

角と距離とを測った単純な四角形鎖の誤差と効率

ERRORS AND EFFICIENCIES OF SIMPLE QUADRANGLE CHAINS WITH OBSERVED ANGLES AND SIDE LENGTHS

森 忠次*

By Chuji MORI

We can now use many kinds of electronic tachymeters. By use of these instruments, some new systems of control survey, as well as of setting-out works, are carrying out. The author proposes several survey chains of single row quadrangles in which a instrument is set only a half of stations and angles and side lengths are observed. The characteristics of errors in these chains are described by computing cofactor (or variance) matrices of angles, coordinates and so on. Factors relating to efficiencies of surveying works are also shown a little. Considering the above data and comparing these with the data in a chain of single row triangles, we can find that the survey chains proposed are useful and efficient.

1. 緒 言

近距離用の小型光波測距儀が開発され、これとトランシットとを組み合わせると距離と角とが同時に観測できる器械が普及し、さらには測距と測角とを同一の望遠鏡で実施できるようにしたものまで市販されるようになった(本文ではこれらの器械を電子タキオメータとよぶことにする)。これらの器械を用いれば、トラバース測量や三角・三辺測量などが実行しやすくなり、器械の性能向上に応じて測量精度も向上するようになった。

一方では、諸工事に用いる低次基準点の測量のためには、所要の精度を確保すればよく、器械の性能に応じて効率的な測量方法を採用すればよい。たとえば、トランシットを用いるときと電子タキオメータを用いるときとを比較すると、前者では角のみしか観測できないが、後者によれば同時に測線長も観測できる。したがって、角と距離との誤差が位置誤差に同程度の影響を及ぼすものと仮定すると、測量網の形状特性による誤差の現われ方を考慮外とした場合に、器械設置ごとに観測個数が倍近く増すから、後者では器械設置点を約半分に減じてともよいという考えが出てくる。

交通路線や河川の工事にみられるように細長い区域に基準点を散在させるときには、三角形鎖、四角形鎖、六角形鎖などが従来から典型的な三角測量網の例とされてきたが、これらに代わるものとして角と距離を測る四角形鎖を提案する。その中の単純なものについて、平面位置の測量のみを行う場合を対象にして、誤差の特性と作業効率に関する数値を示すことによって、実用上の有効性を明らかにする。

2. 観測誤差と測量網

(1) 観測誤差の仮定

電子タキオメータを用いれば測点の三次元座標の観測が可能となるが、本文では平面座標観測の場合のみを取り扱うことにする。このとき、観測器械と観測方法とを指定すれば、ある標準測線長 S_0 のときに、測線間の角誤差 σ_θ に伴う測点位置の横ずれ $\sigma_\theta S_0$ と距離誤差 σ_{s_0} に伴う位置の縦ずれとが一致するようになる。そこで、測線長 S_0 のときに、

$$\sigma_{s_0} = \sigma_\theta \cdot S_0 \dots \dots \dots (1)$$

となるような観測を常に行うとしたとき、任意の測線長 S における角誤差 σ_θ と距離誤差 σ_s の現われ方の推定の代表例としては、次のような 4 種の仮定がある。

$$(i) \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta, \quad \sigma_s = \sigma_\theta \cdot S$$

* 正会員 工博 岡山大学教授 工学部土木工学科
(〒700 岡山市津島中1)

- (ii) $\sigma_\theta = \sigma_0 \sqrt{S_0/S}$, $\sigma_s = \sigma_0 \sqrt{S_0} \sqrt{S}$
- (iii) $\sigma_\theta = \sigma_0 \cdot S_0/S$, $\sigma_s = \sigma_0 \cdot S_0$
- (iv) $\sigma_\theta = \sigma_0$, $\sigma_s = \sigma_0 \cdot S_0$

ここに、(i) は長距離、(ii) は中距離、(iii) は短距離¹⁾の測線よりなる測量網において用いられることが多い。(iv) は測線長がほぼ一定のときに、その平均測線長が式(1)の S_0 に合致するという仮定のもとで、簡単のために採用されるものである。

(2) 考察対象の測量網

従来からの鎖状の三角測量網の例を Fig. 1(a) に示す。これらの測量においては、各測点に必ずトランシットを設置して測角するのを基本的な前提としていた。これらの鎖に似た形をしている Fig. 1(b) のような四角形の連続した測量網を取り上げ、電子タキオメータは約半分の測点にしか設置しない代わりに、角のみならず辺長も観測する測量方式を考える。このような方式では、器械本体1台について反射プリズムを数個用意すれば作業効率が向上する。

鎖 A は測点の中央列に器械を設置するもので、鎖 B

1, B 2 は測点列の両側1点ごとに器械を置く例である。両者の差は測点条件にあって、B 2 は器械設置点のまわりの角の間に測点条件が成立しない。本文では以上の測量鎖のみを数値計算の対象とするが、鎖 C, D, E のように対角線の観測を行うものをはじめ、各種の測量網を考慮することができる²⁾⁻⁴⁾。

(3) 測量網の形と誤差の仮定

四角形鎖を構成する四角形は、すべての辺長が標準距離 S_0 であって、Fig. 1 のように直線状に接続しているものとする。そうすると、誤差の仮定 (i)~(iv) のいずれを採用しても

$$\sigma_\theta = \sigma_0, \sigma_s = \sigma_0 \cdot S_0 \dots \dots \dots (2)$$

となり、計算対象測量網の観測角は 90° または 180° である。もちろん各観測値は互いに独立であるとする。

式および数値の取扱いを簡単にするため、距離は S_0 を単位とした無次元量で表わすことにする。たとえば、Fig. 2(A) において

$$\overline{P_1F_1} = a_1 S_0, \overline{E_1D_2} = d_2 S_0, \dots \dots \dots (3)$$

のように表現し、 a_1, d_2, \dots を観測量と考える。そうす

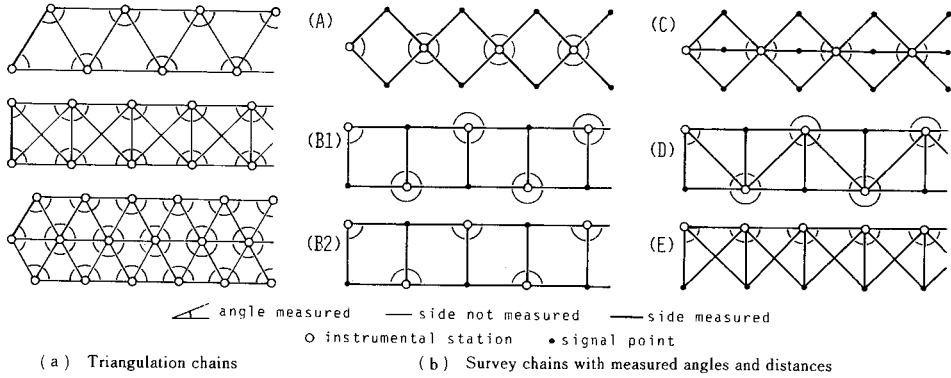


Fig. 1 Types of survey chains.

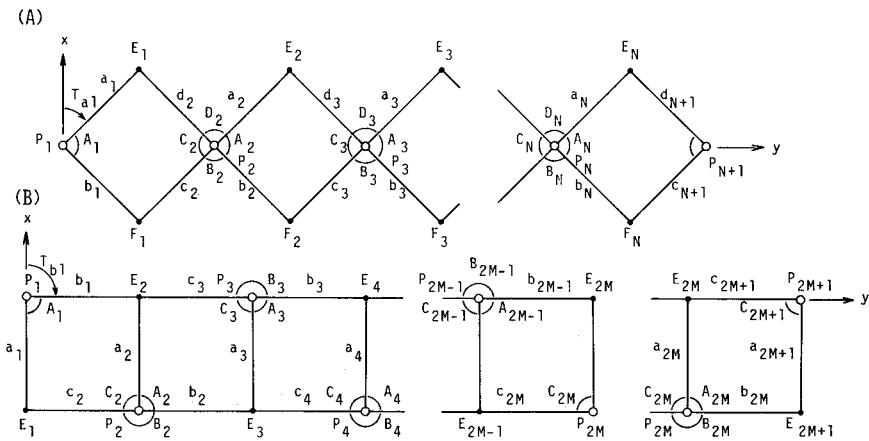


Fig. 2 Notations.

ると、

$$\sigma_{\hat{E}_1} = \sigma_{a1} \cdot S_0, \quad \sigma_{\hat{E}_2} = \sigma_{a2} \cdot S_0 \dots \dots \dots (4)$$

となり、式(2)の仮定を用いると、

$$\sigma_{a1} = \sigma_{a2} = \dots = \sigma_0 \dots \dots \dots (5)$$

となる。すなわち、無次元距離と角との観測値の誤差が等しいと考えてよい。換言すれば、これらの観測値の重みをすべて1とすればよい。

以下には、観測量、測点、座標系などは Fig. 2 に示した記号を用いることにする。

3. 四角形鎖の調整

(1) 基本式の総括

測量網中に固定した基準点を設けず、観測誤差の伝播状態や測点相互間の座標誤差を知ろうとする問題である。その場合には、座標調整法を用いる(自由測量網として取り扱うのがよい)よりも図形調整法を用いる方が好都合である。したがって、未知量を直接に観測し、それらの間に拘束条件が成立するときについて、最小二乗法によって調整計算を行う。

以後において最小二乗法を適用するときしばしば用いる記号および式を、行列表示によって示すと次のようである。

n : 観測未知量個数

r : 条件式数

l : 観測値

\hat{l} : 観測量の最確値

P : 観測値の重み行列

$Q = P^{-1}$: 観測値の cofactor 行列

σ_0^2 : 重み 1 の観測の分散

Q_{vv} : 残差の cofactor 行列

$Q_{\hat{n}}$: 観測量の最確値の cofactor 行列

Σ : 分散共分散行列(添字は cofactor と同じ)

$v = l - \hat{l}$: 残差

λ : 未定係数

$\phi = Av + w = 0$: 残差で表わした線形条件式

w : 定数(ただし、 l の関数)

$N = AQA^T$: 正規方程式の係数行列

$$\mathbb{F} = P^{-1}A^T = QA^T$$

これらの記号を用いると、最小二乗法の基本関係は

$$v^T Q v - 2\lambda^T \phi \rightarrow \min.$$

と書くことができる。正規方程式は

$$N\lambda + w = 0 \dots \dots \dots (a)$$

という形になり、残差および重み 1 の観測の分散は次式で求められる。

$$v = \mathbb{F}\lambda = -\mathbb{F}N^{-1}w \dots \dots \dots (b)$$

$$\sigma_0^2 = v^T Q v / r \dots \dots \dots (c)$$

cofactor の計算に便利な式は次のようである。

$$Q_{vv} = \mathbb{F}N^{-1}\mathbb{F}^T \dots \dots \dots (d)$$

$$Q_{\hat{n}} = Q - Q_{vv} \dots \dots \dots (e)$$

$$\sum_{i=1}^n p_{ii} Q_{ii} \hat{n}_i = n - r \dots \dots \dots (f)^{5)}$$

z を観測値の関数とし、 u がさらに z の線形関数

$$u = Fz \dots \dots \dots (g)$$

によって表わされるとするとき、 z の cofactor 行列 Q_{zz} が既知であれば、 u の cofactor 行列は、

$$Q_{uu} = FQ_{zz}F^T \dots \dots \dots (h)$$

という計算によって求めることができる。

分散共分散行列の計算は簡単である。たとえば、最確値の分散共分散行列は次式で求められる。

$$\Sigma_{\hat{n}} = Q_{\hat{n}} \cdot \sigma_0^2 \dots \dots \dots (i)$$

(2) 条件式

各観測鎖は四角形が構成要素となっていて、各四角形を成立させるとともにこれらが接続されるときに辺を共有させたり測点条件を満足させればよいと考える。

a) 四角形成立条件

いずれの測量鎖においても、1つの四角形要素を考えたとき、Fig. 3 のように視準標識点を結ぶ対角線長が等しいという条件が成立すべきであって、Fig. 3 の場合には次式で表わされる。

$$\Phi_1 \equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - 2\hat{a}\hat{b} \cos \hat{A} - \hat{c}^2 - \hat{d}^2 + 2\hat{c}\hat{d} \cos \hat{C} = 0$$

ここで、 Φ_1 を残差に関して線形化した式にすると、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &\equiv (a - b \cos A)v_a + (b - a \cos A)v_b \\ &\quad + ab \sin A \cdot v_A - (c - d \cos C)v_c \\ &\quad - (d - c \cos C)v_A - cd \sin C \cdot v_C \\ &\quad + w_1 = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

$$w_1 \equiv -(1/2) \cdot (a^2 + b^2 - 2ab \cos A - c^2 - d^2 + 2cd \cos C)$$

ここで、正方形要素の仮定を用いて、式(6)に

$$a = b = c = d = 1, \quad A = C = 90^\circ \dots \dots \dots (7)$$

を代入すると、次の簡単な条件式が得られる。

$$\Phi_1 \equiv v_a + v_b + v_A - v_c - v_d - v_C + w_1 = 0 \dots \dots \dots (8)$$

b) 測点条件

鎖の種類に応じて、器械設置点ごとに次のような測点条件が成立する。

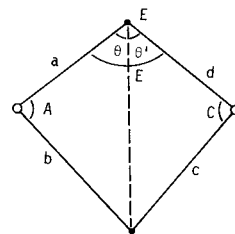


Fig. 3 Quadrangle unit and angle E.

鎖 A : $\Phi_2 \equiv v_a + v_b + v_c + v_d + w_2 = 0 \dots\dots\dots(9)$

鎖 B 1 : $\Phi_3 \equiv v_a + v_b + v_c + w_3 = 0 \dots\dots\dots(10)$

c) 条件式の総括

3種の鎖について条件式の左辺をまとめて示すと Table 1 のとおりである。係数の絶対値が揃っていて、条件式をお互いに結びつけている未知量の個数が少ないので、離れて配置されている未知量間の関連性は比較的少ないものと推定できる。換言すれば、ある条件式に含まれる未知量の観測誤差が、その条件式に含まれない離れた場所の量の調整値に及ぼす影響が小さいと考えてよい。このことは、次項で示す数値で明らかである。

(3) 調整結果

仮定によって、

$P^{-1} = Q = I$ (単位行列)

あるいは、これらの行列の対角要素は、

$1/p_{ii} = q_{ii} = 1$

である。したがって式 (f) より、 $\sum_{i=1}^n Q_{ii} = n - r$ という結果が得られる。 $\sum Q_{ii}$ の平均値は、観測量の最確値の cofactor の平均値を表わし、次式で求められる。

Q_{ii} の平均値 $= t_r(Q_{ii})/n = \frac{n-r}{n} \dots\dots\dots(11)$

各鎖について、四角形要素の接続数に応じて cofactor の平均値の変動状況を示したのが Table 2 である。要素

数が 1~2 個であれば観測個数に比べて条件式数が少ないので cofactor が大きく、要素数が増大するにつれて cofactor の減小する様子がわかる。要素数が 6 を越えると付加される四角形要素の cofactor がほぼ一定となること、鎖 B 1 においては条件式の結びつきが少し強いので収束の遅いことなども判明する。

以上の事実から、各鎖について 6 個の要素を接続した場合について最小二乗法の計算を実施した。その結果得られた最確値の cofactor 行列 Q_{ii} の一部を Table 3 に示す。端から 3 つ目の四角形要素の cofactor がほぼ収束していることが明らかであろう。

なお、条件式が存在によって、観測量の最確値の分散が当初の観測値の分散よりどれくらい小さくなるかは、式 (e) を用いて cofactor

$Q_{vv} = Q - Q_{ii} = I - Q_{ii} \dots\dots\dots(12)$

を計算すればわかる。表の値を用いてこの数値を算出すれば、最確値の分散の変動状況がわかりやすいことを付言しておく。

4. 誤差特性

Table 2 の値は、四角形が正方形である以上は観測量の個数と条件式数によって決まる値であり、Table 3 の値は観測量の cofactor のみしか示していない。そこで

Table 1 Coefficients of condition equations.

Chain A	Eq.	A_1	a_1	b_1	c_2	d_2	C_2	D_2	B_2	A_2	a_2	b_2	c_3	d_3	C_3	D_3	B_3	A_3	...	
	ϕ_1	1	1	1	-1	-1	-1													
	ϕ_2							1	1	1	1									
	ϕ_1											1	1	1	-1	-1	-1			
	ϕ_2																1	1	1	1
⋮																			
Chain B1	Eq.	a_1	A_1	b_1	c_2	a_2	C_2	B_2	A_2	b_2	c_3	a_3	C_3	B_3	A_3	b_3	c_4	a_4	...	
	ϕ_1	1	1	1	-1	-1	-1													
	ϕ_3							1	1	1										
	ϕ_1										1	1	-1	-1	-1					
	ϕ_3															1	1	1		
⋮																			
Chain B2	Eq.	a_1	A_1	b_1	c_2	a_2	C_2	A_2	b_2	c_3	a_3	C_3	A_3	b_4	c_4	a_4	C_4	A_4	...	
	ϕ_1	1	1	1	-1	-1	-1													
	ϕ_1							1	1	1	-1	-1	-1							
	ϕ_1													1	1	1	-1	-1	-1	
	⋮																			

Table 2 Mean values of the cofactors of most provable values.

(unit: $\times 10^{-3}$)

No. of elements		1	2	4	6	8	10	14	20	∞
Chain	A	833	786	767	761	758	756	755	753	750
	B1	833	750	708	694	688	683	679	675	667
	B2	833	818	810	806	805	804	803	802	800
	SRT*	667	←-----→							667

* single row triangles

Table 3 Part of cofactor matrices Q_n of most provable values.

		(unit: $\times 10^{-3}$)															
		A_1	a_1	d_2	C_2	D_2	A_2	a_2	d_3	C_3	D_3	A_3	a_3	d_4	C_4	D_4
Chain A	A_1	826															
	a_1	-174	826														
	d_2	174	174	826													
	C_2	129	129	-129	644												
	D_2	-46	-46	46	-228	747											
	A_2	-38	-38	38	-188	-226	639										
	a_2	8	8	-8	40	48	-135	817									
	d_3	-8	-8	8	-40	-48	135	183	817								
	C_3	-6	-6	6	-29	-35	100	135	-135	639							
	D_3	2	2	-2	10	12	-35	-48	48	-226	726						
	A_3	2	2	-2	9	10	-29	-39	39	-187	-226	639					
	a_3	-0	-0	0	-2	-2	6	8	-8	39	48	-135	817				
	d_4	0	0	-0	2	2	-6	-8	8	-39	-48	135	183	817			
	C_4	0	0	-0	1	2	-5	-6	6	-29	-35	100	135	-135	639		
	D_4	-0	-0	0	-0	-1	2	2	-2	10	12	-35	-48	48	-226	726	
															

		a_1	A_1	b_1	a_2	C_2	B_2	A_2	c_3	a_3	C_3	B_3	A_3	b_3	a_4	C_4	B_4
Chain B1	a_1	821																
	A_1	-179	821															
	b_1	-179	-179	821														
	a_2	156	156	156	673													
	C_2	127	127	127	-47	555												
	B_2	-52	-52	-52	109	-318	630											
	A_2	-75	-75	-75	-62	-238	-313	551										
	c_3	23	23	23	171	-80	-57	137	807									
	a_3	20	20	20	149	-70	-50	119	-169	662								
	C_3	16	16	16	121	-56	-40	97	-137	-56	548							
	B_3	-7	-7	-7	-50	23	17	-40	56	113	-315	629						
	A_3	-10	-10	-10	-71	33	24	-57	81	-56	-234	-315	548					
	b_3	-3	-3	-3	-22	10	7	-17	25	-169	81	56	-137	806				
	a_4	3	3	3	19	-9	-6	15	-21	147	-71	-49	120	169	662			
	C_4	2	2	2	15	-7	-5	12	-17	120	-57	-40	97	137	-56	548		
	B_4	-1	-1	-1	-6	3	2	-5	7	-49	24	16	-40	-56	113	-315	629	
...																	

		a_1	A_1	b_1	a_2	C_2	A_2	c_3	a_3	C_3	A_3	b_3	a_4	C_4
Chain B2	a_1	828													
	A_1	-172	828												
	b_1	-172	-172	828											
	a_2	142	142	142	711										
	C_2	172	172	172	-142	828									
	A_2	-29	-29	-29	-147	29	823								
	C_3	29	29	29	147	-29	177	823							
	a_3	24	24	24	122	-24	146	-146	707						
	C_3	29	29	29	147	-29	177	-177	-146	823					
	A_3	-5	-5	-5	-25	5	-30	30	-146	30	823				
	b_3	-5	-5	-5	-25	5	-30	30	-146	30	-177	823			
	a_4	4	4	4	21	-4	25	-25	121	-25	146	146	707		
	C_4	5	5	5	25	-5	30	-30	146	-30	177	177	-146	823	
													

非観測量の誤差，測点位置の誤差，測量網の変形の特徴などについて，cofactorの数值によって考察を加えることにする。この場合に，三角測量網の代表例として単列三角形鎖を取り上げ，これと比較することによって本文で提案した四角形鎖の特徴を明らかにする。

(1) 辺長誤差

まず単列三角形鎖を考えてみよう。Fig.1(a)のよう

に端辺のみで距離を測り，あとは角のみを観測するから，辺長を計算するときには角誤差が伝播して辺長誤差が増大する。1辺の長さが S_0 の正三角形要素のときには， K 番目の三角の辺長の cofactor は，周知のように，

$$Q_{KK} = 0.667 K S_0^2 \dots \dots \dots (13)$$

となる。すなわち要素数に比例して増大する。

これに対して，角と辺とを観測した測量網においては，

すべての要素で辺長を測っているから、要素数に応じて辺長の cofactor が増大することはない。無次元表示の辺長の cofactor は Table 3 に示されているように、要素数にかかわらずほぼ一定であって、

$$Q = (0.81 \sim 0.83) S_0^2 \dots\dots\dots (14)$$

程度にすぎないことがわかる。

(2) 測点座標誤差の計算方針

a) 鎖Aの場合

Fig. 2 に示すような座標系を採用し、方向角を T で表わし、測点 P_i を基準として他の測点の座標誤差を求めることを考える。ただし、測線 a_i の方向は正しく観測されていて、その方向角 T_{ai} には誤差がないものとする。

器械設置点 P_{N+1} の座標は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_{N+1}}{S_0} &= \sum_{i=1}^N (a_i \cos T_{ai} + d_{i+1} \cos T_{d_{i+1}}) \\ \frac{y_{N+1}}{S_0} &= \sum_{i=1}^N (a_i \sin T_{ai} + d_{i+1} \sin T_{d_{i+1}}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)^{注1)}$$

上式の右辺を、変数の近似値のまわりにテイラー展開し、微小量 $\delta a_i, \delta T_{ai}, \dots$ に関する線形の式とし、それらの係数に対して、

$$a_i = d_i = 1, T_{ai} = 45^\circ, T_{d_{i+1}} = 135^\circ$$

を代入すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_{N+1}}{S_0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^N (-\delta T_{ai} + \delta a_i - \delta T_{d_{i+1}} - \delta d_{i+1}) + \text{定数} \\ \frac{y_{N+1}}{S_0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^N (\delta T_{ai} + \delta a_i - \delta T_{d_{i+1}} + \delta d_{i+1}) + \text{定数} \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

式 (16) において、 $\delta a_i, \delta T_{ai}, \dots$ はそれぞれ a_i, T_{ai}, \dots と同じ誤差を含むと考えればよいから、これらの式を式 (8) の形にまとめて

$$x = F_1 t \dots\dots\dots (17)$$

と書くことにすると、変数 $t^T = (a_i, T_{ai}, \dots)$ に関する cofactor 行列 Q_{tt} がわかっているとき、 x の cofactor は、式 (h) より次式で計算できる。

$$Q_{xx} = F_1 Q_{tt} F_1^T \dots\dots\dots (18)$$

変数 t の間には相関があつて、 Q_{tt} は次のようにして計算できる。 T_{ai} には誤差がないと仮定しているから、

$$\left. \begin{aligned} T_{ai} &= -\sum_{i=1}^i E_{i-1} + \sum_{i=1}^i D_i + \text{定数}, a_i = \hat{a}_i \\ T_{d_{i+1}} &= -\sum_{i=1}^i E_i + \sum_{i=1}^i D_i + \text{定数}, d_{i+1} = \hat{d}_{i+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots (19)$$

というように t を表現できる。したがって前と同様に、式 (19) を

$$t = F_2 e \dots\dots\dots (20)$$

と書けば、 Q_{tt} は次式の形になる。

$$Q_{tt} = F_2 Q_{ee} F_2^T \dots\dots\dots (21)$$

変数 e の成分中で E を除いたものは全部観測量の最確値であり、 E は次項 4. (3) に示すように計算できる。したがって、 e は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} E_i &= (1/2)(-\delta \hat{A}_i - \delta \hat{a}_i + \delta \hat{b}_i + \delta \hat{c}_{i+1} \\ &\quad - \delta \hat{d}_{i+1} - \delta \hat{c}_{i+1}) + \text{定数} \\ D_i &= \hat{D}_i, a_i = \hat{a}_i, d_i = \hat{d}_i \end{aligned} \right\} \dots\dots (22)$$

式 (22) を

$$e = F_3 \hat{l} \dots\dots\dots (23)$$

という形にまとめて表示すると、 Q_{ee} は次のように、観測量の最確値の cofactor 行列から計算できる。

$$Q_{ee} = F_3 Q_{\hat{l}\hat{l}} F_3^T \dots\dots\dots (24)$$

上記の数値計算は、すでに得られている $Q_{\hat{l}\hat{l}}$ を用いて、式 (24) から逆の順序に従って行うことになる。この計算のための F の一部を表示すれば Table 4 のとおりである。

Table 4 Examples of matrices F .

Variable	A_1	a_1	b_1	c_2	d_2	C_2	D_2	B_2	A_2	a_2	b_2	c_3	d_3	C_3, \dots		
F_3 [Eq. (22)]	a_1		1													
	E_1	-1/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2									
	d_2					1										
	D_2						1									
	a_2								1							
	E_2								-1/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2		
\dots																
Variable	a_1	E_1	d_2	D_2	a_2	E_2, \dots	Variable	a_1	T_{d2}	d_2	T_{a2}	a_2	T_{d3}	d_3, \dots		
F_2 [Eq. (19)]	a_1	1					F_1 [Eq. (16)]	$\sqrt{2}x_2/S_0$	1	-1	-1					
	T_{d2}		-1					$\sqrt{2}x_3/S_0$	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	
	d_2			1				\dots							\dots	
	T_{a2}				1			$\sqrt{2}y_2/S_0$	1	-1	1					
	a_2					1			$\sqrt{2}y_3/S_0$	1	-1	1	1	1	-1	1
	T_{d3}							-1	\dots							\dots
\dots						\dots								\dots		

注1) 右辺の a および T などの変数は最確値を用いるのであるが、関数を観測量の最確値のみで表現する形で示さないときには、最確値の記号を省略する。

b) 鎖 B の場合

この場合には、測線 a_i の方向は正しいものと仮定し、測点 P_i を基準にして Fig. 2 の上辺にある測点の座標誤差を求めることにする。そうすると偶数番号点は視準標識点、奇数番号点は器械設置点であって、それらの座標は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_{2M}}{S_0} &= \sum_{i=0}^{M-1} b_{2i+1} \cos T_{b_{2i+1}} + \sum_{i=1}^{M-1} c_{2i+1} \cos T_{c_{2i+1}} \\ \frac{x_{2M+1}}{S_0} &= \sum_{i=0}^{M-1} b_{2i+1} \cos T_{b_{2i+1}} + \sum_{i=1}^M c_{2i+1} \cos T_{c_{2i+1}} \\ \frac{y_{2M}}{S_0} &= \sum_{i=0}^{M-1} b_{2i+1} \sin T_{b_{2i+1}} + \sum_{i=1}^{M-1} c_{2i+1} \sin T_{c_{2i+1}} \\ \frac{y_{2M+1}}{S_0} &= \sum_{i=0}^{M-1} b_{2i+1} \sin T_{b_{2i+1}} + \sum_{i=1}^M c_{2i+1} \sin T_{c_{2i+1}} \end{aligned} \right\} \dots\dots(25)$$

計算方法は前と同様でよいから、行列表示の式を先に、その内容を後に書くという方法で、cofactor の算出に必要な式を以下に列記する。

式 (25) を線形化し、

$$b_i = c_i = 1, T_{b_i} = T_{c_i} = 90^\circ$$

を代入すると、次のように x と y とが独立に計算できる。

$$x = G_1 t, y = H_1 t \dots\dots(26)$$

$$Q_{xx} = G_1 Q_{11} G_1^T, Q_{yy} = H_1 Q_{11} H_1^T = H_1 Q_{11} H_1^T \dots\dots(27)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_{2M}}{S_0} &= -\sum_{i=0}^{M-1} \delta T_{b_{2i+1}} - \sum_{i=1}^{M-1} \delta T_{c_{2i+1}} + \text{定数} \\ \frac{x_{2M+1}}{S_0} &= -\sum_{i=0}^{M-1} \delta T_{b_{2i+1}} - \sum_{i=1}^M \delta T_{c_{2i+1}} + \text{定数} \\ \frac{y_{2M}}{S_0} &= \sum_{i=0}^{M-1} \delta \hat{b}_{2i+1} + \sum_{i=1}^{M-1} \delta \hat{c}_{2i+1} + \text{定数} \\ \frac{y_{2M+1}}{S_0} &= \sum_{i=0}^{M-1} \delta \hat{b}_{2i+1} + \sum_{i=1}^M \delta \hat{c}_{2i+1} + \text{定数} \end{aligned} \right\} \dots\dots(28)$$

ここで、式 (28) よりわかるように、 y は観測量の最確値によって直接に表現されているから、 Q_{yy} の計算に必要な Q_{11} は Q_{11} に等しくなる。一方、 Q_{xx} の計算に必要な Q_{11} を得るためには方向角 T を算出しなければならない。それには、Fig. 4 に示すように視準標識点における非測定角 F を用いると、次式で計算できる。

$$t = G_2 e \dots\dots(29)$$

$$Q_{11} = G_2 Q_{ee} G_2^T \dots\dots(30)$$

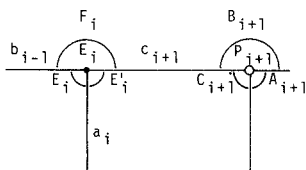


Fig. 4 Notation of angle F .

$$\left. \begin{aligned} T_{b_{2M+1}} &= -A_i + \sum_{i=1}^M F_{2i} + \sum_{i=1}^M B_{2i+1} + \text{定数} \\ T_{c_{2M+1}} &= -A_i + \sum_{i=1}^M F_{2i} + \sum_{i=1}^{M-1} B_{2i+1} + \text{定数} \end{aligned} \right\} \dots\dots(31)$$

式 (31) における F_i は、Fig. 4 と次項 4. (3) を参照して算出することができ、 Q_{ee} の計算は次式によればよいことになる。

$$e = G_3 \hat{l} \dots\dots(32)$$

$$Q_{ee} = G_3 Q_{\hat{l}} G_3^T \dots\dots(33)$$

$$A_i = \hat{A}_i$$

$$F_i = 360^\circ - E_i - E_i' \\ = (1/2)(-\delta \hat{a}_{i-1} + \delta \hat{A}_{i-1} + \delta \hat{b}_{i-1} - \delta \hat{c}_i + 2\delta \hat{a}_i \\ + \delta \hat{C}_i + \delta \hat{A}_i - \delta \hat{b}_i + \delta \hat{c}_{i+1} - \delta \hat{a}_{i+1} + \delta \hat{C}_{i+1}) + \text{定数}$$

$$B_i = \hat{B}_i \text{ (鎖 B 1 の場合)}$$

$$B_i = -\hat{C}_i - \hat{A}_i + \text{定数 (鎖 B 2 の場合)}$$

$$\dots\dots(34)$$

以上の計算に用いる G の内容の詳細は省略する。

(3) 非測定角 E の算出

鎖 A を例にとって Fig. 3 の記号を用いると、角 θ の値は

$$\sin \theta = \hat{b} \sin \hat{A} (\hat{a}^2 + \hat{b}^2 - 2\hat{a}\hat{b} \cos \hat{A})^{-1/2}$$

として計算できる。この式の右辺を最確値のまわりにテイラー展開すると次式が得られる。

$$\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \hat{A}} \delta \hat{A} + \frac{\partial \theta}{\partial \hat{a}} \delta \hat{a} + \frac{\partial \theta}{\partial \hat{b}} \delta \hat{b} + \text{定数} \dots\dots(35)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{A}} &= (\hat{a} - \hat{b} \cos \hat{A})^{-1} (\hat{b} \cos \hat{A} - \hat{a} \hat{b}^2 \sin^2 \hat{A} \cdot L^{-2}) \\ \frac{\partial \theta}{\partial \hat{a}} &= -\hat{b} \sin \hat{A} \cdot L^{-2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \hat{b}} &= (\hat{a} - \hat{b} \cos \hat{A})^{-1} \sin \hat{A} [1 - \hat{b}(\hat{b} - \hat{a} \cos \hat{A}) L^{-2}] \\ L^2 &= \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - 2\hat{a}\hat{b} \cos \hat{A} \end{aligned} \right\} \dots\dots(36)$$

求める角は

$$E = \theta + \theta' \\ = \frac{\partial \theta}{\partial \hat{A}} \delta \hat{A} + \frac{\partial \theta}{\partial \hat{a}} \delta \hat{a} + \frac{\partial \theta}{\partial \hat{b}} \delta \hat{b} + \frac{\partial \theta'}{\partial \hat{c}} \delta \hat{c} + \frac{\partial \theta'}{\partial \hat{d}} \delta \hat{d} \\ + \frac{\partial \theta'}{\partial \hat{C}} \delta \hat{C} + \text{定数} \dots\dots(37)$$

であって、1 辺の長さが S_0 の正方形の仮定より、

$$\frac{\partial \theta}{\partial \hat{A}} = \frac{\partial \theta'}{\partial \hat{C}} = -\frac{1}{2}, \frac{\partial \theta}{\partial \hat{a}} = \frac{\partial \theta'}{\partial \hat{d}} = -\frac{1}{2}, \frac{\partial \theta}{\partial \hat{b}} = \frac{\partial \theta'}{\partial \hat{c}} = \frac{1}{2}$$

となるから、式 (37) は次のようになる。

$$E = (1/2)(-\delta \hat{A} - \delta \hat{a} + \delta \hat{b} + \delta \hat{c} - \delta \hat{d} - \delta \hat{C}) + \text{定数} \dots\dots(38)$$

ここに、 $\delta \hat{A}, \delta \hat{a}, \dots\dots$ と書いたのは、最確値と同じ誤

Table 5 Part of cofactor matrices Q_{ee} .

(unit: $\times 10^{-3}$)

		a_1	E_1	d_2	D_2	a_2	E_2	d_3	D_3	a_3	E_3	d_4	D_4	a_4	E_4
Chain A	a_1	826														
	E_1	-477	1432													
	d_2	172	-523	826												
	D_2	-46	137	46	727											
	a_2	8	-24	-8	48	817					symm.					
	E_2	22	-65	-22	130	-500	1369									
	d_3	-8	24	8	-48	183	-500	817								
	D_3	2	-6	-2	12	-48	131	48	726							
	a_3	-0	1	0	-2	8	-23	-8	48	817						
	E_3	-1	3	1	-6	23	-62	-23	131	-500	1369					
	d_4	0	-1	-0	2	-8	23	8	-48	183	-500	817				
	D_4	-0	0	0	-1	2	-6	-2	12	-48	131	48	726			
	a_4	0	-0	-0	0	-0	1	0	-2	8	-23	-8	48	817		
	E_4	0	-0	-0	0	-1	3	1	-6	23	-62	-23	131	-500	1369	
														

		A_1	F_2	B_3	F_4	B_5	F_6
Chain B1	A_1	821					
	F_2	524	2984				
	B_3	-7	-222	629			symm.
	F_4	-14	101	-221	2810		
	B_5	-0	4	2	-221	629	
	F_6	-0	10	5	101	-222	2984

		A_1	F_2	B_3	F_4	B_5	F_6
Chain B2	A_1	828					
	F_2	574	3396				
	B_3	-24	-634	1707			symm.
	F_4	-13	188	-636	3364		
	B_5	-1	11	21	-636	1707	
	F_6	-0	6	11	188	-634	3396

Table 6 Cofactors of direction angles of sides.

	Chain A						Chain B1						Chain B2					
Side	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	b_1	c_3	b_3	c_5	b_5	c_7	b_1	c_3	b_3	c_5	b_5	c_7
Q_{TT}	1.43	2.86	4.37	5.87	7.37	8.91	0.82	2.76	2.95	5.55	5.75	8.52	0.83	3.08	3.56	6.06	6.56	9.10

差を含む量と考えればよいという意味である。

(4) Cofactor の計算結果

a) 測線方向角の cofactor

Table 5 は、非観測角 E, F, B (鎖 B 2 のとき) などを含む cofactor であって、これらの cofactor は当然観測角のものより大きい。角の間の相関はかなり大きい。表に示した配置では、隣りの 2 つの角までのみの相関を考えれば近似的な計算の可能なことがわかる。式 (21) および (30) を用いて正しく Q_{ii} を計算し、その中の対角要素のみを記したものが Table 6 である。これを上記の考え方で求めた近似値と比較してみよう。

鎖 A を例にとると、測線方向角の cofactor 行列の対角要素の中で、式 (19) の第 3 式で示されるものは次式で計算できる。

$$Q_{Ti+1, Ti+1} = \sum_{i=1}^i \sum_{j=1}^i Q_{Ei, Ej} + \sum_{i=2}^i \sum_{j=2}^i Q_{Di, Dj} - 2 \sum_{i=1}^i \sum_{j=2}^i Q_{Ei, Dj} \dots (39)$$

この式において、2 つ離れた角までの cofactor しか計算に考慮しないとすると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta Q_{T_{i+1}, T_{i+1}} &= Q_{T_{i+1}, T_{i+1}} - Q_{T_{i+1}, T_{i+1}} \\ &\doteq (2Q_{E_{i-1}, E_i} + Q_{E_i, E_i}) + (2Q_{D_{i-1}, D_i} + Q_{D_i, D_i}) \\ &\quad - 2(Q_{E_{i-1}, D_i} + Q_{E_i, D_i}) \dots (40) \end{aligned}$$

式 (40) に Table 5 の値を代入すると次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta Q_{T_{d_2}, T_{d_2}} &= 1.432, \quad \Delta Q_{T_{d_3}, T_{d_3}} = 1.469 \\ \Delta Q_{T_{d_4}, T_{d_4}} &= 1.471, \dots \end{aligned}$$

これらの値は Table 6 から得られる値と当然ほぼ一致していて、 n 要素接続した四角形鎖の測線 T_{N+1} の方向角 cofactor は近似的に次式で得られることがわかる。

$$Q_{T_{N+1}, T_{N+1}} \doteq 1.5 N \dots (41)$$

鎖 B についても同様な近似計算が可能であるが、Table 6 によれば $2M$ 要素の鎖の測線 C_{2M+1} の方向角の cofactor は近似的に次式で求められることがわかる。

$$\text{鎖 B 1 : } Q_{T_{C_{2M+1}}, T_{C_{2M+1}}} \doteq 1.4 \times 2M \dots (42)$$

$$\text{鎖 B 2 : } Q_{T_{C_{2M+1}}, T_{C_{2M+1}}} \doteq 1.5 \times 2M \dots (43)$$

辺長 S_0 の正方形よりなる単列三角形鎖の場合には Fig. 5 のような記号をつけ、測線 P_0, P_1 の方向角に誤

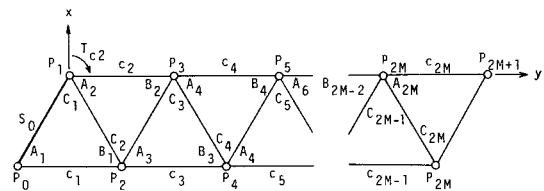


Fig. 5 Notation of single row triangles.

Table 7 Cofactors of coordinates of stations.

Station	Chain A						Chain B1						Chain B2					
	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	E ₂	P ₃	E ₄	P ₅	E ₆	P ₇	E ₂	P ₃	E ₄	P ₅	E ₆	P ₇
Q _{xx}	1.4	8.7	27.7	64.6	125.3	215.9	0.8	4.2	12.8	30.0	58.1	100.5	0.8	4.4	13.5	31.7	61.5	106.4
Q _{yy}	0.7	1.3	2.0	2.6	3.2	3.7	0.8	1.7	2.5	3.4	4.2	5.1	0.8	1.7	2.6	3.5	4.4	5.2

差がないと仮定すると、第 2M 番目の三角の上辺の方向角は、次の 2 式のいずれかで計算できる。

$$T_{C_{2M}} = -\hat{C}_1 + \hat{C}_2 - \hat{C}_3 + \dots - \hat{C}_{2M-1} - \hat{A}_{2M} + \text{定数} \dots (44)$$

$$T_{C_{2M}} = -\hat{C}_1 - \hat{A}_2 - \hat{B}_2 - \hat{C}_3 - \hat{A}_4 - \dots - \hat{B}_{2M-2} - \hat{C}_{2M-1} - \hat{A}_{2M} + \text{定数} \dots (45)$$

式 (44) の右辺の角は互いに独立であって、各角の cofactor は周知のように 0.667 であるから、測線 C_{2M} の方向角の cofactor は、

$$Q_{T_{C_{2M}}, T_{C_{2M}}} = 0.667 \times 2M \dots (46)$$

単列三角形鎖は要素 1 つ接続されるごとに測点数が 1 つ増し、本文の四角形鎖では要素 1 つ接続されるごとに測点数が 2~3 増すから、2M 要素接続の三角形鎖が N 要素接続の四角形鎖に相当すると考える。そうすると、四角形鎖に換算すると次のように書ける。

$$Q_{T_{C_{2M}}, T_{C_{2M}}} \doteq 1.33 N \text{ (四角形鎖換算)} \dots (47)$$

以上によって、測線方向角誤差の小さいものから順に記すと、単列三角形鎖、B1, A, B2 ということになる。

b) 測点座標の cofactor

四角形鎖における測点座標の cofactor は Table 7 のとおりであり、方向角誤差の影響が強くて、x 座標の cofactor が大きい。換言すれば、棒を曲げたような形になりやすいことを示している。

これらに対して単列三角形鎖の場合を計算してみよう。角の最確値の cofactor は、

$$\left. \begin{aligned} Q_{A_i, A_i} = Q_{B_i, B_i} = Q_{C_i, C_i} = 2/3 \\ Q_{A_i, B_i} = Q_{B_i, C_i} = Q_{C_i, A_i} = -1/3 \\ Q_{A_i, A_j} = \dots = Q_{A_i, B_j} = \dots = 0, (i \neq j) \end{aligned} \right\} \dots (48)$$

であるから、式 (45) を使用して方向角の cofactor Q_{T_i} を算出すれば Table 8 が得られる。対角要素は式 (46) から求められる値と一致している。

辺長 C_{2M} は次式で計算できる。

Table 8 Cofactor matrix Q_{TT} of single row triangles.

	T _{c2}	T _{c4}	T _{c6}	T _{c8}	T _{c10}	T _{c12}
T _{c2}	4/3					
T _{c4}	3/3	8/3				
T _{c6}	3/3	7/3	12/3			
T _{c8}	3/3	7/3	11/3	16/3		
T _{c10}	3/3	7/3	11/3	15/3	20/3	
T _{c12}	3/3	7/3	11/3	15/3	19/3	24/3

$$C_{2M} = S_0 \left(\prod_{i=1}^{2M-1} \frac{\sin \hat{A}_i}{\sin \hat{B}_i} \right) \frac{\sin \hat{C}_{2M}}{\sin \hat{B}_{2M}}$$

この式を線形にすれば次式となる。

$$C_{2M} = C_{2M} \left[\sum_{i=1}^{2M-1} (\cot \hat{A}_i \delta \hat{A}_i - \cot \hat{B}_i \delta \hat{B}_i) + (\cot \hat{C}_{2M} \delta \hat{C}_{2M} - \cot \hat{B}_{2M} \delta \hat{B}_{2M}) \right] + \text{定数} \dots (49)$$

各要素を正三角形と仮定すると、

$$\cot \hat{A}_i = \cot \hat{B}_i = \cot \hat{C}_i = 1/\sqrt{3}$$

であるから式 (49) は次のようになる。

$$C_{2M} = \frac{1}{\sqrt{3}} C_{2M} \left[\sum_{i=1}^{2M-1} (\delta \hat{A}_i - \delta \hat{B}_i) + (\delta \hat{C}_{2M} - \delta \hat{B}_{2M}) \right] + \text{定数} \dots (50)$$

この式を用いて辺長 c₂, c₄, … の cofactor を計算すると、Table 8 と同じ値が得られる。

測点 P_{2M+1} の座標は、式 (28) と似た形

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_{2M+1}}{S_0} = -\sum_{i=1}^M \delta T_{C_{2i}} + \text{定数} \\ \frac{y_{2M+1}}{S_0} = \sum_{i=1}^M \delta C_{2i} + \text{定数} \end{aligned} \right\} \dots (51)$$

によって計算できる。したがって式 (27) によって座標の cofactor 行列を求め、その対角要素を示せば Table 9 のようである。この鎖においては x 座標と y 座標に同じ大きさの誤差が発生するという特徴がある。

Table 9 Cofactors of coordinates of stations in single row triangles.

Station	P ₃	P ₅	P ₇	P ₉	P ₁₁	P ₁₃
Q _{xx} =Q _{yy}	1.3	6.0	16.7	36.0	66.7	111.3

Table 7 および Table 9 を通覧すれば、測点座標の誤差に関して次のような特徴が明らかとなる。本文で提案した四角形鎖は y 座標誤差が非常に小さい。x 座標誤差は鎖 A が大きく、他の鎖においては単列三角鎖とほぼ同じ値である。以上のことから、角観測の精度を上げるか、角または測線方向角に関する拘束条件を付加すれば、四角形鎖においては x 座標の誤差が小さくなり、単列三角形鎖においては x, y 両座標の誤差軽減に役立つことがわかる。

5. 作業効率

測線の短い測量網においては、器械設置作業が測量手

間のかなりの部分を占めている。そこで、器械設置点1点当たりについていくつの測点の相対的位置を決められるかという数値が作業効率を示す1つの指標と考え、これを示したものが Table 10 である。この数値は、単列三角形鎖に対して鎖 A が3倍、鎖 B が2倍となっている。

Table 10 Number of total stations per instrumental station.

No. of elements		1	2	4	6	8	10	14	20	...	∞	
Chain	A	2.0	2.3	2.6	2.7	2.8	2.8	2.9	2.9	...	3.0	
	B	2.0	←-----→							2.0	...	2.0
	SRT	1.0	←-----→							1.0	...	1.0

Table 11 Example of characteristics of different survey chains.

Chain	No. of elements	No. of total stn.	No. of inst. stn.	No. of total obs.	No. of obs. angles	No. of obs. sides	No. of observations per inst. stn.	No. of condition eq.
A	6	19	7	46	22	24	6.6	11
B1	6	14	7	36	17	19	5.1	11
B2	6	14	7	31	12	19	4.4	6
SRT	12	14	14	36+(1)	36	(1)	2.6	12

作業効率は上記以外に観測の種類と個数に関係があり、誤差は観測個数と条件式数（余剰観測個数）に関係するので、要素数6個の四角形鎖を例にとってこれらの数値を示すと Table 11 のようになる。最も効率がよいと考えられる鎖 A では1器械設置点当たり6.6個の観測を行うことになるが、観測個数のわりには条件式数が少ないので、既述のとおり cofactor（したがって誤差）は大きい。これに対して、鎖 B 2 では観測数が比較的少ないにもかかわらず、Table 7 に示すように座標誤差があまり大きくないことは注目すべき事項である。

6. 結 言

角と距離とを測る四角形鎖を取り上げ、観測値の誤差、観測量の最確値の誤差、最確値より誘導される量の誤差を明確に区別して、それらを cofactor の値によって単列三角形鎖と比較し、さらに作業効率についても考察を加えることによって、提案した測量鎖が有用なものであることを示した。

提案した測量鎖の測点座標誤差が三角測量鎖の誤差と比べて大きく異なる点は、鎖の長手方向ではきわめて小さいが、鎖の湾曲のためにそれと直角方向では三角測量鎖と同程度かそれ以上の値となることである。四角形鎖においては要素間の最確値に相関があるため、最確値の誤差のみでは単純に測点座標誤差を推定できず、案外に鎖 A の誤差が大きく、鎖 B 2 の誤差が小さいという結果が得られた。

測量鎖全体にわたる誤差を小さくするには観測誤差 σ_0 を小さくすることが第一義的であって、本文の資料を用いれば、許容座標誤差が指定されたときに測量作業に際して目標とすべき σ_0 が推定できるので、器械や観測方法の選定に役立つ。角と距離を測る測量鎖においては、角観測の重みを大きくするのがよいだろうし、測線方向角を拘束する条件の導入が有効であって、辺長を拘束する条件の効果は小さい（単列三角鎖においては辺長

条件は有効である）。ただし、平面的な広がりをもった測量網に対しては必ずしも同じことがいえず、辺長条件や2点間距離の条件も有効なはずである。要素が正方形でないとき、角と距離の観測の重みの異なるとき、Fig. 1(C)~(E) の測量鎖などの例については、別に考察するつもりである。

測量作業の手間は、地表条件、測点間隔、許容誤差、測量網形状などによって大きく変わる。測量作業の合理化を図るには、作業内容を分析し、作業内容ごとにどのような条件のときにどれだけの人数・時間を要するか、使用器材によってこれらがどのように変化するかなどの資料が必要である。このような資料がほとんどみられないのが残念であるが、実務に携わっていただける方はおおよその見当はつくものと思う。そうすれば、ここでは効率に関係のあるいくつかの数値を比較したに過ぎないが、その方にはある程度有効に利用していただけるものと思っている。

本研究は文部省科学研究費を使用した。また数値計算には岡山大学の計算機を使用し、当学科の服部 進助手をわずらわせたので、ここに謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Ruopp, M. : Genauigkeitsbetrachtungen zur polaren Punktbestimmung mit elektronischen Tachymeter bei freier Standpunktswahl, AVN, 71 Jg., pp.289~299, 1971.
- 2) Young, G. M. : A Mixed Observational Survey Method, Bull. Géodésique, No.114, pp.349~363, 1974.
- 3) Pelikán, M. : Untersuchung von Absteckungsnetzen, Vermessungstechnik, 27 Jg., S.228~230, 1979.
- 4) Kraus, K. : Rationalisierung der tachymetrischen Geländeaufnahme und Automatisierung der Weiterverarbeitung zur großmaßstäbigen Karte, AVN, 80 Jg., S.2~15, 1973.
- 5) 森 忠次：測量学（2）応用編, p.350, 1981.

(1984.10.25・受付)