【土木学会論文集　第356号／Ⅰ-3（討議・回答） 1985年4月】

阿井正博
村上　淳　共著

“伝達関数法による面内曲げ有限変位問題の解析”への討議

（土木学会論文報告集，第341号・1984年1月掲載）

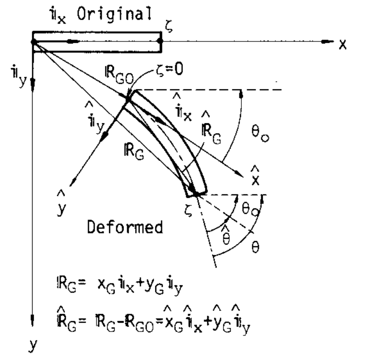
▶討議者（*Discussion*）――――後藤　芳顯（名古屋工業大学）・長谷川彰夫（東京大学）・西野　文雄（アジア工科大学）

By Yoshiaki GOTO, Akio HASEGAWA and Fumio NISHINO

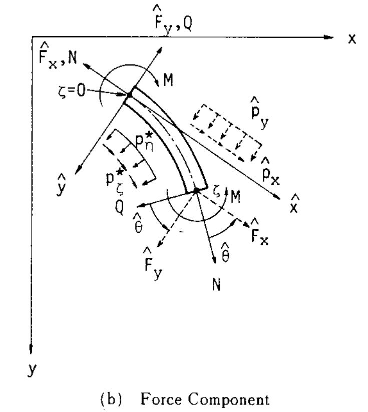
構造物の有限変位解析における剛体変位除去の手法は，直接ラグランジュの手法に比べ，離散化解析における定式化が容易であり，しかも大きな変位挙動まで追跡し得るため,実用的な解析では最も多く用いられている．しかしながら，その定式化が一部物理的な近似に基づくため，理論的根拠は必ずしも十分に明らかにされていない．

表記の論文は，いわゆる直接ラグランジュ流の伝達マトリックス法による平面骨組の有限変位解析を扱ったものであるが，そのテーラー展開を用いた伝達式と，討議者が剛体変位除去の手法の収束性と精度確認に用いた式とが同様であるため，これを用い，討議者の論文[8]の結論の一部に対して，疑問が提起されている．すなわち「剛体変位除去の手法で，剛体変位除去後の支配方程式として，いわゆる微小変位の式（線形式）を用いた場合，要素分割長を無限小とした極限で，ラグランジュ表現の微小ひずみの有限変位の微分方程式の解に収束する．」という結論に対して問題があると指摘している．ここでは，上述の著者の疑問点に対して，討議者の考えを示すとともに，文献 8）の結論に間違いのないことを明らかにしておきたい．なお，著者は討議者の文献 8）を参照されているが，同じ内容を詳述した論文[16]をすでに発表しているので，ここでは，これをもとに議論を行う．以下に用いる記号については，特に断わらない限り著者のものを用いる．

著者は，まず，ラグランジュ表現の有限ひずみの式から，物理成分（x_G, y_G, θ, N, Q, M）に関するべき級数表示の伝達式；式（37），（38）を示し，微小ひずみの式の位置づけを行っている．次に，$\zeta=0$ で，$(x_G,\ y_G,\ \theta)=0$ とし，**Fig. A** のように剛体変位を除去した局所座標 $(\hat{x},\ \hat{y})$ 方向の変位，回転成分 $(\hat{x}_G,\ \hat{y}_G,\ \hat{\theta})$ と断面力成分 $(N,\ Q,\ M)$ に関する伝達式を求めている．そして，軸力 N，とせん断力 Q については伝達式の ζ の一次の



(a)　Displacement Component



(b)　Force Component

Fig. A　Coordinate Systems of a Beam Element.

係数が $\zeta=0$ での断面力成分の非線形式となるので，これが線形式となる微小変位の式とは一致せず，討議者の結論とは異なるとしている．

討議者の見解を先に述べると，この結論の差異は，**Fig. A** に示す座標 $(\hat{x},\ \hat{y})$ に関して，微小変位理論の式から求められる離散化式の節点力成分の解釈の差異に起因している．すなわち，微小変位理論では，節点力の

(N, Q) 成分と，局所座標 $(\hat{x}, \hat{y})$ 方向の成分 $(\hat{F}_x, \hat{F}_y)$ の区別はないが，剛体変位除去の手法による有限変位解析では差が生じ，離散化式の節点力を (N, Q) 成分と解釈した場合には著者の結論に，また $(\hat{F}_x, \hat{F}_y)$ 成分とした場合には討議者の結論となる.

局所座標での離散化式の節点を $(\hat{F}_x, \hat{F}_y)$ と解釈した場合の収束性の証明はすでに文献16) に述べているが，ここでは別の証明方法として，著者の式 (37・a) をもとにこの事実を明らかにする.

$(\hat{F}_x, \hat{F}_y)$ と (N, Q) の関係は，幾何学的な考察から容易にわかるように，

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_x \\ \hat{F}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\hat{\theta}, & -\sin\hat{\theta} \\ \sin\hat{\theta}, & \cos\hat{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(a)}$$

と表わされる．次に，式 (38・b) と $\zeta=0$ で $\hat{\theta}=0$ であることに留意し，$\sin\hat{\theta}$，$\cos\hat{\theta}$ の ζ の一次までの展開式を示すと，

$$\left.\begin{aligned} \sin\hat{\theta} &= (\hat{\theta}')_0\zeta + O(\zeta^2) \\ &= (-M^*/\beta)_0\zeta + O(\zeta^2) \\ \cos\hat{\theta} &= 1 + O(\zeta^2) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(b)}$$

となる．式 (37・a) と式 (b) を式 (a) に代入すれば，$(\hat{F}_x, \hat{F}_y)$ に関する ζ の一次までの展開式は次のようになる.

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_x \\ \hat{F}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_0 + \begin{Bmatrix} -p_\xi^* \\ -p_\eta^* \end{Bmatrix}_0 \zeta + O(\zeta^2) \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(c)}$$

ここで，$\zeta=0$ において $\hat{\theta}=0$ であるから，この点における節点力と分布荷重に対する関係

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} \hat{F}_x \\ \hat{F}_y \end{Bmatrix}_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(d)}$$

$$\begin{Bmatrix} p_\xi^* \\ p_\eta^* \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \end{Bmatrix}_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(e)}$$

を式 (c)，(37・b)，(38・a, b) に代入すると明らかなように，物理成分 $(\hat{x}_G, \hat{y}_G, \hat{\theta}, \hat{F}_x, \hat{F}_y, M)$ に関する展開式の ζ の一次の係数は，すべてこれらの物理成分の線形式で表わされ，微小変位理論による式と一致する.

ところで，通常の剛体変位除去の手法による有限変位解析では，局所座標での要素節点力を $(\hat{F}_x, \hat{F}_y)$ 成分と考えて，全体座標成分 (F_x, F_y) に変換して解析されているので，$(x_G, y_G, \theta, F_x, F_y, M)$ あるいは $(\hat{x}_G, \hat{y}_G, \hat{\theta}, \hat{F}_x, \hat{F}_y, M)$ に関して，要素分割長無限小の極限で，間違いなく，微小ひずみの有限変位の式の解に収束する．また断面力 (N, Q) についても，上記の物理成分を用い次式で評価すると，収束解が得られるのは明らかであろう.

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta, & \sin\theta \\ -\sin\theta, & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\hat{\theta}, & \sin\hat{\theta} \\ -\sin\hat{\theta}, & \cos\hat{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{F}_x \\ \hat{F}_y \end{Bmatrix} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\text{(f)}$$

参 考 文 献

16) 後藤芳顕・長谷川彰夫・西野文雄：平面骨組の有限変位解析の精度に関する一考察，土木学会論文報告集，No. 331，pp. 33～44，1983-3.

(1984. 3. 10・受付)

▶回答者（*Closure*）——阿井　正博（法政大）・村上　淳（石川島播磨重工）
By Masahiro AI and Atsushi MURAKAMI

はじめに，以下の事項を確認とする．まず，両論文（討議論文と 16)）で用いられている面内曲げ有限変位問題の微分基礎式は，"討議" の内容を議論するのに十分妥当である．その初期値問題展開としていわゆる Taylor 展開法を適用したとき，1 階連立微分方程式の形で表わされた基礎式の系の未知量が独立変数に関して一次展開されることが，分割区間→無限小の極限での収束値を得るための必要十分条件である．この確立されている結論を道具として，同極限での要素座標に関する要素変形解析の必要十分な程度について物理的に議論する．論文 16) では，微小ひずみの範囲で前述極限における正しい収束値を得るのに，いわゆる線形解析（微小変位理論）で十分であると結論しており，著者らは，前述の一次までの Taylor 展開の結果の中に線形理論では説明できない基本的な非線形部分が存在することを指摘している.

"討議" での記号に準ずるものとして，$\{\hat{x}_G, \hat{y}_G, \hat{\theta}, N, Q, M\}$ を断面状態量とすれば，$\{N, Q\}$ の一次展開式中に始端状態量に関する非線形項が生じ（式 (37・a)），また一方，要素座標 $\{\hat{x}, \hat{y}\}$ に関する断面力成分 $\{\hat{F}_x, \hat{F}_y\}$ を用いて $\{\hat{x}_G, \hat{y}_G, \hat{\theta}, \hat{F}_x, \hat{F}_y, M\}$ を状態量として採用すれば同伝達関係が線形となることは，著者と討議者らの双方の認めるところである．しかし，以上の片方のみに注目して，"要素座標に関する要素の変形解析が線形理論で十分である" とすることは，普遍的結論としては考えにくい．逆に，"非線形関係" が線形をも包含することより，同結果を非線形であるといっても，この議論に関する限り誤りではない.

前述 2 通りの $\{N, Q\}$ と $\{\hat{F}_x, \hat{F}_y\}$ に対する展開の相互関係が式 (a)～(f) で説明されているが，それらに対するさらに物理的な解釈を補足する．式 (c) に示されているように，$\{\hat{F}_x, \hat{F}_y\}$ の要素内での伝達は

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_x(\zeta) \\ \hat{F}_y(\zeta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{F}_x \\ \hat{F}_y \end{Bmatrix}_0 - \begin{Bmatrix} p_\xi^* \\ p_\eta^* \end{Bmatrix} + O(\zeta^2) \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(c)}$$

($\{\hat{F}_x, \hat{F}_y\}_0=\{N, Q\}_0$) となり，始端状態量 $\{\hat{x}_G, \hat{y}_G, \hat{\theta}, \hat{F}_x, \hat{F}_y, M\}_0$ に関する非線形項は含まない．しかし，同時に，たわみ角 $\hat{\theta}(\zeta)$ が式 (38・b) のように線形変化することに並立して，すなわち，その方向変化に呼応して，軸力とせん断力 $\{N, Q\}$ は，式 (c)′ との力学的整合性を保ち前述の極限で正しい収束値を得るために，式(37・a)

$$\begin{Bmatrix} N(\zeta) \\ Q(\zeta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix}_0 + \begin{Bmatrix} -\dfrac{M^*Q}{\beta} - p_\xi^* \\ \dfrac{M^*N}{\beta} - p_\eta^* \end{Bmatrix} \zeta + O(\zeta^2)$$

の形，すなわち，始端状態量 $\{\hat{x}_G, \hat{y}_G, \hat{\theta}, N, Q, M\}_0$ に関する非線形の形で変化しなくてはならない．たわみ角の変化による $\{\hat{F}_x, \hat{F}_y\}$ と $\{N, Q\}$ とのずれを考慮する以上のことは明らかに幾何学的非線形効果であり，前述 Taylor 展開法の必要十分条件に準ずる限り，この効果は要素内の力学において保持されねばならない．ここに，軸力とせん断力とよばれる N と Q は，要素座標に関係しないそれ以前のきわめて基本的な物理量であり，はりの変形を扱うこれまでの基礎式に一般的に（討議者らの要素座標に関する展開においても）含まれる量である．これらの量が前述の意味で線形の結果とならないときに，討議者らのいう要素座標に関して要素の変形の扱いが線形で十分であるといえるであろうか？

最後に著者らの論文で疑問として述べている事項に対して当事者より早速の討議がなされたことに謝意を表わします．

(1984.6.9・受付)