Logistic Curve による人口推計

正員 北郷 繁*

I. 要　　旨

筆者は最近札幌市及びその予定中の都市計画区域内の人口を推計して，30 年後すなわち昭和 60 年における人口を求める機会を持つた。この計算には logistic curve だけを使つた。後述の理由により諸法中最も信頼しうるものと考えたからである。この推計では，得られた結果の正確さを判断する上に非常に有効であると思われる logistic grid[1] なるものを使つた。本文は以上に関する報告である。

II. 資　　料

1. 対象とする市町村

（1） 札幌市　昭和 30 年現在の市域で，約 287 km² の面積をもつ。

（2） 都市計画区域（予定）（1）に次の市町村を加えたもので，1 530 km² の面積。江別市，豊平町，石狩町，手稲町，広島村。

2. 人　　口

札幌市役所都市計画課員の調査によるもので，表―1 に示す通りである。

札幌市は昭和 16 年以降数次にわたつて隣接町村を併合しているが，ここに示す札幌市の人口は，昭和 30 年現在の市域について大正 7 年までさかのぼつて集計したものである。

a. 人口の計算に当つては10位で，四捨五入し，万を単位とした。

b. 一連番号は計算の都合上つけたもの。

c. 算術及び幾何平均については後述。

d. 人口を推計曲線と共に図示すると図―1のようである。

表―1

No.	年次	西歴	札幌市 実人口	札幌市 算術平均	札幌市 幾何平均	都市計画区域 実人口	都市計画区域 算術平均	都市計画区域 幾何平均
				（万）	（万）		（万）	（万）
1	大.7	1918	117,209			164,208		
2	8	19	122,005			168,987		
3	9	20	127,916	13 25	13 18	175,614	17.94	17.94
4	10	21	141,923	14 16	14 07	189,933	18 91	18 85
5	11	22	153,230	15.17	15 09	200,990	19.92	19 86
6	12	23	162,828	16 14	16 09	209,987	20.91	20 87
7	13	24	172,703	16 98	16.94	219,384	21.68	21.65
8	14	25	176,288	17.65	17 63	224,977	22.30	22 28
9	昭.1	26	183,825	18 22	18 21	228,461	22 82	22 82
10	2	1927	186,807	18.75	18.73	231,949	23.31	23 30
11	3	28	191,421	19 42	19.40	236,182	24.00	23 98
12	4	29	198,987	20 04	20.01	243,986	24.69	24.66
13	5	30	209,922			259,637		
14	6	31	214,923			262.684		
15	7	32	220,830			269,326		
16	8	33	227,299			278,436		
17	9	34	230,505	23.33	23 31	281,507	28.53	28 51
18	10	35	242,220	23 90	23 88	298,009	29 20	29.19
19	11	36	245,465	24.27	24 26	299,052	29.64	29.64
20	12	1937	249,454	24.54	24.54	303,114	30 04	30.04
21	13	38	245,828	24.74	24.73	300,678	30.34	30.33
22	14	39	243,773			301,099		
23	15	40	252,546			312,865		
24	16	41	254,876			317,910		
25	17	42	256,615	25.60	25.60	322,477	32 02	32 01
26	18	43	258,284	25.76	25.76	324,717	32.47	32 47
27	19	44	257,929	26 00	26.00	322,944	32.88	32 87
28	20	45	260,282	26 97	26.91	335,844	34 15	34 07
29	21	46	266,883	28.15	28.04	338,117	35.65	35 51
30	22	1947	305,119	29 66	29.52	385,787	37.59	37 44
31	23	48	317,217	31.39	31.26	399,979	39.71	39.55
32	24	49	333,265	33.22	33 16	419,821	41.92	41 86
33	25	50	346,799	34.59	34.54	441,591	43.54	43.48
34	26	51	358,448	36.32	36.24	449,028	45.52	45 45
35	27	52	374,063	38.10	38.00	466,765	47.59	47.49
36	29	53	403,440	39.70	39.61	498,757	49·54	49 45
37	28	54	422,446			523,174		
38	30	55	426,606			540,405		

III. Logistic Curve

1. 概　論

式形は

$$y=\frac{K}{1+me^{ax}} \qquad \cdots\cdots(1)$$

y=基準とする年次より x 年後の人口

K=飽和人口

m, a =定数

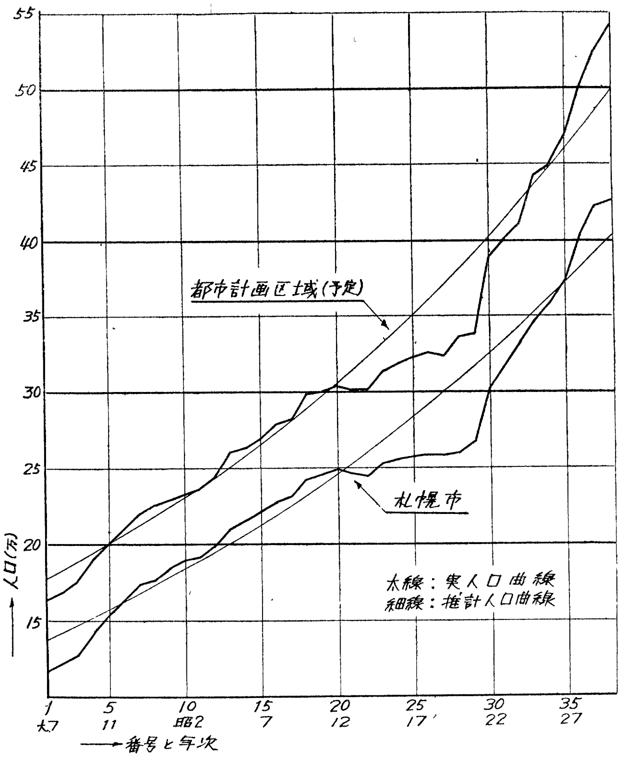
e=自然対数の底

であつて，a は必ず負である。

式形からわかるように $x=-\infty$ で人口は 0 であり，∞ で一定値 K に近付く。この式はフランスの Verhulst の人口に関する次の理論（1844）を，アメリカの Raymond Pearl（1924）が数式化し実用に供したもので，アメリカの人口を非常な精度で推計したので有名である[1]。Verhulst の理論の大要は，ある一ツの社会の経済力が無限に増大する場合には，その社会の人口の増加率は一定であるが，その経済力に限度がある時は，人口の増加割合は次第に減少して，経済力の限界に応じたある一定値に限りなく近付く，とするものである。ある都市の経済水

* 北大助教授，工学部土木教室

準はその都市のしめるその地域での位置に応じてある程度の限界が予想され，無限に伸長するものとは考えられないから，その都市が経済的に包容できる人口には当然或る限界があり，経済的吸引力の少い都市には人口が集中しないだろう事は想像にかたくない。すなわちこの式の根本が社会科学に立脚して，人口それ自身の動的性質の把握から出発している事が，他の方法の何れよりも信頼しうる原因と考えられる。これに反して従来一般に行われて来た直曲線のあてはめによる方法は，単に既往の人口曲線に数学的に直曲線をおしあてゝ，これを将来に延長するにすぎないものであつて，過去の人口こそ正確に表現できても，将来人口に至つては，これを信ずべきなんらの根拠もないのである。



図—1　実人口と推計人口

たとえば，旧城下町などの生産性の低い都市の人口がほぼ直線的にゆるやかに増加している例があるが，これは logistic curve の端末に近い，Kに漸近する部分に相当するものと考えられるが，遠い過去の城下町成立の時期には人口が急速に増加したはずであつて，これらの関係は直線式では表現できない。反対に新興都市で現在非常ないきおいで人口が増加している場合は，よく指数曲線があてはまるが，これでは将来人口が過大になつて，30 年，50 年後の推計には使えそうもない場合が多い。これは logistic curve の立上り部分に相当するもので，やがてゆるやかな増加部分に移行する。筆者が，この方法だけによつて推計作業を進めた理由は以上のようなものである。

なお，この方法でも，他の方法による場合と同様に，過去及び将来の人口増加が順調である事を仮定の一ツにしている。これを逆にいえば，その都市の経済機構をゆがめたり，こわしたりするような異変がなかつたし，また，ない事を想定するものであつて，不規則な増減を示した過去人口の傾向からは将来人口を推算できないし，将来，大戦争などで人口が離散絶滅することなどは予想しないのである。これを図—1 の人口曲線についてみると，昭和 12 年（No, 20）から 10 年間は第二次世界大戦のために一つの断層をなしている。このような不完全な資料をもつてしては，厳密には推計々算をなし得ないわけである。

しかし筆者としては，上記の理論が果して，国家全体としての貧富の差や経済機構の差違に無関係に成立し得るものかどうか疑問なしとしない。アメリカの都市の示す飽和人口の内容は，日本の場合のそれと，よほど違つていて，日本の場合，飽和人口は少な目に出るだろうし，したがつて推計人口が過小に出るのではないだろうか[2)]。またこの理論は自由主義経済社会によりよくあてはまるものと考えられる。

2．定数のきめ方

これは理論的には極めて簡単で，二つある。第一が最小二乗法によるもので，多数の対応する x, y から規正方程式を作つて K, m, a をきめるわけであるが，式形が簡単でないので計算が非常に繁雑になる。第二が 3 点法ともいうべきもので，本計算はこの方法によつた。すなわち，（1）式を満足する 3 点，$(0,\ y_0)$，$(x_1,\ y_1)$，$(2x_1,\ y_2)$ をきめ，(1) に入れて定数についてとくに次のようになる。

$$K=\frac{2y_0y_1y_2-y_1^2(y_0+y_2)}{y_0y_2-y_1^2} \quad\cdots\cdots(2)$$

$$m=\frac{K-y_0}{y_0} \quad\cdots\cdots(3)$$

$$a=\frac{1}{x_1\log_{10}e}\log_{10}\frac{(K-y_1)y_0}{(K-y_0)y_1} \quad\cdots\cdots(4)$$

(4) で a は K, y の大小関係から必ず負となる。K, m は勿論正である。

問題は3点のえらび方であるが，3点が等間隔であり，K が負になつたり在来人口より少くなつたりしなければ何でもよいわけであるが，これだけでは得られた結果が果して妥当なものかどうかの判断がつかない。この時次項に示す logistic grid が有効となる。

さて本計算では，比較のために，y の値として次の3者を用いた。すなわち，

a. 無作為 (R) 過去の人口をそのまゝ y とするもので，Rの 3・20・37 の組合せは，表—1の一連番号の No. 3 を $(0, y_0)$，No.20 を (x_1, y_1)，No. 37 を $(2x_1, y_2)$ とするもの。$x_1=17$

b. 算術平均 (A) Aの 3・20・37 の組合せは，No. 3 を中心として上下に2ツづつ，すなわち No. 1, 2, 3, 4, 5 の算術平均を y_0 として $(0, y_0)$，No. 20 を中心とする5者の算術平均を y_1 として (x_1, y_1) とする。以下同様。$x_1=17$

c. 幾何平均 (G) 前項の算術平均を幾何平均とよみかえればよい。

表—1に示す算術平均，幾何平均はこれを示すもので，元来同一の数値群の A は G より大であるが，表中には A と G の等しいものやほとんど差のないものがあるのは 10 位での四捨五入によるものである。

IV. Logistic Grid

これは飽和率と年数との相互関係を表わす，特殊な目盛であつて，ある組合せの計算で得られた結果の当否を判断するのに役立つ。Velz と Eich による[1]。

$$p=\frac{y}{K}\times 100$$

の p を飽和率とすると，(1) 式から

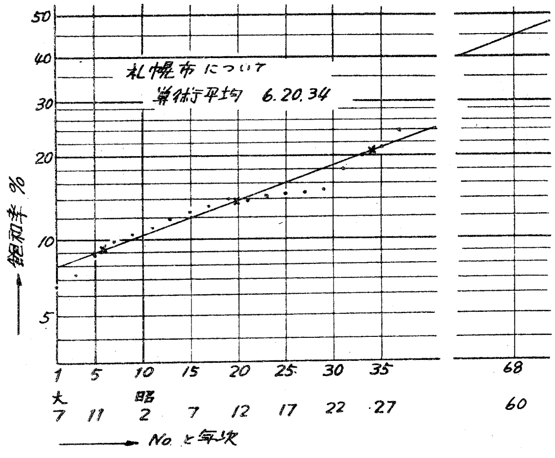
$$\frac{100\,y}{K}=\frac{100}{1+me^{ax}}=p$$

で，これを x についてとくと

$$x=\frac{1}{a\log_{10}e}\left(\log_{10}\frac{100-p}{p}-\log_{10}m\right)$$

a, m, e はきまつているから p を対数目盛にめもると，p と x は直線の関係にある。たとえば $p=50\%$ なら対数目盛で1の所が 50% である。こうして作つた目盛が logistic grid であつて図—2はこれである。

図—2 Logistic Grid



これを使うと次の事が分る。

(1) 仮定した3点は図上で一直線をなす。

(2) この直線上の各年次の p は推計人口の飽和率を示す。之を p_b とする。

(3) 在来人口の飽和率を p_a とし，p_a と p_b との差を処理すると推計曲線の信用の程度が分る。こゝに

$$p_a=\frac{(\text{各年次の実人口})}{K}\times 100$$

(4) 直線を延長すると計画年次の p が分り，したがつて大略の計画年次人口が求められる。

以上の事を (1) 式の定数を完全にきめてから各年次の人口を計算し，精度をみるのでは，手数がかゝる上に，求めた K が妥当なものかどうかが最後まで分らないのに反して，この方法では，p_a を計算尺で，p_b を図上から求めるだけで大体の見当がつくので非常に手数が省ける。

V. 計　算

計算は，はじめ，ほとんどすべての組合せについて行つたが，大半は不適の結果となつた。それで結局，中央の，y，すなわち y_1 を No. 17～21 の5者におき，x_1 を 8～9 より大きくとつて，可能な数だけの組合せを作つて計算すればよいことがわかつた。

(1) 比較計算

上記の方針で，R, A, G の3ツの場合について計算した。260 以上の組合せについて計算した。今1ツの例として札幌市のA で 6・20・34 の組合せについて計算順序を示すと次のようである。

a. $y_0=16.14$, $y_1=24.54$, $y_2=36.32$

b. K の計算，(2) 式，計算器，176.2

c. 在来人口飽和率 p_a の計算，計算尺。

d. 推計人口の飽和率 p_b のよみとり，図—2 から。すなわち y_0, y_1, y_2 の飽和率を図に目盛ると直線になり，この直線と各年次の交点から p_b をよむ。

e. 標準偏差 σ_p の計算，バローの表と計算尺。N を全年数として

$$\sigma_p=\sqrt{\frac{\Sigma|p_a-p_b|^2}{N}}$$

を計算する。

以上のようにして作られたのが 表—2 であつて，他の組合せによるものと，σ_p あるいは σ_p' を比較することによつて結果の優劣をきめるわけである。この比較が 表—3 である。

表—2　飽和率の計算

No.	p_a (%)	p_b (%)	p_a-p_b (%)	$(p_a-p_b)^2$
1	6.65	7.92	−1.27	1.6129
2	6.93	8.20	−1.27	1.6129
3	7.26	8.40	−1.14	1.2996
4	8.05	8.70	−0.65	0.4225
5	8.69	8.92	−0.23	529
6	9.25	9.20	0.05	25
7	9.80	9.55	0.25	625
8	10.00	9.80	0.20	400
9	10.43	10.20	0.23	529
10	10.60	10.40	0.20	400
11	10.86	10.75	0.11	121
12	11.30	11.15	0.15	225
13	11.90	11.40	0.50	2500
14	12.20	11.75	0.45	2025
15	12.52	12.10	0.42	1764
16	12.90	12.43	0.47	2209
17	13.10	12.80	0.30	900
18	13.75	13.23	0.52	2704
19	13.94	13.60	0.34	1156
20	14.16	14.00	0.16	256
21	13.94	14.40	−0.46	2116
22	13.82	14.80	−0.98	9604
23	14.33	15.25	−0.92	8464
24	14.46	15.70	−1.24	1.5376
25	14.58	16.20	−1.62	2.6244
26	14.67	16.60	−1.93	3.7249
27	14.64	17.10	−2.46	6.0516
28	14.78	17.50	−2.72	7.3984
29	15.15	18.00	−2.85	8.1225
30	17.30	18.50	−1.20	1.4400
31	18.00	19.00	−1.00	1.0000
32	18.90	19.50	−0.60	3600
33	19.69	20.10	−0.41	1681
34	20.30	20.60	−0.30	900
35	21.20	21.20	0.00	0
36	22.90	21.70	1.20	1.4400
37	23.93	22.25	1.68	2.8224
38	24.20	22.90	1.30	1.6900

No.	p (%)
6	9.16
20	13.93
34	20.60

$N=38$

$\sum_{1}^{38}(p_a-p_b)^2=47.0730$

$\sigma_p=1.11\%$

$\sigma_p'=0.74\%$

$K_{68}=78.2$ 万

$p_{68}=45\%$

表—3　σ_p の比較

項目		組合せ	飽和人口 (万)	K_{68} (昭. 60) (万)	p_{68} (〃) (%)	σ_p (%)	σ_p' (%)
札幌市	R	4・20・36	107.4	75.8	70.5	2.27	1.38
		5・〃・35	85.5	65.0	76.1	2.46	1.48
		7・〃・33	104.0	65.7	63.2	1.95	1.47
	A	4・20・36	121.0	78.4	64.8	1.75	1.16
		5・〃・35	153.2	81.2	53.0	1.33	0.82
		6・〃・34	176.2	78.2	45.0	1.11	0.74
		7・〃・33	150.0	73.0	48.7	1.29	0.99
		8・〃・32	117.0	67.2	57.5	1.72	1.43
	G	4・20・36	110.8	75.4	68.0	1.92	1.27
		6・〃・34	151.5	77.2	51.0	1.25	0.84
		7・〃・33	133.6	71.6	53.6	1.45	1.11
		8・〃・32	107.6	65.0	60.5	1.91	1.73
都市計画区域	R	1・19・37	284.0	115.9	40.8	0.95	0.57
		2・〃・36	180.0	101.9	56.5	1.38	0.77
		3・〃・35	113.0	83.5	73.9	2.12	1.25
		6・〃・32	277.0	95.8	34.6	0.80	0.59
	A	3・19・35	280.6	109.2	39.0	0.81	0.47
		4・〃・34	314.1	106.8	34.0	0.68	0.37
		5・〃・33	387.0	103.7	26.8	0.52	0.36
		7・〃・31	191.2	84.4	44.2	1.30	1.27
	G	3・19・35	266.8	109.3	40.9	0.76	0.47
		4・〃・34	261.6	104.5	39.9	0.75	0.45
		5・〃・33	296.8	101.8	34.4	0.67	0.45
		7・〃・31	135.0	78.7	58.3	1.96	1.79

R: 無作為　A: 算術平均　G: 幾何平均

表—4　諸定数

区別	K	m	a	b	c
札幌市	1762,173	9.9180480	−0.0337873	0.9964263	0.0146734
都市計画区域	3867,708	18.4161646	−0.0303042	1.2651991	0.0131608

σ_p' は No. 21 から 29 までを除外したものについて計算したもので，人口の平常変化部分と推計値とが，どの程度よく合致するかをみるために計算したものである。また K_{68}, p_{68} は，No. 68 すなわち昭和 60 年の人口と飽和率であつて，logistic grid の直線を延長して求めたものである。筆者が実際に使つた目盛りは p を 0.02 まで目測できるもので，×印は 3 点である。

表—3 をみると，札幌市では A の 6・20・34，計画区域では同じく A の 5・19・33 が，σ_p, σ_p' の何れでも最小であるからこれを採用することにした。

（2） 詳細計算

(1) 式の諸定数を計算すると 表—4 のようになる。この表の b, c は (1) 式の分母を計算しやすくするための係数で

$$\mu=me^{ax}\qquad \log\mu=\log m+ax\log e=b-cx$$

である。

これらを用い各年次の推計人口 P_b (図—1 の細線) を求め，実人口 P_a (図—1 の太線) との関係から平均偏差 ε, 標準偏差 σ, 標準偏差率 v, を計算すると 表—5 のようである。

表—5　ε, σ, v と将来人口

項目	札幌市	都市計画区域
ε (万)	1.49	1.45
σ (〃)	1.93	2.05
v (%)	7.83	6.63
昭. 40.	51.8	64.4
50.	65.1	82.4
60.	79.3	103.7
80.	108.7	155.4
100.	133.9	213.4
150.	166.5	328.2
200.	174.3	372.2

こゝに

$$\varepsilon=\frac{\Sigma\,|P_a-P_b|}{N},\quad \sigma=\sqrt{\frac{\Sigma\,|P_a-P_b|^2}{N}},\quad v=\frac{\sigma}{\bar{P}}\times 100$$

N=全年数　　$\bar{P}$=平均人口$=\Sigma P/N$

で推計値の分散の度を示す。なお同表には将来人口の一部を示す。この結果，計画年次昭和 60 年の推計人口として夫々 80 万と 105 万を得たわけである。

なおこゝに示した σ は，既出の σ_p と同性質のもので σ を K で割ると σ_p になる。すなわち logistic grid を使うと，結果の比較の基準である σ が図上から急速に求まるわけである。

VI. 他の方法との比較

図—1 の実人口曲線には，在来のどんな方法もあてはまらないと考えたので，人口問題研究所[3]で示した次の二式と比較した。

$$y=A_1+B_1x+C_1\frac{1}{x} \qquad \cdots\cdots(5)$$

$$y=A_2+B_2x+C_2\log x \qquad \cdots\cdots(6)$$

で，これらの式の考え方は，年次を戦後にだけ限つてみると，人口は急増しているが，その増加割合は年と共にへつていることに着目したもので，この二式を x について微分すると，微係数が x の増加と共に減少する式形である。昭和 20 年を原点として，各係数，P_{68}，σ を計算すると 表—6 のようであり，また二式の y にはほとんど差がないから (6) 式の結果だけを logistic と共に図示すると 図—3 のようである。

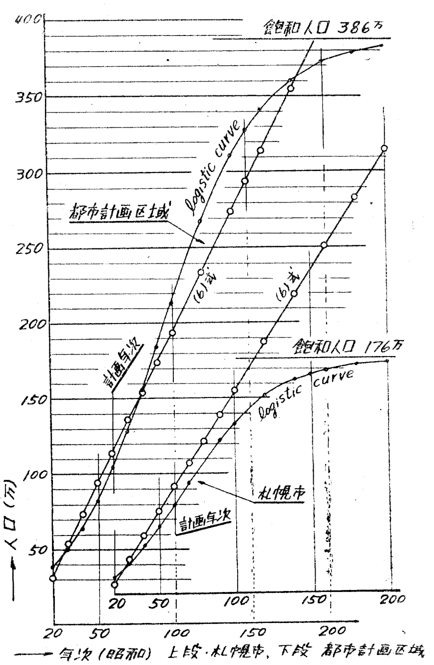
表—6 (5)，(6) 式の計算結果

項目		札幌市	都市計画区域
(5) 式	A_1	24.88056	31.12590
	B_1	1.66697	2.07387
	C_1	−0.75374	0.22835
	P_{68}	93.2 万人	116.2 万人
	σ	0.62	0.77
(6) 式	A_2	24.19202	31.19396
	B_2	1.58667	2.00222
	C_2	1.39422	0.61438
	P_{68}	91.5 万人	114.3 万人
	σ	0.63	0.77

これらをみると，(5)，(6) 式による昭和 60 年人口は logistic によるものより 10 万程大きく，その標準偏差は 1/3 程度で，精度が高い。

まず，推計人口の多いことであるが，この比較は結局，推計の基本理念が合理的であるかどうかに求めるより他に方法がない。(5)，(6) の式は，第 3 項が前 2 項に比べて非常に小さいので，図—3 からも分るように，ほとんど直線に等しい。結局直線式をあてはめたのと大差ないから，直線式の可否を論ずればよいことになる。ただ在来人口の可能なすべてを使わずに，戦後の比較的斉一な部分をとつた事に特長がある。だから戦後の傾向がほぼ直線的に持続するかどうかが問題になるが，少くとも遠い将来に関しては正しくないと考えられる。反対に近い将来については‘戦後の傾向がこゝ 4，5 年で急変するとは考えられないから，(5)，(6) 式の方に歩がありそうである。それでは問題の 30 年後はどうかとなると，之は何とも言えないが，この二式は直線式の欠点として，戦後の特殊傾向を強調しすぎて，大き目の値を与えているのではないかと思う。

図—3 推計値の比較



第二の偏差の小さい事であるが，これは，戦後のほぼ直線的に増加している部分に，直線に近いものをあてはめるのだから，偏差の小さいのは当然なのであつて，このために (5)，(6) 式の方が正しいということにはならない。

比較の結論として言えそうな事は，近い将来については，この二式に一歩ゆずるとしても，遠い将来，たとえば，二式が logistic と交サしたり，分岐したりしている点の年次からみて昭和 80～90 年以後では logistic の方が正しいのではないかと言う事である。

VII. 結　　論

以上の結果を総合すると，大体次のような事が言えそうである。

(1) logistic grid は，最適の組合せを発見するのにきわめて有効な方法である。grid は一度作つて墨入れし，直線の記入などを鉛筆がきでやれば何回でも使えるし，図上計算だから気楽である。

(2) 計算の基礎となる人口に，既述の3者のうちのいずれを使つたらよいか，あるいは全く別種のものを使つたらよいかどいかどうかは，にわかに断定できないが，本計算ではいずれも A に落着いた事，及び一般に A は残りの R, G より大きい値を示して，曲線全体が大きい値を与へ，logistic curve がやゝ少な目の結果を与えるといわれる欠点をおぎなえると考えられる点，さらに計算がさほど面倒でない等の点から A をとるのがよいように思われる。

(3) 図—1をみると，推計曲線はいずれも実人口曲線の上半部に片寄つている。これが偏差が比較的大きくなつた原因である。このため筆者は，曲線を下方に移動させるために3点の y から適当の値をさし引いて何度か計算をくりかえしてみたが，σ を小にすることができなかつた。これからみると，3点の y は実人口から余りかけはなれたものであつてはいけないようである。

(4) 偏差が大きくなつた事のもう一ツの原因は，資料である人口の変化が不規則であることにある。これは，不揃いな資料による推計の精度が低いことを意味するもので，我々の場合やむを得ないことである。断層部分を無視した σ_p' は当然のことながら σ_p よりズッと小さい。

(5) 人口問題研究所の式は，戦後の現象だけに注目して都市自体の性格が無視されているから，近い将来の推計には役立つても，長期の推計には無理があると考えられる。

(6) logistic curve の，最小二乗法によらない解法は，計算が簡単なようでも，最適の K をみつけるのに，非常に沢山の組合せについて計算せねばならないし，またこのようにして求めたものでも，それがこの方法によるもののうちで最良のものであるという確信はもてない。その点最小二乗法によれば，いかに計算が複雑で，その上近似解であつても，計算は一回だけであるし，またこの時の偏差は非常に小さいはずだから，結果として最良のものが得られるに違いない。この点については今後の研究にまちたい。

本計算の一部は当研究室の平尾，高比良両君に負う所が多い。記して謝意を表する次第である。

参考文献

1) Civil Eng. Feb. 1952 page 35～39
J.E. McLean: More accurate population estimates by means of logistic curves

2) 石川栄耀：新訂『都市計画及び国土計画』昭.29，109頁

3) 厚生省人口問題研究所，研究資料第 86 号，昭.28.2 〃特殊の傾向曲線による戦後日本の人口増加形態の表現方法〃

(昭. 31. 3. 19)

昭和31年8月25日 印刷　土木学会論文集
昭和31年8月31日 発行　第 36 号
定価 120 円 (〒 20 円)

編集兼発行者　東京都千代田区大手町2丁目4番地　中川一美
印刷者　東京都港区赤坂溜池5番地　大沼正吉
印刷所　東京都港区赤坂溜池5番地　株式会社 技報堂

東京中央郵便局区内　千代田区大手町2丁目4番地
発行所　社団法人 土木学会　電話 (20) 3945・4078　振替東京16828