

サンドドレーンの圧密理論について

正員 矢内保夫*
 正員 水野高明**
 正員 木庭宏美***

1. まえがき

軟弱地盤の圧密促進の目的でサンドドレーン工法、いわゆる、砂杭工法の利用が盛んになつてきた。サンドドレーンによる圧密の理論は、基本的の場合に対して始め Carriro⁽¹⁾ によつて導かれていたよゝであり、さらに Barron⁽²⁾ によつて、ドレーンウエルの周壁を粘土の攪乱層が取巻く場合、並びにドレーンウエル自体に流れに対する抵抗を考える場合等に拡張されている。しかしながら、その詳細は一般に紹介されていないよゝであるし、著者等も Carriro の論文を見る事ができなかつたので、こゝに Barron の論文を参照して基本的な計算式を誘導し、サンドドレーン圧密計算の参考に供すると共に計算の結果得られた若干の事項を紹介する。

例えば、サンドドレーンが図-1のように千鳥形に配置された場合、1本のウエルへの流入区域は6角形となる

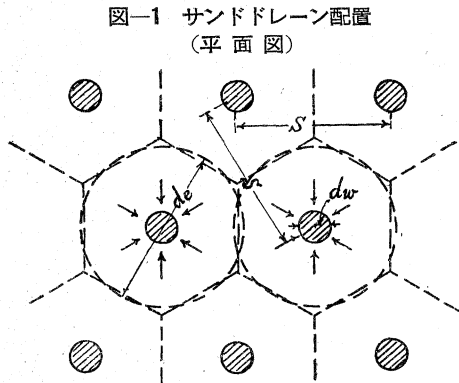


図-1 サンドドレーン配置 (平面図)

がこれを点線の様な等面積の円でおきかえ、円周を横切る流れはないものと仮定する。図-2は1本のウエルに対する影響区域を示す断面図で、ウエル周壁並びに上下面を通しては流出自由なものとする。図のように r, z なる円柱座標を取り、鉛直方向への透水係数を k_v 、圧密係数を c_v 、水平方向へのそれらをそれぞれ k_h, c_h とすれば、過剰水圧 u の基本方程式は次のようになる。 t は時間を表わす。

$$c_h \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \dots (1)$$

2. 水平方向のみの流れ

鉛直方向の流れを除外して水平な放射流のみを考えれば、(1)式に於て $c_v = 0$ とおく事によつて、

$$c_h \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \dots (2)$$

となる。今、 R を r のみの函数、 T を t のみの函数として、

$$u = RT \dots (3)$$

とおけば、

$$\frac{1}{c_h T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} = -k^2 \dots (4)$$

を得る。ただし k は常数である。(4)より、

$$\frac{dT}{T} = -k^2 c_h dt \dots (5)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0 \dots (6)$$

が得られる。(5)を解けば、

$$T = C e^{-k^2 c_h t} \dots (7)$$

となり、(6)の一般解は、

$$R = A J_0(kr) + B Y_0(kr) \dots (8)$$

で与えられる。こゝに J_0 は0次の第1種ベッセル函数、 Y_0 は0次の第2種ベッセル函数、 A, B, C は積分常数を示す。

故に(2)式の解は次の形となる。

$$u = \sum_k \{ A_k J_0(kr) + B_k Y_0(kr) \} e^{-k^2 c_h t} \dots (9a)$$

これを次のようにおく。

*富山県河港課長, **工学博士, 九州大学教授, 工学部土木教室, ***運輸省長崎港工事々務所

$$u = \sum_k A_k V_0(kr) e^{-k^2 c_n t} \dots\dots\dots (9b)$$

r_e における境界条件は,

$$r = r_e, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。しかるに (9a), (9b) より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= -\sum_k k \{A_k J_1(kr) + B_k Y_1(kr)\} e^{-k^2 c_n t} \\ &= -\sum_k k A_k V_1(kr) e^{-k^2 c_n t} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる。ただし J_1, Y_1 は何れも 1 次のベッセル函数である。よつて (10) の条件を用うれば,

$$A_k J_1(kr_e) + B_k Y_1(kr_e) = A_k V_1(kr_e) = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\therefore B_k = -A_k \frac{J_1(kr_e)}{Y_1(kr_e)} \dots\dots\dots (13)$$

を得る。

r_w における境界条件は,

$$t > 0, \quad r = r_w, \quad u = 0 \dots\dots\dots (14)$$

すなわち,

$$A_k J_0(kr_w) + B_k Y_0(kr_w) = A_k V_0(kr_w) = 0 \dots\dots\dots (15)$$

となる。よつて (12) と (15) とが連立に成り立つためには,

$$\frac{J_1(kr_e)}{J_0(kr_w)} = \frac{Y_1(kr_e)}{Y_0(kr_w)} \dots\dots\dots (16a)$$

または

$$\frac{J_1(kr_e)}{Y_1(kr_e)} = \frac{J_0(kr_w)}{Y_0(kr_w)} \dots\dots\dots (16b)$$

なる関係が存在すべきであり, これから k が決定される。あるいは (16b) において,

$$r_e/r_w = n, \quad kr_w = \alpha, \quad kr_e = n\alpha \dots\dots\dots (17)$$

とおけば,

$$\frac{J_1(n\alpha)}{Y_1(n\alpha)} = \frac{J_0(\alpha)}{Y_0(\alpha)} \dots\dots\dots (18)$$

となり, これから α を決定してもよい。

次に初期荷重分布を,

$$u_0 = f(r) \dots\dots\dots (19)$$

とすれば, 初期条件として次の関係を満足すべきである。

$$t = 0, \quad u = u_0 = f(r) \dots\dots\dots (20)$$

故に

$$f(r) = \sum_k A_k \left\{ J_0(kr) - \frac{J_1(kr_e)}{Y_1(kr_e)} Y_0(kr) \right\} = \sum_k A_k V_0(kr) \dots\dots\dots (21)$$

が成り立つ。しかるに $V_0(kr)$ は円柱函数であるから, 両辺に $rV_0(k'r)$ を乗じて積分すると, 次の関係が得られる。

$k \neq k'$ の場合には,

$$\int_{r_w}^{r_e} A_k V_0(kr) V_0(k'r) r dr = \frac{A_k^1}{k^2 - k'^2} [rkV_0(k'r)V_1(kr) - rk'V_0(kr)V_1(k'r)]_{r_w}^{r_e} = 0$$

となるから $k = k'$ の値のみが残り,

$$\begin{aligned} \int_{r_w}^{r_e} f(r) V_0(kr) r dr &= \int_{r_w}^{r_e} A_k V_0^2(kr) r dr \\ \therefore A_k &= \frac{\int_{r_w}^{r_e} f(r) V_0(kr) r dr}{\int_{r_w}^{r_e} V_0^2(kr) r dr} \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

で A_k が決定される事となる。

$$\text{特に } u_0 = f(r) = \text{constant} \dots\dots\dots (23)$$

の場合には,

$$\begin{aligned} \int_{r_w}^{r_e} u_0 V_0(kr) r dr &= u_0 \left[\frac{r}{k} V_1(kr) \right]_{r_w}^{r_e} = -u_0 \frac{r_w}{k} V_1(kr_w) \\ \int_{r_w}^{r_e} V_0^2(kr) r dr &= \left[\frac{r^2}{2} \{V_0'^2(kr) + V_0^2(kr)\} \right]_{r_w}^{r_e} = \left[\frac{r^2}{2} \{V_1^2(kr) + V_0^2(kr)\} \right]_{r_w}^{r_e} \\ &= \frac{r_e^2}{2} V_0^2(kr_e) - \frac{r_w^2}{2} V_1^2(kr_w) \\ \therefore A_k &= \frac{2 u_0 \frac{r_w}{k} V_1(kr_w)}{r_w^2 V_1^2(kr_w) - r_e^2 V_0^2(kr_e)} \dots\dots\dots (24a) \end{aligned}$$

または

$$A_\alpha = \frac{2 u_0 V_1(\alpha)}{\alpha [V_1^2(\alpha) - n^2 V_0^2(n\alpha)]} \dots\dots\dots (24b)$$

従つて (9a) より,

$$\begin{aligned} u &= \sum_k A_k \left[J_0(kr) - \frac{J_1(kr_e)}{Y_1(kr_e)} Y_0(kr) \right] e^{-k^2 c_h t} \\ &= \sum_\alpha A_\alpha \left[J_0\left(\frac{\alpha}{r_w} r\right) - \frac{J_1(n\alpha)}{Y_1(n\alpha)} Y_0\left(\frac{\alpha}{r_w} r\right) \right] e^{-\alpha^2 \frac{c_h}{r_w^2} t} \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

が得られ、これがこの場合の過剰水圧を与える式である。

次に r_w から r_e に至る間の過剰水圧の平均値を \bar{u} とすれば,

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \int_{r_w}^{r_e} \frac{2\pi r u dr}{\pi(r_e^2 - r_w^2)} = -\frac{2r_w}{(r_e^2 - r_w^2)} \sum_k \frac{A_k}{k} \left[J_1(kr_w) - \frac{J_1(kr_e)}{Y_1(kr_e)} Y_1(kr_w) \right] e^{-k^2 c_h t} \\ &= -\frac{2}{n^2 - 1} \sum_\alpha \frac{A_\alpha}{\alpha} \left[J_1(\alpha) - \frac{J_1(n\alpha)}{Y_1(n\alpha)} Y_1(\alpha) \right] e^{-\alpha^2 \frac{c_h}{r_w^2} t} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

を得る。

3. 3次元の流れ

r, z 両方向へ流れる場合には基本方程式 (1) を用いねばならない。前と同様に Z を z のみの函数として,

$$u = RZT \dots\dots\dots (27)$$

とおけば, (1) より次の関係が得られる。

$$\frac{1}{c_h T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{c_v}{c_h} \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -h^2 \dots\dots\dots (28)$$

ただし h は常数である。

(28) より,

$$\frac{dT}{T} = -h^2 c_h dt \dots\dots\dots (29)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + h^2 = -\frac{c_v}{c_h} \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = l^2 \dots\dots\dots (30)$$

が得られる。 l は常数である。更に (30) より,

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{c_h}{c_v} l^2 Z = 0 \dots\dots\dots (31)$$

及び

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + (h^2 - l^2) R = 0 \dots\dots\dots (32)$$

を得る。(29) の解は,

$$T = C_1 e^{-h^2 c_h t} \dots\dots\dots (33)$$

であり, (31) の解としては $z=0$ における境界条件を考慮に入れて,

$$Z = C_2 \sin \sqrt{\frac{c_h}{c_v}} l z \dots\dots\dots (34)$$

を用うる。(32) の解は,

$$h^2 - l^2 = k^2 \dots\dots\dots (35)$$

とおけば, 前述の通り

$$R = \sum_k D_k \left[J_0(kr) - \frac{J_1(kr_e)}{Y_1(kr_e)} Y_0(kr) \right] = \sum_k D_k V_0(kr) \dots\dots\dots (36)$$

となり、 k は

$$\frac{J_1(kr_e)}{Y_1(kr_e)} = \frac{J_0(kr_w)}{Y_0(kr_w)} \dots\dots\dots (16 b)$$

より決定される。

よつてこの場合の (1) の解は次のようになる。

$$u_{rz} = \sum_l C_l \sin\left(\sqrt{\frac{c_h}{c_v}} lz\right) \sum_k D_k V_0(kr) e^{-k^2 c_h t} \dots\dots\dots (37)$$

C, D は初期条件より決定すべき係数である。

上下面における境界条件は、

$$t > 0, z = 0, u_{rz} = 0 \dots\dots\dots (38)$$

$$t > 0, z = 2H, u_{rz} = 0 \dots\dots\dots (39)$$

であつて、(38) の条件は既にみたされている。(39) の条件を満足するためには、

$$\sin\left(\sqrt{\frac{c_h}{c_v}} l \times 2H\right) = 0$$

でなければならない。従つて、 m を自然数として、

$$2\sqrt{\frac{c_h}{c_v}} lH = m\pi$$

あるいは、

$$\sqrt{\frac{c_h}{c_v}} l = \frac{m\pi}{2H} \dots\dots\dots (40)$$

なる事を要する。

しかるときは (37) は

$$u_{rz} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) \sum_k D_k V_0(kr) e^{-k^2 c_h t} \dots\dots\dots (41)$$

となり、こゝに

$$\left. \begin{aligned} h^2 &= k^2 + l^2 \\ l &= \frac{m\pi}{2H} \sqrt{\frac{c_v}{c_h}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

であり、 m は自然数、 k は、(16 b) を満足する値である。(42) の関係を用うれば (41) 式は次のように書きかえ得る。

$$u_{rz} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) e^{-\left(\frac{m\pi}{2H}\right)^2 c_v t} \sum_k D_k V_0(kr) e^{-k^2 c_h t} \dots\dots\dots (43)$$

また (43) において、次のような時間係数を用うる。

$$T_v = \frac{c_v}{H^2} t, \quad T_h = \frac{c_h}{d_e^2} t = \frac{c_h}{4n^2 r_w^2} t \dots\dots\dots (44)$$

こゝに d_e は図-1, 2 に示す通り影響圏の直径を表わす。しかるときは、

$$u_{rz} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) e^{-\frac{m^2 \pi^2 T_v}{4}} \sum_{\alpha} D_{\alpha} V_0\left(\frac{\alpha}{r_w} r\right) e^{-4n^2 \alpha^2 T_h} \dots\dots\dots (45)$$

を得る。

今初期荷重分布を、

$$u_0 = f(r, z) \dots\dots\dots (46)$$

とすれば、初期条件は、

$$t = 0, u_{rz} = u_0 = f(r, z) \dots\dots\dots (47)$$

故に、

$$f(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) \sum_k D_k V_0(kr) \dots\dots\dots (48)$$

が成立ち、これより C_m, D_k を定むべき事となる。

(43), (45) 及び (48) より明らかなようにこの場合の過剰水圧は鉛直流と水平流とを分離して計算し、これらを組み合わせればよい事を知る。

従つて、 U, U_z, U_r をそれぞれある時刻 t における実際の平均圧密度、鉛直流のみによる圧密度、並びに放射

流のみによる圧密度とすれば、次の関係が成立する事となる³⁾。

$$100 - U\% = \frac{(100 - U_z\%)(100 - U_r\%)}{100} \quad \dots\dots\dots (49)$$

次に特別の場合として初期圧力分布 u_0 が z のみの函数であれば、

$$u_0 = \varphi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi}{2H} z\right) \sum_k D_k V_0(kr) \quad \dots\dots\dots (50)$$

となり、

$$\sum_k D_k V_0(kr) = 1 \quad \dots\dots\dots (51)$$

なるように D_k を定めれば、(24 a)、(24 b) を参照して、

$$D_k = \frac{2 \frac{r_w}{k} V_1(kr_w)}{r_w^2 V_1^2(kr_w) - r_e^2 V_0^2(kr_e)} \quad \dots\dots\dots (52 a)$$

または

$$D\alpha = \frac{2 V_1(\alpha)}{\alpha [V_1^2(\alpha) - n^2 V_0^2(n\alpha)]} \quad \dots\dots\dots (52 b)$$

を得る。 C_m は $\varphi(z)$ をフーリエ級数に展開して普通の鉛直流の時と同様に決定すればよい。

また $f(r, z)$ が $z=H$ に対して対称、あるいは $z=H$ が不透水層であれば、 $m=1, 3, 5, \dots$ だけを取ればよい。

更に u_0 が z にも無関係に一定、すなわち全体に一樣であれば、任意の時刻の過剰水圧は、

$$u_{rz} = \frac{u_z u_r}{u_0} \quad \dots\dots\dots (53)$$

で求められる事になる。ただし u_z は初期分布 u_0 に対する鉛直流のみの場合の過剰水圧、 u_r は同じく放射流のみの場合の過剰水圧を示す。

4. ドレーンウエルの間隔と圧密に要する時間との関係

上記のように過剰間隙水圧は、鉛直流によるものと水平流によるものと合成されたものとなるが、一般にサン

図-3 圧密-時間曲線

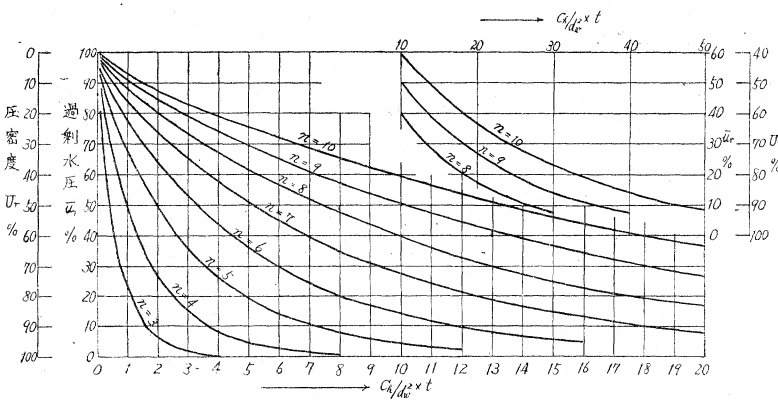
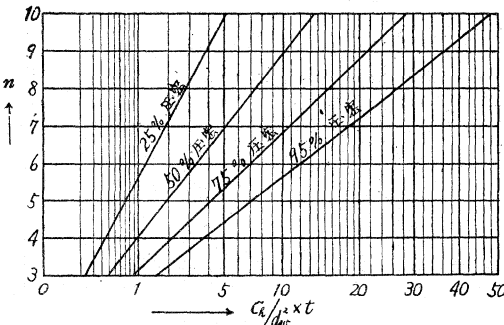


図-4 $n-c_h/d_w \times t$ 曲線



ドドレーン工法を採用する様な現場では、砂杭の間隔は粘土層の厚さに比して小さく扱ふのが普通である。このような場合には鉛直流の影響は極めて小さく、水平流の影響に比して無視し得る程度である事が多い。

なお、圧密係数 c_v, c_h については一般に c_h の方が可成大きい場合が多い様であるが、長崎港における実験の結果ではほとんど相違

がなかつた。今、初期間隙水圧 u_0 が水平方向には一定であるとして、水平流のみによる平均過剰水圧 \bar{u}_r と時間との関係を(26)式により求めると、各 n の値に応じて 図-3 の曲線が得られる。ただし、縦軸は $\bar{u}_r/u_0\%$ で表わしてある。なお圧密度 $U_r\%$ は次式で求められる。

$$U_r\% = (1 - \bar{u}_r/u_0) \times 100 \quad \dots\dots\dots (54)$$

次に砂杭の間隔と圧密時間との関係をしらべるために 図-4 では横軸に2.5乗根の縮尺を用いて、 $c_h/d_w^2 \times t$ を取り、縦軸には普通尺で n を取つて 図-3 より 25, 50, 75 及び 90% 圧密に应ずる点をプロットしたもので何れもほとんど完全に直線上にのる。この事は圧密に要する時間は、ドレーンウエルの間隔のほゞ 2.5 乗に比例して増大する事を

示すものである。

本図より所定の圧密時間に応ずる砂杭の間隔を求める事ができる。

5. 結 び

本文はサンドドレーン工法についての基本的理論を紹介したもので最も単純な場合であるが、実際はこの種の工法においては多くの不確定要素を含むのが通例であるから可成り複雑となるであろう。しかしながら計算結果は概略の数値を与えるに役立つものと思われる。

圧密に要する時間が砂杭間隔の 2.5 乗に略比例して増大する事を知つたが、この事は砂杭の間隔決定についての目標を与えるものである。

圧密一時間曲線より明らかなように初期における圧密の急速な進行が要求される場合にあつては、特に砂杭の間隔が小さい事が必要となる。ところが一方施工上及び工費の点よりは余り密に砂杭を配置する事は不利となる。間隔を密にすると、施工中に粘土そのものが攪乱されて強度を失うと共にサンドドレーン自体も攪乱粘土のために影響を受けて、その排水能力が減退する事も考えられる。よつてこの両者よりの考察によつて、 $n=4\sim 6$ 程度の間隔が適当であると考えられる。

参 考 文 献

- 1) N. Carriro : Simple Two and Three Dimensional Cases in the Theory of Consolidation of Soils, J. Math. Physics, Vol. 21, 1942
- 2) R.A. Barron : Consolidation of Fine-grained Soils by Drain Wells, Proc. ASCE, Vol. 73, 1947
- 3) K. Terzaghi : Theoretical Soil Mechanics, p. 291

(昭. 30. 9. 23)