【土木学会論文集　第357号／Ⅱ-3（討議・回答） 1985年5月】

Norio HAYAKAWA
Yusuke FUKUSHIMA
Kenji SANJO

"DIFFUSION AND DISPERSION IN NARROW OPEN CHANNEL FLOW" への討議

（土木学会論文報告集，第342号・1984年2月掲載）

▶討議者（*Discussion*）――村上　和男（運輸省港湾技術研究所）
By Kazuo MURAKAMI

移流分散係数を導いた論文として，円管に対しては Taylor[1)]のものが，また開水路に対しては Elder[2)] のものが最も有名であり，その分散係数は次式のように与えられている．

$D_1=10.1\,u_*a$（円管に対して[1)]）……………………(1)

$D_2=5.86\,u_*h$（開水路に対して[2)]）………………(2)

ここに，a は円管の半径，h は開水路の水深，u_* は摩擦速度である．著者らは，狭水路における水路幅と水深の比が，この移流分散係数に与える影響を，矩形断面水路を楕円座標系に置き換えて解析的に調べ，Fig. 2 に示す結果を得ている．

筆者は，この移流分散として歴史的な2つの論文の成果を楕円座標系を用いて結び付け，かつ水路幅の影響を解析的に求めるものとして，非常に興味深く読ませていただきました．しかし，1つの点で納得がゆかない点がございますので，以下の討議で質問させていただきます．

筆者の疑問は，Fig. 2 の結果，すなわち移流分散係数が何故に $B/H=2$ のときに発散するかという点であります．著者らの説明によれば，Eq. (10) で定義された移流分散係数は，$B/H=2$ のときは，本来は Taylor の結果に近づくべきであるが，採用した流速分布の不適切さのために発散してしまうとある．そして，Fig. 2 をみる限りにおいては，$B/H\to 2$ となるに従って D/u_*h は無限大に漸近しているかのような印象が与えられる．ここに，筆者は，次の2つの疑問が生じた．その疑問とは，

（1）本解析において，楕円座標系を用いるのは正しい選択であるのかどうか，

（2）Eq. (10) において，$B/H=2$ のときに移流分散係数は発散するのかどうか，

という点である．

まず，（1）の疑問に関して検討する．楕円座標系は，

$x=C\cosh\xi\cos\eta$ ………………………………(3)

$y=C\sinh\xi\sin\eta$ ………………………………(4)

で定義されるもので，

$$\frac{x^2}{C^2\cosh^2\xi}+\frac{y^2}{C^2\sinh^2\xi}=1 \quad\cdots\cdots(5)$$

で与えられる．式（5）の楕円方程式において，長軸の長さが $C\cosh\xi$ であり，短軸の長さが $C\sinh\xi$ である．楕円座標系は，$B/H=2$ で ξ_0 が無限大になるために一般的には定義されていない．しかし，この場合には C が限りなく小さくなるので，$C\cosh\xi_0$ は有限値として存在し得る．したがって，楕円座標系の極限として円筒座標系が存在し，本解析においても $B/H=2$ の場合には円筒座標系の値に近づける必要があるものと思われる．著者らが指摘するように，$B/H=2$ において移流分散係数が発散し，その原因が楕円座標系にあるとすると，水路幅（B）と水深（H）との比による移流分散係数の変化が，B/H 比によるものか，あるいは座標系の不備によるものなのかという疑問が生じてくる．特に $B/H=2$ の近傍（原論文の主題は $B/H=0.5\sim4$ の範囲）での値が信用できなくなるものと危惧される．

しかし，ここで用いられている解析法は，Taylor および Elder の方法と全く同じであるのに，どうして発散するのかという疑問が生じる．ここで，（2）の疑問についての検討を行う．著者らの方法も，Taylor, Elder の方法と同様に流速分布式として対数分布則を用いている．したがって，壁のごく近傍での流速値は発散する傾向にある．しかし，この領域は粘性底層内であるから直線近似による流速分布式を用いることができる．したがって，流速分布の断面平均流速値からの偏差は

$$u'=\frac{u_*}{\kappa}\left\{\ln\left(1-\frac{\xi}{\xi_0}\right)-u''\right\}\leq M \quad\cdots\cdots(6)$$

となり，ある有限値 M の大きさの範囲内の値として定義できる．これを考慮に入れて，移流分散係数 Eq. (10) を変形すると，

$$\frac{D}{Ru_*}=-\frac{384}{\pi^2\kappa^3\sinh^3(2\xi_0)}$$

$$\cdot\left[\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cosh^2\xi_0-\cos^2\eta}\,d\eta\right]^2$$

$$\cdot\int_0^{\xi_0}\left[\int_\xi\int_\xi\left\{\ln\left(1-\frac{\xi}{\xi_0}\right)-u''\right\}\cosh 2\xi d\xi d\xi\right.$$

$$\left.\cdot\left\{\ln\left(1-\frac{\xi}{\xi_0}\right)-u''\right\}\cosh 2\xi\right]d\xi$$

$$\leqq\frac{384}{\pi^2\kappa^3\sinh^3(2\xi_0)}\left[\int_0^{\pi/2}\cosh\xi d\eta\right]^2$$

$$\cdot\int_0^{\xi_0}\left[\int_\xi\int_\xi M\cosh 2\xi d\xi d\xi\cdot M\cosh 2\xi\right]d\xi$$

$$=\frac{384\cdot\frac{\pi^2}{4}\cosh^2\xi_0\cdot\frac{1}{16}(2\xi_0+\sinh 2\xi_0\cosh 2\xi_0)}{\pi^2\kappa^3\sinh^3(2\xi_0)}\qquad\cdots\cdots(7)$$

となる．ξ_0 が大きい場合には，式（7）の分子分母とも $D[\exp(6\xi_0)]$ となり，したがってある有限の範囲内の値となることを示している．

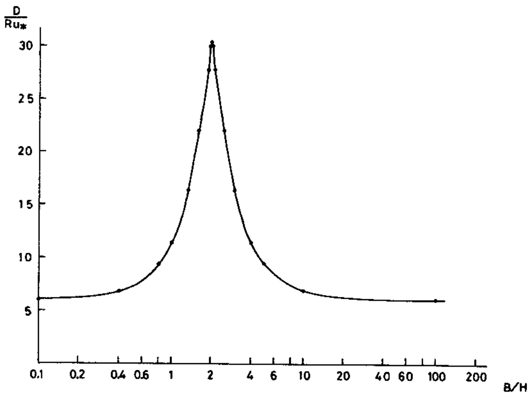
著者らは，Eq.(10) の数値積分を常微分方程式系に帰して行っているが，筆者にはその方法がよく理解できなかったので，ここでは最も簡単な方法として区分求積法によって求めた結果を表—1 に示す．計算機の制約上，$B/H=2$ の場合は ∞/∞ となって計算できないが，$B/H=2.000\,001$ までの計算を実行している．表—1 の結果をグラフに表わしたのが図—1 である．この結果を Fig.2 と比較すると，$B/H=2$ のごく近傍を除いては，ほとんど同じである．これより，$B/H=2$ においては発散するのではなく，特異点として考慮されるべきであり，$B/H=2$ の近傍においての検討がさらに必要であるものと考えられる．

表—1 より，この数値積分において，$B/H\to 2$ の場合に $D/Ru_*=30.7$，また $B/H\to\infty$ の場合に $D/Ru_*=6.03$ となっている．この結果は，$B/H=2$ の場合の Taylor の結果，あるいは $B/H=\infty$ の場合の Elder の結果とは一致しない．この差は，両者の数値積分法による相違であると思われるが明らかではない．

以上のことより，楕円座標系より導いた Eq.(10) は有効であり，したがって水路の幅水深比に対する影響についても，著者らの考察は正しいものと推察される．しかし，上述した点に関しては，さらに詳しい検討が要望される．

表—1　移流分散係数

$B/H(=A_r)$	$\xi_0=\frac{1}{2}\ln\frac{A_r+2}{A_r-2}$	D/Ru_*
1 000	0.002	6.03
100	0.020	6.05
10	0.203	6.96
5	0.424	9.50
4	0.549	11.5
3	0.805	16.4
2.5	1.099	22.0
2.1	1.857	27.7
2.01	2.997	30.1
2.001	4.147	31.8
2.000 1	5.298	31.6
2.000 01	6.450	31.3
2.000 001	7.601	30.7



図—1

参　考　文　献

1) Taylor, G.I. : The dispersion of matters in turbulent flow through a pipe, Proc. Royal Soc. London, Vol. A 223, pp. 446～468, 1958.
2) Elder, J.W. : The dispersion of marked fluid in turbulence shear flow, J. Fluid Mech., Vol. 5, pp. 544～560, 1959.

(1984.8.22・受付)

▶回答者 (*Closure*)——早川　典生（長岡技術科学大学建設系）
By Norio HAYAKAWA

著者らの論文に対して有益な討議を頂き深謝の念に堪えません．ご指摘の疑問点（1）に関してお答えいたします．採用した楕円座標系およびその使用法には問題がありません．実際に著者らは層流の分散係数を楕円管路について求め，$B/H=2$ のとき円管の値に一致することを確かめております[11]．本論文においても，$B/H=2$ のときに円管内流速分布に一致する流速分布形を採用するべきであったかもしれません．しかしながらその場合には，ξ 座標は等流速線にはならず，本論文の出発点である式（2）～（4）の適用はできないことになります．これを要するに，本論文においては式（4）と式（8）で十分近似できるのではないかとして解析しましたが，

$B/H=2$ の場合に式 (4) が円管内流速分布を表わさず，結果は論文中にも記しましたとおり，定性的傾向を示すことを期待するものであります.

ご指摘の疑問点 (2) に関しましては，断面平均流速値からの偏差 u' は $\xi=\xi_0$ で $-\infty$ の値をとる量であり，ご指摘の不等式は理解に苦しむところであります．$B/H=2$ で式 (10) が発散すると思われるのは，$F(\xi_0)$ 中の積分

$$\int_0^{\xi_0} \ln\left(1-\frac{\xi}{\xi_0}\right)\cosh 2\xi d\xi$$

が発散するからであります.

討議者の数値計算結果は，著者らのとほとんど同じであり，著者らの結果を裏付けていただいたものと感謝しております.

(1984.1.21・受付)