

重み付差分式による一次元移流分散方程式の数値解について

NUMERICAL ANALYSIS OF ONE-DIMENSIONAL CONVECTIVE DIFFUSION EQUATION BY WEIGHTED FINITE DIFFERENCE EQUATIONS

加納正道*・上田年比古**

By Masamichi KANOH and Toshihiko UEDA

In this paper, weighted finite difference equations for one-dimensional convective diffusion equation are proposed. In these equations, a value of the desired point is represented as the sum of weighted values of the vicinity points. And these weights are obtained from the individual degree polynomial that satisfied the governing equation. This method has the characteristic that we can select at will the vicinity points which have influenced on the desired point according to the state of flow. As the change of value between lattice points is represented by high degree polynomials, this method can obtain higher order accuracy than other finite difference methods and finite element method. By those equations, composed of five vicinity points, it is indicated that the numerical analysis of the governing equation can achieve higher order accuracy than h^4 , by using non-dimensional lattice spaces $\Delta x=h$, $\Delta t=\lambda h^2$.

1. ま え が き

一次元線形微分方程式として、ここでは一次元移流分散方程式を取り上げ、これの数値解を考える。数値解法として、これまでに差分法、有限要素法、境界要素法¹⁾、粒子移動法²⁾などがあり、それぞれ境界条件の対応、精度、安定性などに特色をもっている。このうち差分法は領域を格子状に組み、各節点の値を差分式に従って求めるもので、その取扱いの簡便さからよく用いられている。さきに、渡部³⁾はこの差分法の1つとして、差分式の係数を、与えられた微分方程式を満足する各次数の多項式を用いて定める方法を述べ、これを熱伝導方程式に用いている。本報は、この方法の理論的根拠を明確にし、次いで一次元移流分散方程式を対象にして、この方程式を満足し、収束性をもつ多項式を新たに求め、これを用いて差分式の係数(重み)を求める方法を述べ、次いでこれにより一次元移流分散方程式の数値解析を行い、この結果を他の数値解と比較し、この方法について、精度など種々の検討を行ったものである。

2. 重み付差分式の求め方

(1) 重み付差分式の考え方

いま与えられた線形偏微分方程式を満足する場所、時間の変数 X , T の多項式において、 X の次数を順次上げて得られるものを、それぞれ $f_1(X, T)$, $f_2(X, T)$, \dots とすれば、対象の方程式が線形微分方程式であることから、これらに、ある係数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ を乗じて重ね合わせた式(1)も与えられた線形偏微分方程式の解となる。

$$C(X, T) = \alpha_1 f_1(X, T) + \alpha_2 f_2(X, T) + \dots \quad (1)$$

ここに、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ は境界条件、初期条件に合うように決められるべき値で、境界条件、初期条件により変化する。さて、一般に、微分方程式の差分式は、Fig.1のように、いま考えている点①(座標を X_0, T_0 とする)の関数値(たとえば濃度) $C(X_0, T_0)$ をその点に近接する周囲の n 個の点①~② [座標 $(X_1, T_1) \sim (X_n, T_n)$] の C の値にある重み P_i をつけ、それらの代数和で表示する式と考えることができる。すなわち

$$C(X_0, T_0) = P_1 C(X_1, T_1) + P_2 C(X_2, T_2) + \dots + P_n C(X_n, T_n) \quad (2)$$

そして、種々の差分形式により、 P_1, P_2, \dots, P_n が異なっているといえる。

さて以下に、これらの重み P_i を定める1つの方法を

* 正会員 工修 九州産業大学助教授 工学部土木工学科 (〒813 福岡市東区松香台 2-327)

** 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木科

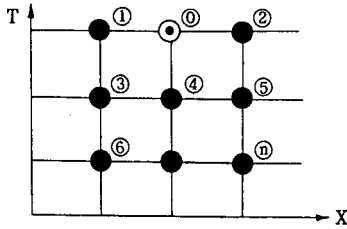


Fig. 1 Lattice points.

提示する。いま式 (2) の各項の値に、式 (1) を用いると

$$\begin{aligned} & \alpha_1 f_1(X_0, T_0) + \alpha_2 f_2(X_0, T_0) + \dots + \alpha_n f_n(X_0, T_0) \\ &= P_1 \{ \alpha_1 f_1(X_1, T_1) + \alpha_2 f_2(X_1, T_1) + \dots + \alpha_n f_n(X_1, T_1) \} \\ & \quad + P_2 \{ \alpha_1 f_1(X_2, T_2) + \alpha_2 f_2(X_2, T_2) + \dots + \alpha_n f_n(X_2, T_2) \} \\ & \quad + \dots + P_n \{ \alpha_1 f_1(X_n, T_n) + \alpha_2 f_2(X_n, T_n) + \dots \\ & \quad + \alpha_n f_n(X_n, T_n) \} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

を得る。前述のように、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は境界条件、初期条件により変化するので、式 (2) すなわち式 (3) が $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ のいかにかわからず成立するためには、式 (3) の右辺を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ に関してまとめたとき、左辺と右辺の α_1 に関する式、 α_2 に関する式、 \dots がそれぞれ等しくなればよい。すなわち

$$\left. \begin{aligned} f_1(X_0, T_0) &= P_1 f_1(X_1, T_1) + P_2 f_2(X_2, T_2) \\ & \quad + \dots + P_n f_n(X_n, T_n) \\ f_2(X_0, T_0) &= P_1 f_2(X_1, T_1) + P_2 f_2(X_2, T_2) \\ & \quad + \dots + P_n f_2(X_n, T_n) \\ \dots \dots \dots \\ f_n(X_0, T_0) &= P_1 f_n(X_1, T_1) + P_2 f_n(X_2, T_2) \\ & \quad + \dots + P_n f_n(X_n, T_n) \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

したがって、この連立方程式を満足する P_1, P_2, \dots, P_n を求め、式 (2) に与えれば、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ のいかにかわからず成立する差分式を求めることができる。この重ね合わせる多項式の数 n は、式 (4) の連立方程式の数になり、したがって、求めることのできる重み P の数すなわち採用する周辺点の数になる。通常の差分式では、与えられる微分方程式の微分形により、階差をとる場合の格子点がおのずから定まり、それほど任意にとることはできない。しかし本法では、微分形とは無関係に、考える点に及ぼす影響の大きいと考えられる点を適当に選ぶことができる。ただし、その点の数は採用した多項式の数と同じという制約があり、精度上、点の数が少なすぎるのもよくなく、またあまり多くとる必要もなく、適当な数があるものと考えられ、したがってこれに応じて、用いる多項式の数も決まってくると考えてよいであろう。

(2) 重み付差分式の決定

一次元移流分散方程式を次のようにする。

$$\frac{\partial C}{\partial T} = D \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} - V \frac{\partial C}{\partial X} \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 C は濃度、 D は拡散係数、 V は流速、 X は距離、 T は時間である。ここでは、 D, V は一定としておく。現象の一般化のため、次の無次元化を行う。いま、たとえば基準量として、濃度 C_0 、流速 V_0 、拡散係数 D_0 をとり、次の無次元量を与える。なお C_0 は一般にはその最大値を与え、その他の基準量の設定については後述する。

$$\left. \begin{aligned} c &= C/C_0, \quad v = V/V_0, \quad d = D/D_0 \\ x &= X/X_0 = X/(D_0/V_0) \\ t &= T/T_0 = T/(D_0/V_0^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

これらを式 (5) に入れば次の無次元式を得る。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = d \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} \dots \dots \dots (7)$$

以下において、式 (7) の数値解を考えることにする。

式 (7) を満足する x, t の多項式をその式中の x の最大次数を増加させながら求めると、次の各式が得られる。ここに、 $c^{(r)}$ の r はその多項式中の x の最大次数である。

$$c^{(0)}(x, t) = 1 \dots \dots \dots (8_0)$$

$$c^{(1)}(x, t) = x - vt \dots \dots \dots (8_1)$$

$$c^{(2)}(x, t) = \frac{(x-vt)^2}{2!} + dt \dots \dots \dots (8_2)$$

$$c^{(3)}(x, t) = \frac{(x-vt)^3}{3!} + (x-vt)dt \dots \dots \dots (8_3)$$

$$c^{(4)}(x, t) = \frac{(x-vt)^4}{4!} + \frac{(x-vt)^2}{2!} dt + \frac{(dt)^2}{2!} \dots \dots \dots (8_4)$$

一般に

$$c^{(r)}(x, t) = \sum_{i=0}^{r/2} \left[\frac{(x-vt)^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{(dt)^i}{i!} \right] \quad (r, i \text{ は正の整数}) \dots \dots \dots (8_r)$$

ただし、式中の t^i の $t=0, i=0$ に対する値は、式 (8₀)~(8₄) に一致するように、ここでは 1 とする。

したがって式 (8_r) の一般項で示される多項式の重ね合せとして得られる式 (1) に相当する無限数列 (ここでは多項式数列とよんでおく) は、

$$c(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\alpha_r \sum_{i=0}^{r/2} \left[\frac{(x-vt)^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{(dt)^i}{i!} \right] \right] \dots \dots \dots (9)$$

となる。式 (9) は、 α_r が有限の値と考えられるので、任意の有限値 a に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n/n!) = 0$ であることから、 $(x-vt)$ および dt が無限大でない限り、収束する数列である。

さて、式 (7) は、 c の x, t に関する微分項のみで構成された式であって、 x, t のみの項を含まないので、原点を任意の位置に移してもその形を変えないから、こ

ここでは、いま考えている点に原点を移して、そのごく近傍の点による差分式の構成を考えよう。差分間隔を $\Delta x = h$, $\Delta t = k$ とし、原点のごく近傍を考えて、 $x = ph$, $t = qk$ として、 p, q は大きくない整数とし、Fig. 1 の点①に近接する周辺点に対して、 $0, \pm 1, \pm 2 \dots$ とする。いま式 (7) が t について一階、 x について二階の微分方程式であることを考慮して、

$$k = \lambda h^2 \quad (\lambda \text{ は正の定数}) \dots\dots\dots(10)$$

とおく。すなわち、 $t = qk = q\lambda h^2$ とする。次に

$$F = vk/h = v\lambda h \dots\dots\dots(11)$$

$$\mu = dk/h^2 = d\lambda \dots\dots\dots(12)$$

とすると、式 (8r) は次のようになる。ただし、 q^i が $q = 0, i = 0$ の場合は 1 とする。

$$c^{(r)}(ph, qk) = h^r \sum_{i=0}^{r/2} \left[\frac{(p-qF)^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{(q\mu)^i}{i!} \right] \dots\dots\dots(13)$$

さて、ここで Fig. 2 のような周辺点をとった場合 ($n = 5$) (中央差分型モデルと名付けておく) の各点の重み P_i (個数 n) を多項式 (13) を用いて、決定してみよう。いま考える点 (ih, jk) の濃度を $c(i, j)$ とし、 $c(i+p, j+q)$ の重みを P_p^q と記せば、差分式は次式となる。

$$\begin{aligned} c(i, j) = & P_0^0 \cdot c(i-1, j) + P_1^0 \cdot c(i+1, j) \\ & + P_{-1}^{-1} \cdot c(i-1, j-1) + P_0^{-1} \cdot c(i, j-1) \\ & + P_1^{-1} \cdot c(i+1, j-1) \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

次に前述のように、考える点に原点を移し、式 (14) で $i = j = 0$ とし、式 (13) で、 $r = 0, 1, \dots, 4$ の各 r について、各周辺点に対する p, q を代入して各点の c を求め、これを式 (14) に入れば、式 (4) に相当する連立方程式 (15) が得られる。これを解けば、各点の重みが決定される。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & F-1 & F & F+1 \\ 1 & 1 & (F-1)^2-2\mu & F^2-2\mu & (F+1)^2-2\mu \\ -1 & 1 & (F-1)^3 & F^3 & (F+1)^3 \\ 1 & 1 & -6(F-1)\mu & -6F\mu & -6(F+1)\mu \\ 1 & 1 & (F-1)^4 & F^4 & (F+1)^4 \\ 1 & 1 & -12(F-1)^2\mu & -12F^2\mu & -12(F+1)^2\mu \\ & & +12\mu^2 & +12\mu^2 & +12\mu^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{-1}^0 \\ P_0^0 \\ P_1^0 \\ P_{-1}^{-1} \\ P_0^{-1} \\ P_1^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(15)$$

次に、Fig. 3 のように周辺点をとった場合 ($n = 5$) (上流差分型モデルと名付けておく) には、差分式は

$$\begin{aligned} c(i, j) = & Q_{-1}^0 \cdot c(i-1, j) + Q_0^0 \cdot c(i+1, j) \\ & + Q_{-1}^{-1} \cdot c(i-1, j-1) + Q_0^{-1} \cdot c(i, j-1) \\ & + Q_{-2}^{-1} \cdot c(i-1, j-2) \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

となり、5 個の重み $Q_{-1}^0 \sim Q_{-2}^{-1}$ は次の連立方程式 (17)

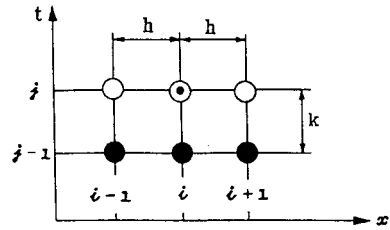


Fig. 2 Center scheme.

● : known point, ○ : unknown point, ⊙ : desired point

を満たすように決定される。なお、この式は前述のように、式 (16) の $c(i, j)$ の点に原点を移して求めている。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & F-1 & F & 2F-1 \\ 1 & 1 & (F-1)^2-2\mu & F^2-2\mu & (2F-1)^2-4\mu \\ -1 & 1 & (F-1)^3 & F^3 & (2F-1)^3 \\ & & -6(F-1)\mu & -6F\mu & -12(2F-1)\mu \\ 1 & 1 & (F-1)^4 & F^4 & (2F-1)^4 \\ & & -12(F-1)^2\mu & -12F^2\mu & -24(2F-1)^2\mu \\ & & +12\mu^2 & +12\mu^2 & +48\mu^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{-1}^0 \\ Q_0^0 \\ Q_{-1}^{-1} \\ Q_0^{-1} \\ Q_{-2}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(17)$$

次に、Fig. 4 のように周辺点をとった場合 ($n = 5$) (explicit 型モデルと名付けておく) には差分式は

$$\begin{aligned} c(i, j) = & R_{-2}^{-1} \cdot c(i-2, j-1) + R_{-1}^{-1} \cdot c(i-1, j-1) \\ & + R_0^{-1} \cdot c(i, j-1) + R_1^{-1} \cdot c(i+1, j-1) \end{aligned}$$

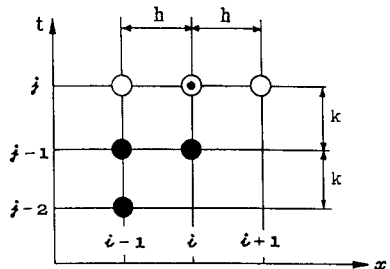


Fig. 3 Up-flow scheme.

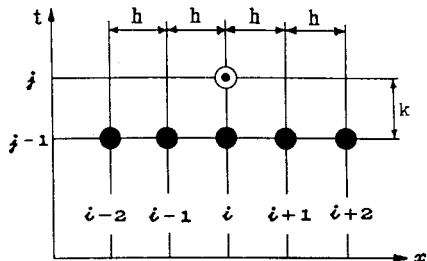


Fig. 4 Explicit scheme.

$$+R_2^{-1} \cdot c(i+2, j-1) \dots \dots \dots (18)$$

となり、同様にして5個の重み $R_2^{-1} \sim R_5^{-1}$ を決定する連立方程式（ここでは省略）が得られる。

式 (15), (17) から、重みは F と μ の関数となり、したがって数値解とその精度も、これらの関数となる。以上のようにして、重みを得られれば差分式が決定され、その後は一般の差分式と同様にして、与えられた境界条件、初期条件のもとに、各格子点の濃度が算定される。

(3) 多項式数列の打ち切り誤差について

式 (9) の多項式数列について、 r 次以降の多項式を打ち切った場合の打ち切り誤差を考える。ここでは概略の値を求めることから、 $\alpha_r=1$ として検討する。さて、実際の差分式をつくる場合、Fig. 2, 3, 4 程度の範囲の点を考えることから、この範囲の点についての式 (9) の打ち切り誤差の最大値を検討してみよう。ここでは、式 (8r) の代わりに式 (13) について考えることにする。

さて、式 (13) から F, μ には、ベキ数がかかっていることから、打ち切り誤差を小さくするためには、 F, μ は1以下が望ましく、ここでは一応

$$0 \leq F \leq 1, 0 \leq \mu \leq 1 \dots \dots \dots (19)$$

として考える。いま、 $F=\mu=1$ として Fig. 2, 3, 4 の各点についてみると

$$-1 \leq p - qF \leq 3, -2 \leq q\mu \leq 0 \dots \dots \dots (20)$$

となる。したがって、いま Fig. 2, 3, 4 の場合を考えて、 $r \geq 5$ について

$$\left| \sum_{i=0}^{r-2} \frac{(p-qF)^{r-2i} \cdot (q\mu)^i}{(r-2i)! \cdot i!} \right| \leq \left| \sum_{i=0}^{r-2} \frac{3^{r-2i} \cdot (-2)^i}{(r-2i)! \cdot i!} \right| < 2 \dots \dots \dots (21)$$

この式の右辺の < 2 は、上式の中央の式を $r \geq 5$ について計算して得られた結果である。

したがって、 r 次以降の多項式を打ち切った誤差 E は

$$E = \sum_r c^r(ph, qk) = \sum_r \left[h^r \sum_{i=0}^{r-2} \frac{(p-qF)^{r-2i} \cdot (q\mu)^i}{(r-2i)! \cdot i!} \right] \dots \dots \dots (22)$$

$\sum_r h^r = h^r / (1-h)$ であるから、式 (21) を考慮して、

$$E < h^r \frac{2}{(1-h)} \dots \dots \dots (23)$$

したがって、 $h \leq 0.8$ をとれば E は、ほぼ h^r のオーダーとなる。

これは、 $\alpha_r=1$ とし、また誘導過程で大きめの上限を与えた結果で、あくまで概数であるが、これより r 次以降を打ち切った式 (9) の打ち切り誤差のオーダーは、 h がほぼ 0.8 以下程度の値に対して、 h^r とみることができよう。

さて本法は、求める点の周辺点の濃度になるべく正しい値を用いることにより差分式の重みも精度よく求まり、本法の精度も向上すると考えられる。したがって、

ここで求めた周辺点の濃度を示す式 (9) の打ち切り誤差は、本法の算定精度と直接結びつかないが、本法の精度の一応の目安になるものと考えられる。

3. 解析解、本法および各種の数値解の比較

(1) 解析解

式 (7) において、拡散係数 d および流速 v を一定とし、次の初期条件と境界条件

$$\left. \begin{aligned} c(x, t=0) &= \exp(-x/\sqrt{d}) \\ c(x=0, t) &= \exp\{(1+v/\sqrt{d})t\} \\ c(x=\infty, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

のもとに、解析解を求めれば、次式が得られる。

$$c(x, t) = \exp\left\{-\frac{x}{\sqrt{d}} + \left(1 + \frac{v}{\sqrt{d}}\right)t\right\} \dots \dots \dots (25)$$

(2) 数値解

a) 本法 (Weighted FDE としておく) による解
 一次元領域を $x = ih, t = jk$ と離散化し、 $h=0.2, \lambda=1/4, k=\lambda h^2=0.01$ とし、計算領域を $i, j=0 \sim 50$ とする。両端の境界条件と初期条件には式 (25) に $x=0, x=50h, t=0$ をそれぞれ与えて得られる値を設定した。なお、以下において精度は解析解との相対誤差 $\epsilon = |(\text{解析解} - \text{数値解}) / \text{解析解}|$ で評価した。まず、 $F=v\lambda h=0.31, \mu=d\lambda=0.05$ したがって $v=6.2, d=0.2$ に対する式 (25) および本法の算定結果を Table 1 に示している。次に F, μ の範囲を、式 (19) とし、したがって、ここでは $F=0 \sim 1, \mu=0.01 \sim 1$ について算定し、その結果の相対誤差について Fig. 5~7 を得た。これらの図の斜線部分は、各 F, μ の値に対して算定された数値解において、その場所的、時間的な相対誤差の最大値(以後これを ϵ_{\max} とする)を求め、この ϵ_{\max} が $h^4 (=1.6 \times 10^{-3})$ 以下になる範囲を示したものである。ここで h^4 を基準としたのは、本例では、周辺点の数 $n=5$ であるから、前述のように打ち切り誤差はほぼ h^5 のオーダーとなることおよび近似的に相対誤差は打ち切り誤差とほぼ同じオーダーとみなし、したがって本計算例の場合期待できる精度すなわち相対誤差でいえばほぼ $h^{n-1} = h^4$ 以下と考えたからである。

b) Crank-Nicolson 法 (C-N 法) の差分解⁴⁾

これは、Fig. 2 と同様の中央差分型離散場格子を使用して次式で表わされる。算定結果を Table 1 に、 $\epsilon_{\max} \leq h^4$ の範囲を Fig. 8 に示す。

$$\begin{aligned} c(i, j) &= \frac{2\mu+F}{4(1+\mu)} \cdot c(i-1, j) + \frac{2\mu-F}{4(1+\mu)} \cdot c(i+1, j) \\ &+ \frac{2\mu+F}{4(1+\mu)} \cdot c(i-1, j-1) + \frac{1-\mu}{1+\mu} \cdot c(i, j-1) \\ &+ \frac{2\mu-F}{4(1+\mu)} \cdot c(i+1, j-1) \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

c) D. A. Bella の差分解⁵⁾

Table 1 Solutions and Errors of Exact solution, Weighted FDE, FDM and FEM
($F = 0.31, \mu = 0.05, h = 0.2, k = 0.01$).

時間空間	解析解	本法の解		Bellaの解		Crank-Nicolsonの解		FEM解	
		数値解	ϵ	数値解	ϵ	数値解	ϵ	数値解	ϵ
10k	20h	5.22256×10^{-4}	5.22065×10^{-4}	3.7×10^{-4}	0.09	5.30253×10^{-4}	0.01	5.28006×10^{-4}	0.01
	40h	6.81452×10^{-8}	6.81203×10^{-8}	3.7×10^{-4}	0.09	6.91887×10^{-8}	0.02	6.88956×10^{-8}	0.01
20k	20h	9.02683×10^{-4}	9.02254×10^{-4}	4.7×10^{-4}	0.20	9.32111×10^{-4}	0.04	9.25200×10^{-4}	0.03
	40h	1.17784×10^{-7}	1.17728×10^{-7}	4.7×10^{-4}	0.20	1.21624×10^{-7}	0.03	1.20722×10^{-7}	0.03
40k	20h	2.69674×10^{-3}	2.69583×10^{-3}	3.4×10^{-4}	0.44	2.88029×10^{-3}	0.07	2.84072×10^{-3}	0.05
	40h	3.51877×10^{-7}	3.51759×10^{-7}	3.4×10^{-4}	0.44	3.75828×10^{-7}	0.07	3.70664×10^{-7}	0.05

ϵ : 相対誤差, +: Explicit scheme, ++: Center scheme, +++: Up-flow scheme

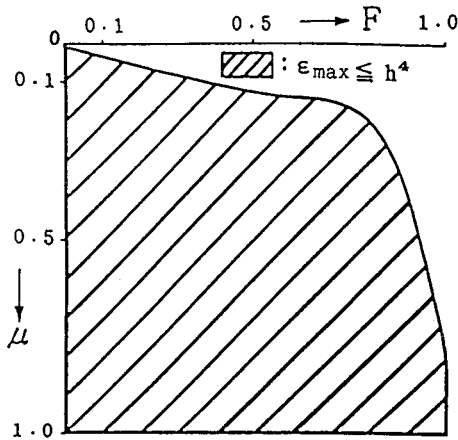


Fig. 5 Weighted FDE (Center scheme).

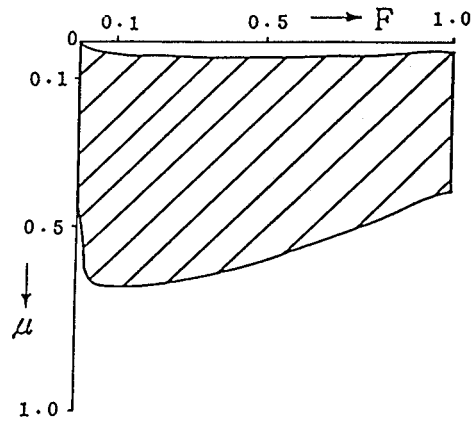


Fig. 7 Weighted FDE (Explicit scheme).

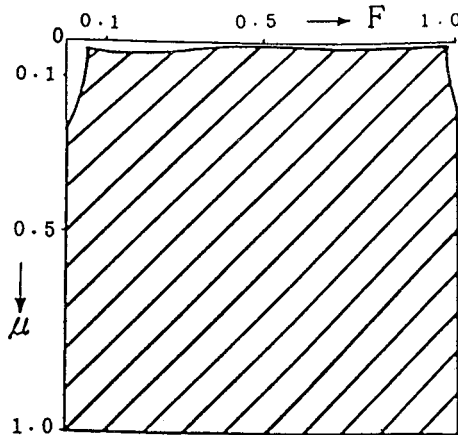


Fig. 6 Weighted FDE (Up-flow scheme).

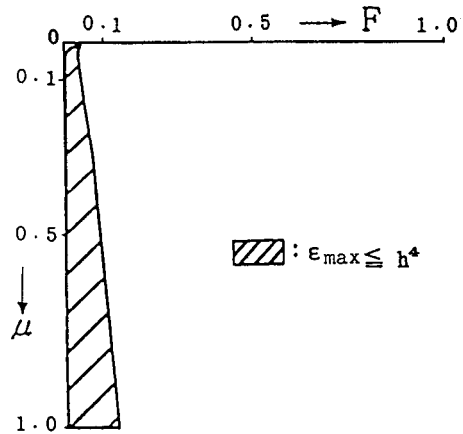


Fig. 8 Crank-Nicolson method.

移流項を一次の explicit 後差分, 分散項を二次の implicit 中央差分で表わし, そこに生じる偽拡散を数値拡散係数 D_N で補正したものである. D_N に無次元化を施し, ここで使用している差分式の表現で示せば次式のようにになる.

$$c(i, j) = \frac{1}{(1+2\mu-2D_N)} \{ (\mu-D_N) \cdot c(i-1, j) + (\mu-D_N) \cdot c(i+1, j) + F \cdot c(i-1, j-1) + (1-F) \cdot c(i, j-1) \} \dots (27)$$

算定結果を Table 1 に示している. またこの場合, Fig. 5~8 に示すような $\epsilon_{max} \leq h^4$ の斜線部分は生じな

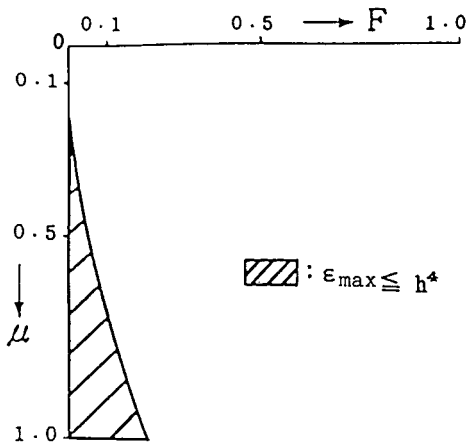


Fig. 9 FEM.

かった。

d) 有限要素法 (FEM) 解

一次元領域を上記の差分法の場合と同様に 50 個の一次元線要素に分割し、式 (7) に重み付残差法を適用して、各節点の濃度 c を未知数とする連立方程式を求め、次いで、時間微分を implicit 法により差分法すれば、次式のようになる⁶⁾。

$$c_j = \Phi c_{j-1} + \Psi \dots \dots \dots (28)$$

ここに、 Φ は F 、 μ および節点の座標値からなる係数行列、 Ψ は F 、 μ および境界条件からなるベクトルである。算定結果を Table 1 に示し、 $\epsilon_{\max} \leq h^4$ の範囲を Fig. 9 に示す。

4. 本法の検討

(1) 精度について

a) 各法の精度の比較

精度を Table 1 の ϵ により比較すると、本法の精度はここに挙げた他の数値解に比べ、ほぼ二桁のオーダーの差があり、きわめて精度がよいといえる。

b) $\epsilon_{\max} \leq h^4$ の範囲の比較

Fig. 5, 6, 7 によると、本法は F 、 μ の広い範囲で高精度を保つ。特に、上流差分型と中央差分型がよい。explicit 型は、斜線部分が 50% であり、やや狭くなっているが、陽形式のため、数値計算が簡便であることから参考として挙げたものである。なお、例示していないが、陽形式で、Fig. 1 の③、④、⑤、⑥、⑦の 5 点をとった場合も計算したが、Fig. 4 の 5 点の場合より精度が低下し、 $\epsilon_{\max} \leq h^4$ の範囲が Fig. 7 の斜線部分より狭くなったことを付記しておく。次に、Fig. 5, 6, 7 の空白部分は精度が h^4 より低下する範囲であるが、斜線部分から離れた周辺部では、誤差が急に大きくなり解が発散する部分が、狭い範囲ではあるが、存在した。なお、これに

ついてはさらに、ここで用いた 3 つの離散型モデルの差分式の漸化式について、増幅因子であるところの係数行列の固有値を計算して、この実数値あるいは複素数の絶対値が、Fig. 5, 6, 7 の斜線部分では 0~1.0 になり、上記の周辺部の解が発散する部分では 1.0 を越え、固有値の大きさと解の収束の範囲の対応⁷⁾がほぼつくことを確認した。

次に、Fig. 8, 9 によると、C-N 法、FEM では $\epsilon_{\max} \leq h^4$ の範囲は、 F が小のかなり狭い範囲となっていて、また Bella の方法では前述のように h^4 以下の範囲は現われなかった。以上のように、ここで挙げた他の数値解は本法に比べて斜線部分がかなり狭く、本法の精度がよいことがわかる。

c) 本法の精度がよい理由について

C-N 法や FEM では、格子点間の濃度 c の変化を直線と近似しているのに比べ、本法では、式 (8_r) に示すように格子点間の c の変化を x 、 t の高次の多項式で表わして、 c の曲線変化が表現されていることによるものとする。なお、特に格子点間で c が曲線的に大きく変化するとき、C-N 法や FEM において精度よく計算するためには、 c の変化を十分とらえるように格子点間を小さくしなければならない。なおこのことは、 h を小さくすることにより、 $\mu (= d\lambda)$ は変わらないが、 $F (= v\lambda h)$ が小になり、Fig. 8, 9 での斜線部分に入るようになることを意味する。これに反し本法では、すでに格子点間の c の曲線変化が含まれていることから、格子点間隔をそれほど小さくしなくても精度のよい計算が行え、数値計算上有利と考えられる。

(2) 重みについて

a) 本法による重み

式 (15), (17) により得られた重みの例を Table 2 に示している。表の①, ②, …⑥は Fig. 1 の点番号である。表に示す重みは、周辺点、いま考えている点に与える影響の度合を示すもので、興味のある値である。重みは、式 (15), (17) に示すように、 F 、 μ の関数であるが、Table 2 からは F 、 μ により複雑に変化していることがわかる。表からは、重みの系統的性質を見出すことは困難なようであるが、例外はあっても一般に点③と④の寄与が大きいこと、 F が大になると③の重みが増加すること、また、上流差分型は中央差分型より、 F 、 μ の変化による点④の重みの変化が少ないこと等がいえるようである。

b) C-N 法の係数 (重み)

参考のため、C-N 法の周辺点の係数 (重み) を Table 2 に併記している。これは、式 (26) からわかるように、点①と③および②と⑤が同じ値となっていること、また点④が F に影響されないようになっている

Table 2 Weights of Weighted FDE and C-N Method ($h=0.2, k=0.01$).

差分の型		中央差分型					上流差分型					Crank-Nicolson 差分法				
F	重み	① P ₁	② P ₂	③ P ₃	④ P ₄	⑤ P ₅	① Q ₁	② Q ₂	③ Q ₃	④ Q ₄	⑤ Q ₅	①	②	③	④	⑤
	0.2	0.2	0.029	0.013	0.275	0.585	0.099	-0.029	0.098	0.424	0.644	-0.137	0.125	0.042	0.125	0.667
0.8		0.216	0.166	0.343	0.006	0.269	0.174	0.276	0.340	0.369	-0.159	0.250	0.194	0.250	0.111	0.194
0.8	0.2	0.101	-0.999	0.766	0.786	0.347	0.099	-0.029	0.644	0.424	-0.137	0.250	-0.083	0.250	0.667	-0.083
	0.8	0.277	-0.051	0.636	-0.208	0.345	0.276	0.174	0.369	0.340	-0.159	0.333	0.111	0.333	0.111	0.111

こと等が本法と異なっている。なお、 μ が小のとき、点④の影響が特に大きくなるようである。

(3) 周辺点の選び方とその個数について

a) 周辺点の選び方について

本法で採用する周辺点には、流れの状況すなわち F, μ に応じて、考える点に影響の大きい点を選んだ方が、算定精度がよくなると考えられる。たとえば中央差分型と上流差分型では、Fig. 5 と Fig. 6 にみられるように精度がよい範囲がやや異なっていることは流れの状況によって適切な点の選び方が存在することを示しているものといえる。また、この場合、上流差分型が中央差分型より精度のよい範囲が広いようである。なおこのように影響が大きいと考えられる点を適当に選択できることは本法の1つの特徴と考えられる。

b) 周辺点の個数 n について

本報の計算例では、採用した周辺点の個数すなわち多項式の数 n を5にとっているが（これは h^4 程度の精度を期待したことによる）、 n が精度に及ぼす影響をみるため、 $n=4$ および3の場合を計算して、その ϵ_{max} を前述の $n=5$ の場合とともに Fig. 10 に示している。ここで、 $n=5$ では前述の上流差分型をとり、 $n=4$ と3では影響の大きいと考えられる点を採用し、それぞれ Fig. 1 の①, ②, ③, ④の4点および①, ②, ④の3点をとっている。計算条件は前述と同様で、 $h=0.2, k=0.01$ とし、解析解は式 (25) である。Fig. 10 によると、 n が小になると精度が低下している。これは、採用する点の数が少なくなること、採用する式 (8) の多項式の数減少し、このため打ち切り誤差が大きくなること等によるものと考えられる。

(4) λ について

ここでは $k=\lambda h^2$ とし、本計算例では $\lambda=1/4$ をとり、Fig. 5, 6, 7 を得たが、この斜線部分の範囲は、 $\lambda=1$ までは、 λ の増大につれて減少の傾向にあるが、ほぼ同程度を保っている。しかし、 λ が1を越えるとかなり顕著に狭くなっていく。すなわち斜線部分の範囲は、 $\lambda=1/4$ の場合に対して、上流差分型では、 $\lambda=1.0$ でほぼ95%、 $\lambda=1.1$ でほぼ75%、 $\lambda=2.0$ でほぼ68% となり、また中央差分型では $\lambda=1.0$ でほぼ98%、 $\lambda=1.1$ でほぼ70%、 $\lambda=2.0$ でほぼ55% となる。以上のことから

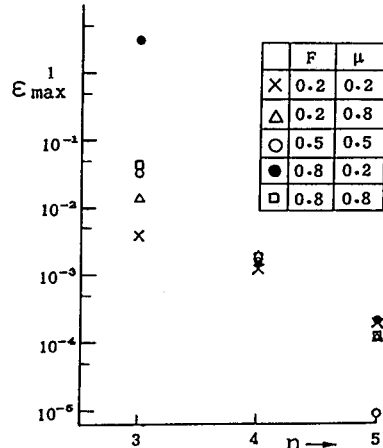


Fig. 10 Accuracy of Weighted FDE for n ($h=0.2, k=0.01$).

$\lambda \leq 1$ が適切と考えられる。

5. 実水域への応用

(1) V, D が一定の場合

これまででは、主として無次元式 (7) について検討を行ったが、ここでは無次元化の基準量の決定法などを述べ、実際の水域への適用について述べる。まず次元で、流速 V 、拡散係数 D が一定の場合を考える。いま領域幅 L と V, D が与えられているとして、これから本法による算定手順を述べる。前述のように、

$$F = v\lambda h = (V/V_0)\lambda h \dots\dots\dots (29)$$

$$\mu = d\lambda = (D/D_0)\lambda \dots\dots\dots (30)$$

また、無次元化式 (6) より

$$V_0 = \frac{D_0}{X_0} = D_0 / \left(\frac{\Delta X}{h} \right) \dots\dots\dots (31)$$

式 (29) に式 (31) を入れ、式 (30) を用い、領域幅 L の分割数を N とすれば、次式を得る。

$$\frac{F}{\mu} = \frac{V}{D} \cdot \Delta X = \frac{V \cdot L}{D \cdot N} \dots\dots\dots (32)$$

したがって、式 (32) に V, D, L を入れ、分割数 N を適当に与えて F/μ を求め、次いで F と μ を、この F/μ の値を満足して、しかも Fig. 5, 6 または 7 の $F-\mu$ 図の斜線範囲内に入るように定める。この場合、数値計算量からいえば N は小さい方がよく、したがっ

て F/μ は大きい方がよい。すなわち F , μ は $F-\mu$ 図の右上隅にとられる傾向にあると考えられる。次に, h , λ を後述のようにして定めれば, 式 (15)~(18) により重み, さらに重み付差分式が決定され, 数値計算を行うことができる。なお, 必要な諸数値は次の順序で決定できる。

$$\Delta X = L/N, X_0 = \Delta X/h \dots \dots \dots (33)$$

$$D_0 = D\lambda/h, V_0 = D_0/X_0, T_0 = X_0^2/D_0 \dots \dots \dots (34)$$

$$k = \lambda h^2, \Delta T = kT_0 \dots \dots \dots (35)$$

$$v = V/V_0, d = D/D_0 \dots \dots \dots (36)$$

さて, h , λ の値の定め方について述べると, 式 (35) より h , λ を小にすれば k が小になる。したがって ΔT が小となり, 計算量が增大する。また, 一方, 前述のように本法の精度の目安に用いた打ち切り誤差のオーダーが h^2 であることから, h を小にすれば精度は向上する。また, λ についても, 前述のように, 小の方が精度は向上する。したがって, h は $0 < h \leq 1$, λ は $0 < \lambda \leq 1$ の範囲で精度と計算量とを考え合わせて定めることになる。

(2) V , D が場所的に変化する場合

次に, 一次元で V , D が場所的に変化して, 各格子点で異なった値をとる場合を考える。この場合は, まず, 各点の V , D のうち, 一般に V の最大の点に対する V , D を用いて, 式 (32) から (33) にかけて述べたようにして, V_0 , D_0 を定める。次いで, この V_0 , D_0 と, 適当に定められた h , λ を用いて, 各格子点の V , D によって, 各格子点の F , μ を求める。次いで, これが $F-\mu$ 図の斜線部分に入ることを確認し, その後, 式 (15)~(18) により, 重み, 次いで重み付差分式を求める。こうして, 各格子点に対する差分式が設定されれば, これを用いて, 与えられた境界条件, 初期条件から各格子点の濃度が算定される。

いま上流差分型と中央差分型を用いるとすれば, 上述のように, V , D が場所的に変化する場合は, Fig. 5 あるいは Fig. 6 の斜線部の, ある範囲にわたって F , μ を用いることになるが, Fig. 5 と Fig. 6 で斜線部分が異なっている。さてこの場合, 上流差分型と中央差分型とでは, 採用する周辺点において既知点が異なるのみであるから (Fig. 1 の⑤と⑥が異なるのみ), 考える水域内で, これら両差分式を混用して数値解析を行うことは比較的容易である。したがって, Fig. 6 の左上隅の空白部 (小さい V , D が存在するとき, F , μ の値として現われると考えられる) には中央差分型を用い, 他の部分には上流差分型を用いるなどして, 両差分式を適宜使い分け,

Fig. 5 と Fig. 6 の空白部を互いに補えば, $0 \leq F \leq 1$, $0 < \mu \leq 1$ のほぼ全領域を斜線部分でカバーでき高精度の計算ができると考える。

6. む す び

本法は, 領域内を格子網で覆い, 考える格子点における関数値 (たとえば濃度) を, その周辺格子点の関数値 (たとえば濃度) に, ある重みを付けた差分式で表示し, この重みを, 微分方程式を満足する変数 x , t の各次数の多項式を用いて, 定めるものである。本法では, 流況に応じて影響の大きいと考えられる周辺点を適宜選択でき, これは 1 つの特徴と考えられる。なお格子点間の関数値 (たとえば濃度) の変化を高次の多項式で表わしていることなどから, 水域の移流分散解析によく用いられる Bella の方法および Crank-Nicolson 法の差分法や FEM に比べて高い精度の解が得られる。なお, 適切な無次元化を行い, 5 個の周辺点を用いた中央差分型と上流差分型の重み付差分式を, 流速 V および拡散係数 D の無次元量 F および μ の値に応じて, 適宜使い分ければ, V , D が場所的に変化する場合でも, 無次元格子間隔 $\Delta x = h$, $\Delta t = \lambda h^2$ ($\lambda \leq 1$) に対して, 普通考えられる水域の流速と拡散係数のほぼ全領域について h^4 以上の精度で数値計算が可能であると考えられる。

終わりに, 本報について渡部信夫九州大学名誉教授に貴重なご助言を受けたことを記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 大西和栄: 非定常移流拡散問題, 数理科学, 第 254 号, pp. 37~45, 1984 年 8 月。
- 2) 神野健二・上田年比古: 粒子の移動による移流分散方程式の数値解法の検討, 土木学会論文報告集, 第 271 号, pp. 45~53, 1978 年 3 月。
- 3) 渡部信夫: 線形微分方程式に近似な階差方程式を得る一つの方法 (I), 九州大学工学部報; 第 21 巻第 4 号 (昭和 24 年)。
- 4) 三好 甫: 偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法, 航空宇宙研究所報告 54 号, pp. 10~14, 1963 年 10 月。
- 5) Bella, D. A. and Grenney, W. J.: Finite-Difference Convection Errors, Pro. of ASCE, Vol. 96, No. SA 6, pp. 1361~1374, Dec., 1970.
- 6) Segerlind, L. J. (川井忠彦監訳): 応用有限要素解析, pp. 38~41, 丸善, 1978 年。
- 7) 伊藤 剛編: 数値解析の応用と基礎, pp. 7~10, アテネ出版, 1971 年。

(1984. 9. 14・受付)