

制約最適化問題のスケーリングについて

SCALING OF CONSTRAINED OPTIMIZATION PROBLEMS

杉本博之*

By Hiroyuki SUGIMOTO

Numerical optimization techniques has seen dramatic advances in these years and are applied to practical design problems in various engineering fields. But they still have some trouble to solve some kinds of design problems, such as the problem there includes the different types of design variables or the order of each constraint is quite different. Scaling is used to make these problems numerically good conditioned problems. The method to calculate the scale factors of design variables, constraints and objective is presented and applied to two structural design examples successfully. Three mathematical programming methods, Augmented Lagrange Multiplier method, Sequential Linear Programming and Sequential Quadratic Programming, are applied to know the ability of the scaling theory described in this note.

1. ま え が き

構造物の最適設計法は、1960年にSchmitが論文¹⁾を発表して以来注目され、現在まで四半世紀の間、多くの研究がなされ進歩してきている。

当初は、SUMT, SLP等の数値計画法が中心に研究されたが、構造物の設計に応用するには限度があり、最適性規準法、双対法等数値計画法を主たる手法としない設計法が開発され、種々の問題に応用して成功している。しかし、手法の汎用性、解の信頼性に関しては数値計画法による方が優れており、また最近、AL, GRG, SQP等が開発され、数値計画法による最適設計も改めてみなおされている。

構造物の最適設計法は、制約条件のある最適化問題となるのが普通であるが、そのような問題を数値計画法を用いて解く場合、次の2つの理由により数値計算が困難となる。1つは、設計変数と制約条件式の数が多くなる「量」による困難、もう1つは、性質、オーダーの異なる設計変数、制約条件式を同時に扱う等原問題そのものが、数値計算上悪条件である「質」による困難である。前者に関しては、設計変数のリンクあるいは多段階決定

法等が研究されている。後者の質の問題に関しては、たとえば拡張ラグランジュ係数法が、変換後の目的関数の数値的悪条件を解消しようとする方法であるが、より根本的に原問題の数値環境を改良しようとするのが、ここに説明するスケーリングである。

スケーリングあるいは正規化は、何らかの最適化問題を解こうとする場合、部分的にはあるが、意識的あるいは無意識の内になされていると思われる。たとえば、トラスの部材の応力に関する制約条件式を、

$$P/A - \sigma_a \leq 0$$

のまま計算するのはまれで、やはり、

$$1 - \sigma_a \cdot A/P \leq 0$$

として計算するであろう。

ここでのスケーリングは、上述のような正規化を、部分的にではなく、設計変数、制約条件式および目的関数よりなる問題全体をその対象としている^{2),3)}。

本ノートでは、スケーリングの理論を説明し、1, 2の構造最適化問題の問題に応用して、その効果を説明する。

2. 理 論

原最適化問題を以下のように定義する。

「次の条件を満足する設計変数 X を決定せよ。

$$g_j(X) \leq 0; j=1 \sim J$$

* 正会員 工博 室蘭工業大学助教授 土木工学科
(〒050 室蘭市水元町 27-1)

$$f(X) \longrightarrow \min \quad]$$

ここで、 $g_j(X)$ は制約条件式、 $f(X)$ は目的関数、 J は制約条件式の数である。

制約条件式、設計変数および目的関数のスケール係数を、それぞれ $s_j^g (j=1 \sim J)$ 、 $s_i^f (i=1 \sim N)$ および s^0 とする。 N は設計変数の数である。その結果、スケールされた問題は次のようになる。

「次の条件を満足する設計変数 \bar{X} を決定せよ。

$$\bar{g}_j(X) \leq 0 ; j=1 \sim J$$

$$\bar{f}(X) \longrightarrow \min \quad]$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_j(X) &= s_j^g \cdot g_j(X) ; j=1 \sim J \\ \bar{x}_i &= s_i^f \cdot x_i \quad ; i=1 \sim N \\ \bar{f} &= s^0 \cdot f \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

最適設計問題においては、解への収束の速度、解の精度は、制約条件式および目的関数の微係数の値に影響されることが多い。いま、

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} \overline{B_{11}} & \overline{B_{21}} & \dots & \overline{B_{J1}} & \overline{C_1} \\ \overline{B_{12}} & \overline{B_{22}} & \dots & \overline{B_{J2}} & \overline{C_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{B_{1N}} & \overline{B_{2N}} & \dots & \overline{B_{JN}} & \overline{C_N} \end{array} \right] \dots\dots\dots (2)$$

なるマトリックスを考える。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \overline{B_{ji}} &= \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial \bar{x}_i} = \frac{s_j^g}{s_i^f} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \\ \overline{C_i} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_i} = \frac{s^0}{s_i^f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

スケールされた問題の数値的条件は、式(2)のマトリックスの特性に関連していると考え、このマトリックスが、次の条件を満足するように各スケール係数を決定する。

i) 制約条件式のスケールリング

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N (\overline{B_{ji}})^2} = 1 \quad ; j=1 \sim J \dots\dots\dots (4)$$

ii) 設計変数のスケールリング

$$\sqrt{\sum_{j=1}^J (\overline{B_{ji}})^2} = \sqrt{\frac{J}{N}} \quad ; i=1 \sim N \dots\dots\dots (5-1)$$

$$\sqrt{(\overline{C_i})^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\overline{C_k})^2} \quad ; i=1 \sim N \dots\dots\dots (5-2)$$

iii) 目的関数のスケールリング

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N (\overline{C_i})^2} = C \dots\dots\dots (6)$$

以上により、各設計変数および制約条件式の値のオーダーをそろえることができ、最適設計の過程における各制約条件式の重みを同程度にすることができる。

式(4)~(6)は、変数の数より条件式の数の方が多いので、それらを同時に満足するスケール係数は存在し

なく、左辺と右辺の差の二乗の和ができるだけ小さくなるように各スケール係数の値を決定するという無制約の最適化問題となる。途中の過程を省略して結果だけを示すと、以下の無制約最適化問題が導かれる。

$$E = \sum_{i=1}^N \left\{ 1 - \frac{(v_{0i})^2 (e_i)^2}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (v_{0k})^2 (e_k)^2} \right\}^2$$

$$+ \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{J}{N} - \sum_{j=1}^J \frac{(v_{ji})^2 (e_i)^2}{\sum_{k=1}^N (v_{jk})^2 (e_k)^2} \right\}^2 \dots\dots\dots (7)$$

を最小にする $e_i (i=1 \sim N)$ を決定せよ。ただし、

$$e_i = (s_i^f)^* / s_i^f \quad ; i=1 \sim N \dots\dots\dots (8-1)$$

$$v_{ji} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} / (s_i^f)^* \quad ; j=1 \sim J$$

$$i=1 \sim N \dots\dots\dots (8-2)$$

$$v_{0i} = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| / (s_i^f)^* \quad ; i=1 \sim N \dots\dots\dots (8-3)$$

$$(s_i^f)^* = \sqrt{\sum_{j=1}^J \frac{(\partial g_j / \partial x_i)^2}{\sum_{k=1}^N (\partial g_j / \partial x_k)^2}} \quad ; i=1 \sim N \dots\dots\dots (8-4)$$

以上の最適化問題は、無制約の問題であるので、たとえばDFP、BFGSあるいはニュートン法等を用いて解くことは可能であるが、それは必ずしも容易でないし、各スケール係数の値は、それほど精度は必要としないので、以下に説明する近似法で決定する。

まず、式(5-2)を無視し、式(4)と式(5-1)より設計変数と制約条件式のスケール係数を決定する。繰り返し計算で求めるが、第(l-1)回目の式(4)および式(5-1)に対応する式は以下ようになる。

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{s_j^{g(l-1)}}{s_i^{f(l-1)}} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)^2} = 1 \quad ; j=1 \sim J \dots\dots\dots (9)$$

$$\sqrt{\sum_{j=1}^J \left(\frac{s_j^{g(l-1)}}{s_i^{f(l-1)}} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)^2} = \sqrt{\frac{J}{N}} \quad ; i=1 \sim N \dots\dots\dots (10)$$

この段階で上式の等号が十分満足されていないとすると、

$$s_j^{g(l)} = d_j^g \cdot s_j^{g(l-1)} \dots\dots\dots (11)$$

$$s_i^{f(l)} = d_i^f \cdot s_i^{f(l-1)} \dots\dots\dots (12)$$

として d_j^g 、 d_i^f を求めて繰り返し計算が続くことになる。いま、式(9)の $s_j^{g(l-1)}$ を式(11)で置き換えると、

$$d_j^g = 1 / \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{s_j^{g(l-1)}}{s_i^{f(l-1)}} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)^2} \dots\dots\dots (13)$$

同様に、式(10)の $s_i^{f(l-1)}$ を式(12)で置き換えると、

$$d_i^f = \sqrt{\frac{N}{J}} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^J \left(\frac{s_j^{g(l-1)}}{s_i^{f(l-1)}} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)^2} \dots\dots\dots (14)$$

式(13)、(14)は、式(2)のマトリックスの j, i 要素に同時に作用するので、実際の適用に際しては、効果を緩和するために、それぞれの平方根を用いることにする。結局、設計変数と制約条件式のスケール係数は、次の反復形式で計算されることになる。

$$s_j^{g^{(l)}} = \left[1 / \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\frac{s_j^{g^{(l-1)}}}{s_i^{x^{(l-1)}}} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{1/2} \right] \cdot s_j^{g^{(l-1)}} \quad ; j=1 \sim J \dots\dots\dots(15)$$

$$s_i^{x^{(l)}} = \left\{ \frac{N}{J} \cdot \sum_{j=1}^J \left(\frac{s_j^{g^{(l-1)}}}{s_i^{x^{(l-1)}}} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{1/2} \cdot s_i^{x^{(l-1)}} \quad ; i=1 \sim N \dots\dots\dots(16)$$

各スケール係数の初期値は1とした。つまり、

$$\left. \begin{aligned} s_j^{g^{(0)}} &= 1 : j=1 \sim J \\ s_i^{x^{(0)}} &= 1 : i=1 \sim N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

以上の過程は、繰り返し収束計算であるが、収束の判定条件は次のようにした。

$$v_{\max} \leq 1.2 \text{ かつ } v_{\min} \geq 0.8 \dots\dots\dots(18)$$

ここで、

$$v_{\max} = \max \left[\sqrt{\sum_{i=1}^N (\overline{B}_{ji})^2} : j=1 \sim J, \sqrt{\sum_{j=1}^J (\overline{B}_{ji})^2} / \sqrt{\frac{J}{N}} : i=1 \sim N \right] \dots\dots\dots(19-a)$$

$$v_{\min} = \min \left[\sqrt{\sum_{i=1}^N (\overline{B}_{ji})^2} : j=1 \sim J, \sqrt{\sum_{j=1}^J (\overline{B}_{ji})^2} / \sqrt{\frac{J}{N}} : i=1 \sim N \right] \dots\dots\dots(19-b)$$

設計変数のスケール係数が求まると、目的関数のスケール係数は、式(6)より、

$$s^o = C / \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{s_i^f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2} \dots\dots\dots(20)$$

となる。ここで、Cも最適設計の収束状況に影響するパラメーターであるが、本ノートでは、多くの数値計算での経験より、その値を、

$$C = N \cdot J \dots\dots\dots(21)$$

としている。

構造物の最適設計のアルゴリズムは、構造解析、最適化および全体のコントロールの3つの部分より構成されるのが一般的である。それらの各部分の間にスケールングのルーチンが存在する場合の流れ図をFig.1に示した。図中、矢印のついた線が、設計変数、制約条件式お

よび目的関数の値の流れを示す。点線がスケールされた値、実線がスケールされない真の値を示す。

3. 数値計算例

本ノートで説明したスケールングを、Fig.1に示したように最適化の過程に組み込み、その効果を検討した。

スケールングにより、解の精度と収束の速さの改良が期待できるが、それらを目的関数の値と構造解析の回数で検討した。なお、制約条件式および目的関数の微係数の値は差分により求めているので、それに要した構造解析も回数に含まれている。

構造解析の回数に注目するのは、対象とする構造物が大きくなると、計算時間の大部分は、構造解析に要する時間となるからである。

非線形計画法は、構造物の最適設計に有効といわれている拡張ラグランジュ係数法(AL)、繰り返し線形計画法(SLP)および繰り返し二次計画法(SQP)の3種類を使用した。

計算例は、各断面寸法を設計変数とするラーメン構造物の最小重量設計と、節点座標を設計変数に含むトラス構造物の最小重量設計の2例を示す。これらの2例においては、Nonscaleの場合においても、まえがきで述べた最小限のスケールングは行っている。

(1) ラーメン構造物の最小重量設計

最適設計の対象としたラーメン構造物および荷重条件をFig.2に示した。

断面形状は、上下・左右対称のH形断面で、各断面ごとにフランジ幅、フランジ厚および腹板高を設計変数としている。3部材であるので、設計変数の数は9となる。制約条件式は、各部材の応力度のほかに、荷重載荷点の水平変位および回転角が制限されている。この変位に関する2つの制約条件式が、最適解でクリティカルになっている。

3種類の非線形計画法による結果を、Table1に示した。Vが容積、Nが構造解析の回数である。

SLPでは、スケールングにより逆に構造解析の回数は増加しているが、他のAL、SQPでは減少している。ALではさらに目的関数の値もかなり改良されている。

(2) 節点座標を設計変数に含むトラス構造物の最小重量設計

Fig.3の細線の構造を初期値とするトラス構造物の最小重量設計の例である。荷重条件もFig.3に示してある。設計変数は、各部材の断面積と上弦材の節点のy座標である。設計変数の数は14となる。部材断面積と節点座標は、その性質もオーダーも異なる変数であるので、同時に扱うのは難しいといわれている。制約条件式は、応力のみの場合と応力のほかにA点の垂直変位を制限し

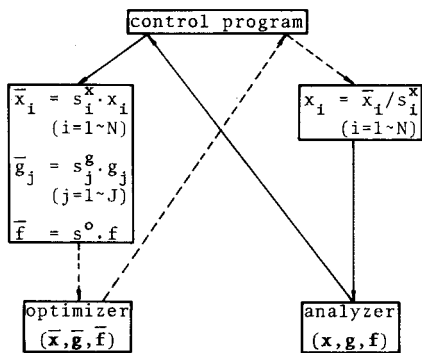


Fig.1 Flow diagram of optimization procedure including scaling.

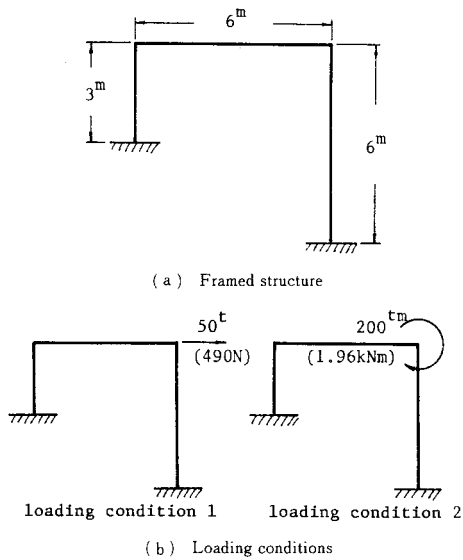


Fig. 2 Optimum design of framed structure.

Table 1 Comparison between scaled results and nonscaled results.

method	scale		nonscale	
	V(m ³)	N	V(m ³)	N
AL	.2953	263	.3042	647
SLP	.2949	140	.2957	80
SQP	.2958	124	.2945	173

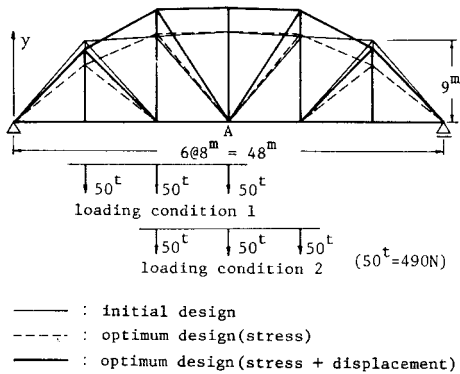


Fig. 3 Optimum design of truss structure.

た場合の2ケース計算した。Fig. 3の点線が応力のみ、太線が変位の制約条件も考慮した場合の最適形状であ

Table 2 Comparison between scaled results and nonscaled results.

method	scale		nonscale	
	V(m ³)	N	V(m ³)	N
AL	2.314	970	2.334	1590
SLP	2.292	225	2.270	255
SQP	2.262	162	2.334	222

る。

変位制約のある場合の計算結果を Table 2 に示した。目的関数の値に関しては、AL と SQP でスケールングの効果がみられ、構造解析の回数に関しては、3手法とも改良されているが、前例と同じように AL において大きく減少している。

4. 結 語

構造物の最適設計のように、制約条件のある最適化問題のスケールングを説明した。

スケール係数は、制約条件式および目的関数の微係数のマトリックスの行と列のノルムに注目し、繰り返し計算で近似的に求めた。数値計算の結果、SLP では大きな効果はみられないが、現在構造物の最適設計に最も適しているといわれている SQP、および小規模な問題に適している AL では効果が顕著であった。

今後、数値環境の改善のメカニズム、より大規模で複雑な問題での効果、他の非線形計画法に応用した場合の効果等を検討する予定である。さらに、文献2)の手法との比較も検討中である。

本報告の内容に関しては、アメリカ合衆国 NASA の三浦宏一博士の貴重なご助言があったことを付記し謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Schmit, L. A. : Structural Design by Systematic Synthesis, Proc. of the 2nd Conference on Electronic Computation, ASCE, New York, pp.105~122, 1960.
- 2) Root, R. R. and Ragsdell, K. M. : Computational Enhancements to the Method of Multipliers, Journal of Mechanical Design, Vol.102, pp.517~523, 1980.
- 3) Gill, P. E., Murray, W. and Wright, M. H. : Practical Optimization, Academic Press, pp.346~355, 1981.

(1984. 8. 15・受付)