}r$  の円周上にきて好都合であるからこれを用いるのが得策である。管水路については，次の機会に述べるつもりである。

円形断面の資料としても Bazin の実験結果を用いよう<sup>5)</sup>。円

番号	水深 (m)	水面幅 (m)	平均流速 (m/sec)	流量 (m <sup>3</sup> /sec)	観測点数
71-1	0.268	1.026	1.052	0.203	25
71-2	0.378	1.148	1.300	0.411	38
71-3	0.456	1.203	1.534	0.618	45
71-4	0.528	1.234	1.676	0.824	54
71-5	0.588	1.248	1.782	1.030	60
71-6	0.662	1.248	1.786	1.133	80
71-7	0.662	1.248	1.786	1.133	80
71-8	0.632	1.250	1.810	1.133	80
72-1	0.292	1.058	0.954	0.203	23
72-2	0.388	1.157	1.266	0.411	36
72-3	0.488	1.219	1.392	0.618	49
72-4	0.554	1.242	1.569	0.824	56
72-5	0.625	1.250	1.679	1.030	63

図-9

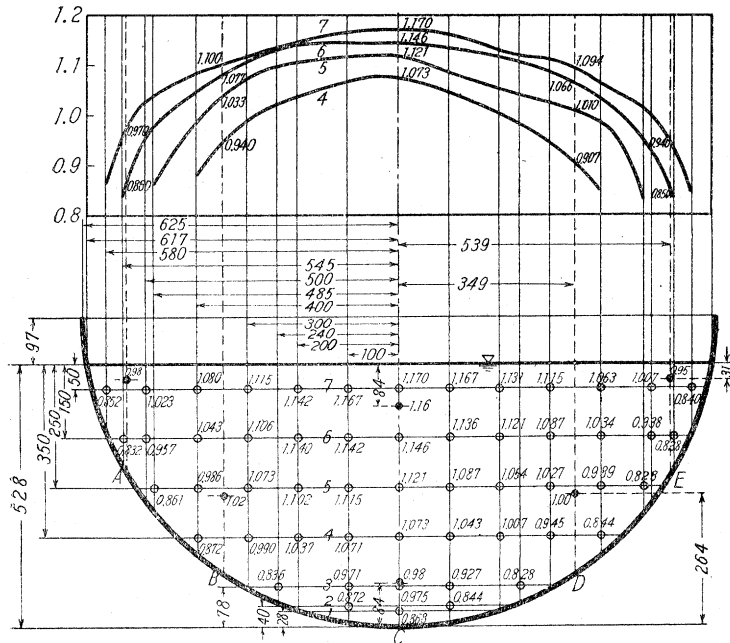
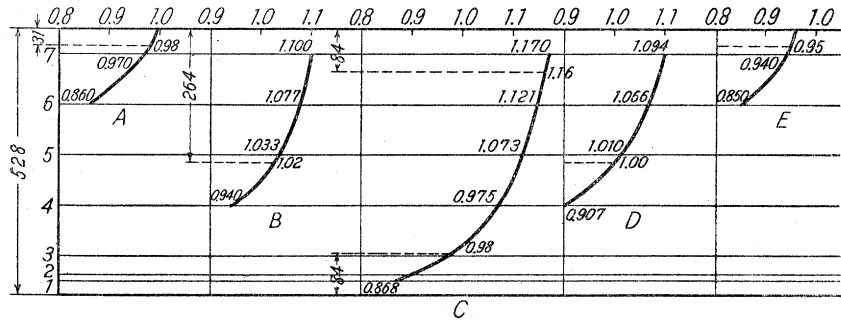




形断面については組番号 71~74 において合計 21 コの実験がなされているが、ここでは組番号 71~72 についてだけ計算結果を示す。組番号 71 は実験番号 1~8 の 8 つの実験よりなり壁面はセメント、組番号 72 は実験番号 1~5 の 5 つの実験よりなり壁面は細砂を 1/3 混じたセメントである。円の半径はいずれも 0.625 m であり、水深、水面幅、平均流速、流量、観測点数は前頁のとおりである。計算には観測点数が不足で平均値法による観測点での流速を正確に定めることが困難であると思われる、組番号 71 の実験番号 1 と組番号 72 の実験番号 1 とを省略し、他の 11 コの資料について計算を行った。図-10 は組番号 71, 実験番号 4 に対するもの、次頁の 図-11 は組番号 72, 実験番号 5 に対するものである。計算の結果は上のとおりであった。すなわち、11 コの平均は 1.00 となり誤差は認められなかった。

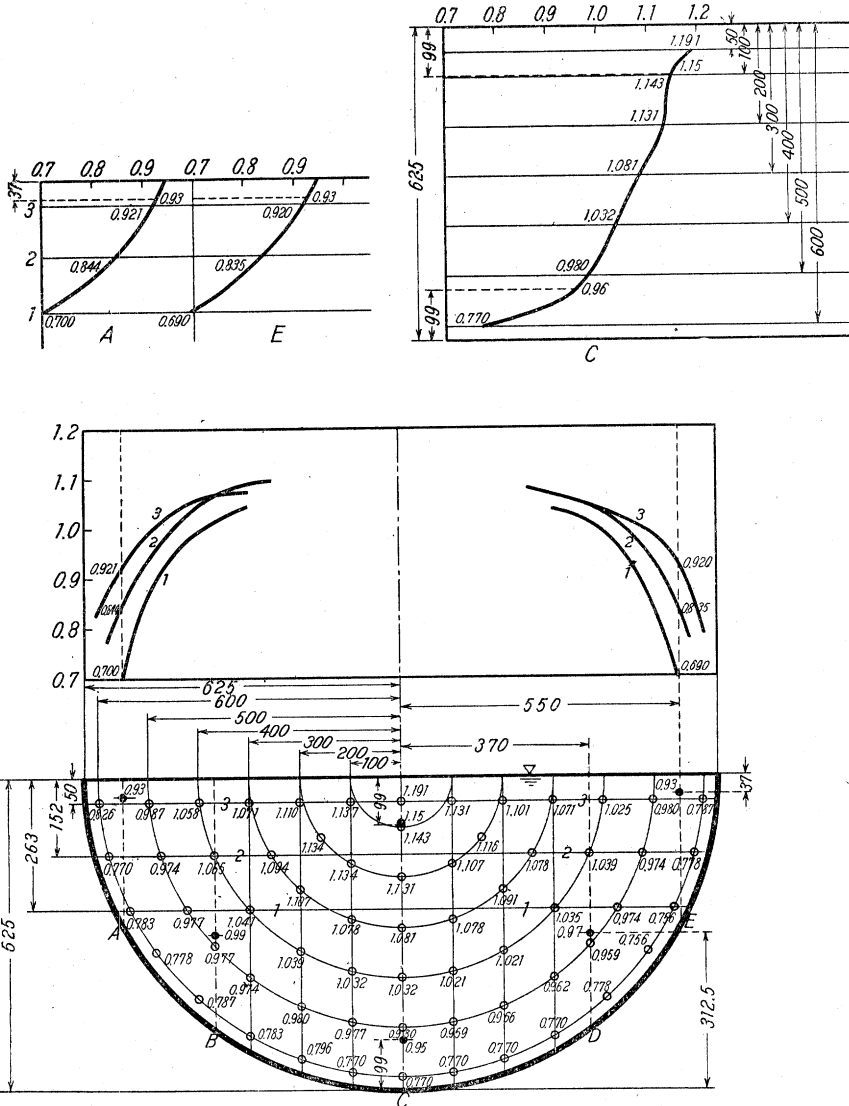
番号	m	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	平均流速
71-2	0.3952	1.02	1.02	1.20	1.00	0.90	0.93	1.02
71-3	0.2704	1.01	1.01	1.16	0.99	0.97	0.90	1.00
71-4	0.1552	1.02	1.00	1.16	0.98	0.98	0.95	1.00
71-5	0.0592	1.04	1.01	1.19	0.90	1.05	0.99	1.01
71-6	-0.0592	1.05	1.07	1.14	0.87	1.05	1.01	1.01
71-7	-0.0592	1.05	1.05	1.12	0.88	1.01	1.01	1.00
71-8	-0.0112	1.06	1.07	1.20	0.89	1.02	1.01	1.03
72-2	0.3792	1.00	1.00	1.18	0.93	1.00	0.95	1.00
72-3	0.2192	1.04	0.97	1.18	0.93	0.96	0.90	1.00
72-4	0.1136	1.00	0.96	1.12	0.94	0.91	0.89	0.97
72-5	0.0000	0.99	0.97	1.15	0.96	0.93	0.93	0.98

図 - 10



組番号 71, 実験番号 4

図 - 11



組番号 72, 実験番号 5

6. 結 語

(1) 梯形断面の水路における流量測定は、一方の岸に原点、水面幅に沿つて  $x$  軸、深さに沿つて  $z$  軸をとり、水面幅を  $b$ 、水深を  $h$ 、側壁のコウ配をいずれも  $1:s$  とし、 $m=sh/b(0 \leq m \leq 1/2)$  とおけば、 $m$  の種々な値に対する 8 点法の観測点の位置の割合  $x_i/b, z_i/h$  と点  $(x_i, z_i)$  で測定される流速  $v_i$  に乗じるべき係数  $R_i$  との値は表-1 または 図-2 に示される。全断面平均流速  $V_m$  は、観測流速の 1 次結合として、 $V_m = \sum_{i=1}^8 R_i v_i$  で計算される。

(2) 三角形断面の水路における流量測定は、梯形断面において  $m=1/2$  とおいた場合であり、8 点法の公式は (19) 式で与えられるが、この式の右辺の末項の値はきわめて小さいからこれを省略し、6 つの観測点で十分である。

(3) 放物線断面の水路における流量測定は、(26) 式で与えられる。この場合も末項を省略してさしつかえない。

(4) 円形断面の水路における流量測定は、水面に平行な直径を  $x$  軸、この直径の端を原点、 $x$  軸に垂直に水深に沿つて  $z$  軸をとる。水面の  $x$  軸からの距離を  $c$ 、円の半径を  $r$  とし、 $m=c/r(-1 \leq m < 1)$  とおけば、 $m$  の

種々な値に対する8点法の観測点の位置の割合  $x_i/r$ ,  $z_i/r$  と点  $(x_i, z_i)$  で測定される流速  $v_i$  に乗じるべき係数  $R_i$  との値は表-2 または図-9 に示される。全断面平均流速  $V_m$  は、観測流速の1次結合として計算されるが、 $i=7, 8$  に対する2つの観測点を省略し、6つの観測点で十分である。

(5) 以上の各種断面形のいずれの場合も、全断面平均流速算定式は、 $xz$  平面上で与えられた断面形を  $tu$  平面上の矩形に写像し、矩形断面に対して与えられている算定式を用いて導かれる。ここで誘導した8点法の式は、流速を表わす写像後の函数と函数行列式との積が  $t, u$  に関して高々5次の有理整式で表わされるならば誤差をとらなわず、Bazin の実験例に適用して十分満足すべき結果がえられる。

#### 参 考 文 献

- 1) 春日屋伸昌：平均値法の3次元への拡張とその流量測定への応用，土木学会誌 第40巻 第12号。
- 2) 寺沢寛一：自然科学者のための数学概論（増訂版）p.77～p.78。
- 3) M.H. Bazin : Recherches Hydrauliques, Première Partie, 1865, p. 198～p. 199.
- 4) 同上, p. 202～p. 203.
- 5) 同上, p. 204～p. 211.

(昭. 30. 9. 28)