

剛体モデルを用いた伝達マトリックスによる 平面骨組の大変形弾塑性解析

LARGE DISPLACEMENT ANALYSIS OF PLANE FRAMES BY MEANS OF TRANSFER MATRIX METHOD USING RIGID-BODY MODEL

吉田 博*・關 謙二**・梶川康男***

By Hiroshi YOSHIDA, Kenji SEKI and Yasuo KAJIKAWA

Today, any structural problem can almost be analyzed by means of the finite element method. Furthermore, for a detailed structural analysis, economical electric computers with higher speed have been required, and this may be repeated endlessly. On the other hand, many researches have been done for more economical structural analysis. As one of these methods, the finite element method derived from a rigid-body model has been proposed. However, even this method contains problems on the capacity of computers and the calculation charges.

It is shown in this paper that the large displacement and elasto-plastic problems of plane frames for which a large computer has been utilized can easily be analyzed by means of the transfer matrix method derived from a rigid-body model. A few numerical examples are also presented.

1. ま え が き

今日、有限要素法を用いることにより、ほとんどあらゆる構造の解析が可能となってきた。そして、より精度の高い構造解析のために、より高速で経済的な電子計算機が要求されてきた。このことは無限に繰り返されるかの感がある。また、より経済的な構造解析手法も数多く研究されてきている。その1つに、剛体モデルを用いた有限要素法が提案されている^{1),2)}。しかし、この手法においても、なお、電子計算機的能力およびその経済性に問題点を含んでいる。

本研究では、従来の大型電子計算機においてのみ可能であった平面骨組構造物の大たわみ問題、弾塑性問題等が、剛体モデルを用いた伝達マトリックス法を用いることにより、小型電子計算機を用いてきわめて手軽に解析できることを示す。本研究で示される解析法は、有限変位解析での特異点の処理等問題があるものの、有限要素法に比較して、定式化が容易であり、計算機の容量も

少なくてもよく、しかも、十分な精度で数値解が得られることに特徴がある。

2. 剛体モデル

(1) 基礎的事項と定義

本論文で用いる座標系は、Fig.1に示すように、右手系直交直線座標とする。

Fig.2のように部材をいくつかの短い剛棒に分割し、

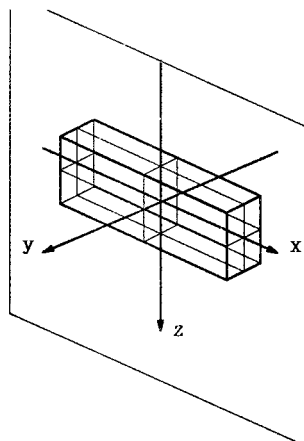


Fig.1 Coordinate system.

* 正会員 工博 金沢大学教授 工学部土木工学科
(〒920 金沢市小立野 2-40-20)

** 正会員 工修 (株)四電技術コンサルタント土木第1部
(〒761 高松市中央町 5-31)

*** 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木工学科
(〒920 金沢市小立野 2-40-20)

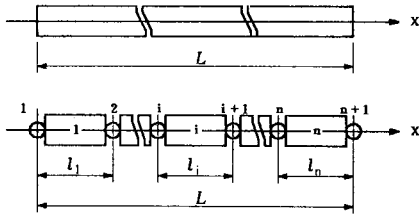


Fig. 2 Rigid-body model.

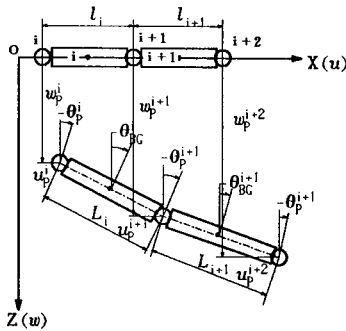


Fig. 3 Displacements of rigid-body.

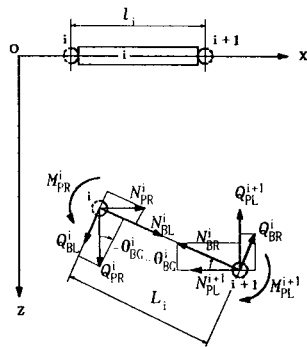


Fig. 4 Forces acting at element.

それらの結合点を節点とよぶことにする。各節点には、回転の自由度をもつピン要素を考える。要素の総数を n としたときの要素番号、節点番号の付け方、要素長の定義は図に示すとおりである。

おのおのの要素についての物理量として、ピン要素については、 x 軸に関して、軸方向変位 u_p 、軸方向力 N_p 、 z 軸に関して、たわみ w_p 、せん断力 Q_p 、 y 軸に関して、たわみ角 θ_p 、曲げモーメント M_p 、剛棒要素については、重心点での y 軸に関するたわみ角 θ_{BC} を考える。

変位の正の向きは、ピン要素 i についてみると、軸方向変位 u_p^i 、たわみ w_p^i は、おのおのの軸の正方向に変位する場合を正、たわみ角 θ_p^i は y 軸の正方向を向いて、時計回りに回転する場合を正とする。これを図示すると、Fig. 3 および 4 のようになる。剛棒要素 i についても、

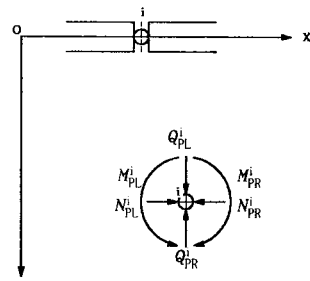


Fig. 5 Forces acting at node.

重心点での y 軸に関するたわみ角 θ_{BC}^i は、 y 軸正方向に向いて時計回りに回転する場合を正とする。

断面力の正の向きは、ピン要素 i について、左断面に作用する断面力の正の向きは、軸方向力 N_{PL}^i 、せん断力 Q_{PL}^i は、おのおのの座標軸の正方向に作用する場合を正、曲げモーメント M_{PL}^i は、 y 軸正方向に向いて、時計回りに作用する場合を正とする。右断面に作用する断面力の正の向きは、軸方向力 N_{PR}^i 、せん断力 Q_{PR}^i は、おのおのの座標軸の負方向に作用する場合を正、曲げモーメント M_{PR}^i は、 y 軸負方向に向いて、時計回りに作用する場合を正とする (Fig. 5)。

(2) ひずみ場¹⁾

大変形領域における変位場は、次式によって与えられる。

$$U(x, z) = u(x) - z \frac{w'(x)}{(1 + u'(x))^2 + (w'(x))^2} \dots \dots \dots (1 \cdot a)$$

$$W(x, z) = w(x) - z \left[1 - \frac{1 + u'(x)}{(1 + u'(x))^2 + (w'(x))^2} \right] \dots \dots \dots (1 \cdot b)$$

ここに、 $'$ は $\frac{\partial}{\partial x}$ を意味する。

式 (1) の変位場は、断面剛の仮定に基づく厳密な表示であり、どのような大変形に対しても成立する。

次に、ひずみは次式で与えられる。

$$\epsilon_x = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2} - 1 \dots \dots \dots (2)$$

式 (1) を式 (2) に代入すると、

$$\epsilon_x = \epsilon_D - z \cdot \kappa \dots \dots \dots (3)$$

の形で表わされる。ここに、 ϵ_D および κ は、

$$\epsilon_D = \sqrt{(1 + U'(x))^2 + (W'(x))^2} - 1 \dots \dots \dots (4)$$

$$\kappa = \frac{(1 + U'(x))W''(x) - W'(x)U''(x)}{(1 + U'(x))^2 + (W'(x))^2} \dots \dots \dots (5)$$

となる¹⁾。また、式 (5) は、次のようにも書ける。

$$\kappa = \left[\tan^{-1} \left(\frac{w'(x)}{1 + u'(x)} \right) \right]' \dots \dots \dots (6)$$

これらの式の誘導には、一切の省略を行っていない。すなわち、式 (1) の変位場を用いて、式 (2) のようにひずみを定義すると、そのひずみ場は、厳密な形で

(3) のようになる。

(3) 変位とひずみ

本モデルでは、変位の場合として、すべて線形の場合を与える。すなわち、Fig. 3 の剛棒要素 i について考えれば、

$$u_b^i(x) = \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) u_p^i + \frac{x}{l_i} u_p^{i+1} \dots (7\text{-a})$$

$$w_b^i(x) = \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) w_p^i - \frac{x}{l_i} w_p^{i+1} \dots (7\text{-b})$$

である。さて、式 (4)、式 (5) は、複雑な形をしているが、式 (7) の変位場を用いると、まず、式 (4) は、

$$\epsilon_{bb}^i = \frac{1}{l_i} \sqrt{(l_i + u_p^{i+1} - u_p^i)^2 + (w_p^{i+1} - w_p^i)^2} - 1 \dots (8)$$

となる。また、式 (6) について差分式を用いると、

$$\begin{aligned} x^{i+1} = & \frac{1}{\left\{\left(\frac{l_i}{2}\right) + \left(\frac{l_{i+1}}{2}\right)\right\}} \left[\tan^{-1} \left(\frac{w_p^{i+2} - w_p^{i+1}}{l_{i+1} + u_p^{i+2} - u_p^{i+1}} \right) \right. \\ & \left. - \tan^{-1} \left(\frac{w_p^{i+1} - w_p^i}{l_i + u_p^{i+1} - u_p^i} \right) \right] \dots (9) \end{aligned}$$

となる。ここで注意したいのは、式 (8) と式 (9) とでは、考慮する領域が異なっている点である。つまり、 ϵ_p については、その剛棒要素についてのみ考慮すればよいが、 x については、その剛棒要素のほかにも、隣接要素の各半分について考慮する必要がある。

さて、変形後の剛棒要素 i の長さを L_i とすると、

$$L_i = \sqrt{(l_i + u_p^{i+1} - u_p^i)^2 + (w_p^{i+1} - w_p^i)^2} \dots (10)$$

であるから、式 (8) は、

$$\epsilon_{bb}^i = \frac{L_i}{l_i} - 1 \dots (11)$$

となる。また、剛棒要素の回転角 θ_{bc}^i 、 θ_{bc}^{i+1} について、

$$\theta_{bc}^i = -\tan^{-1} \left(\frac{w_p^{i+1} - w_p^i}{l_i + u_p^{i+1} - u_p^i} \right) \dots (12)$$

$$\theta_{bc}^{i+1} = -\tan^{-1} \left(\frac{w_p^{i+2} - w_p^{i+1}}{l_{i+1} + u_p^{i+2} - u_p^{i+1}} \right) \dots (13)$$

が成り立つから、式 (9) は

$$x_p^{i+1} = \frac{2}{l_i + l_{i+1}} \{(-\theta_{bc}^{i+1}) - (-\theta_{bc}^i)\} \dots (14)$$

となり、幾何学的関係より求めた文献1) のものと一致する。式 (11) および (14) は、もともと式 (3)、(4) および (5) のような複雑な変位-ひずみ関係が、本モデルを用いることにより、近似的表現ではあるが、物理的にきわめて把握しやすい形に置き換えられることがわかる。すなわち、直ひずみは、完全にトラスとしての変形であり、また、曲率は、2つの要素の折れ曲がり角である。

ここで、 x について、剛棒要素 i の両端において考えてみると

$$x_{pr}^i = \frac{2}{l_i} \{(-\theta_{bc}^i) - (-\theta_p^i)\} \dots (15)$$

$$x_{pl}^{i+1} = \frac{2}{l_i} \{(-\theta_p^{i+1}) - (-\theta_{bc}^i)\} \dots (16)$$

となる。

式 (15) および式 (16) の方が、式 (14) に比べ、境界条件の処理、変断面の場合および断面の一部が塑性化した場合の取り扱いが容易となる。

(4) 変位および断面力

Fig. 3 より変位に関して、

$$w_p^{i+1} - w_p^i = L_i \sin(-\theta_{bc}^i) \dots (17)$$

$$l_i + u_p^{i+1} - u_p^i = L_i \cos(-\theta_{bc}^i) \dots (18)$$

の関係が成り立つ。また、Fig. 4 より、断面力については、

$$N_{bl}^i = N_{pr}^i \cos(-\theta_{bc}^i) + Q_{pr}^i \sin(-\theta_{bc}^i) \dots (19)$$

$$Q_{bl}^i = -N_{pr}^i \sin(-\theta_{bc}^i) + Q_{pr}^i \cos(-\theta_{bc}^i) \dots (20)$$

$$N_{pl}^{i+1} = N_{br}^i \cos(-\theta_{bc}^i) - Q_{br}^i \sin(-\theta_{bc}^i) \dots (21)$$

$$Q_{pl}^{i+1} = N_{br}^i \sin(-\theta_{bc}^i) + Q_{br}^i \cos(-\theta_{bc}^i) \dots (22)$$

が成り立つ。ここで、 N_B および Q_B はピン要素の N_P および Q_P の剛棒要素への軸方向力およびせん断力成分である。これらは、つり合い状態にあるから

$$N_{br}^i = N_{bl}^i = N_B^i \dots (23)$$

$$Q_{br}^i = Q_{bl}^i = Q_B^i \dots (24)$$

が成り立つ。したがって、

$$N_{pl}^{i+1} = N_{pr}^i \dots (25)$$

$$Q_{pl}^{i+1} = Q_{pr}^i \dots (26)$$

が成り立つ。また、曲げモーメントについては、

$$M_{bl}^{i+1} = M_{pr}^i + Q_{bl}^i L_i \dots (27)$$

が成り立つ。

3. 弾性有限変位解析

(1) はじめに

軸方向圧縮力を受ける柱は、軸圧縮力が座屈荷重に等しくなった瞬間に、一様圧縮変形状態（初期変形状態）と座屈変形状態が共存することになる。そして、柱は中立の平衡状態となり、初期変形状態から少し離れた任意座屈変形状態をとり得ることになる。軸方向圧縮力が座屈荷重より大きくなると、座屈変形状態の方が安定となる。この平衡状態を決定する問題が、エラスティカの問題⁵⁾である。

本研究では、剛体モデルを用いた伝達マトリックスによる大たわみ問題の一例として、このエラスティカの問題を取り扱うことにする。

(2) 断面力とひずみの関係

弾性域における応力-ひずみ関係は、ヤング係数を E とすると

$$\sigma_x = E \epsilon_x \dots (28)$$

で表わされる。すなわち、断面力は

$$N = -EA \epsilon_p \dots (29)$$

$$M = EI \chi \dots (30)$$

となる。ここに、 A は断面積、 I は y 軸に関する断面二次モーメントである。

(3) ピン要素間の物理量の関係

剛棒要素 i の左端のピン要素 i と右端のピン要素 $i+1$ の物理量の関係を求める。

まず、式 (11) および式 (29) より、

$$L_i = l_i \left(1 - \frac{N_B^i}{EA} \right) \dots \dots \dots (31)$$

を得る。

式 (31) と、式 (19) および (20) を用いると、式 (17)、(18) および (27) は、

$$w_P^{i+1} = w_P^i - l_i \left\{ \sin \theta_{BC}^i - \frac{N_{PR}^i}{2EA} \sin 2\theta_{BC}^i + \frac{Q_{PR}^i}{2EA} (1 - \cos 2\theta_{BC}^i) \right\} \dots \dots \dots (32)$$

$$u_P^{i+1} = u_P^i - l_i \left\{ (1 - \cos \theta_{BC}^i) + \frac{N_{PR}^i}{2EA} (1 + \cos 2\theta_{BC}^i) - \frac{Q_{PR}^i}{2EA} \sin 2\theta_{BC}^i \right\} \dots \dots \dots (33)$$

$$M_{PL}^{i+1} = M_{PR}^i + l_i (N_{PR}^{i+1} \sin \theta_{BC}^i + Q_{PR}^i \cos \theta_{BC}^i) - \frac{l_i}{2EA} \{ (N_{PR}^i)^2 \sin 2\theta_{BC}^i + 2N_{PR}^i Q_{PR}^i \cos 2\theta_{BC}^i - (Q_{PR}^i)^2 \sin 2\theta_{BC}^i \} \dots \dots \dots (34)$$

となる。また、式 (15)、(16) および (30) より、

$$\theta_{BC}^i = \theta_P^i - \frac{l_i}{2EI} M_{PR}^i \dots \dots \dots (35)$$

$$\theta_P^{i+1} = \theta_{BC}^i - \frac{l_i}{2EI} M_{PL}^{i+1} \dots \dots \dots (36)$$

を得る。

(4) ピン要素間の伝達マトリックス

これまで得られた式は、非線形項を含み、そのまま直接解くことはできない。そこで、増分法を適用する。まず荷重径路をいくつか分割し、そのときの平衡状態を次のように示す。

$$\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(M)}, \Omega^{(M+1)}, \dots, \Omega^{(N)}$$

ここに、 $\Omega^{(0)}$ は、初期の状態量、 $\Omega^{(M)}$ は、最終の状態量を表わす。 $\Omega^{(M)}$ の状態量が既知のとき、 $\Omega^{(M+1)}$ の状態量を $\Omega^{(M)}$ の値を用いて決定する。すなわち、式 (32)~(36) を Taylor 展開し、高次項を省略すると、

$$\Delta w_P^{i+1} = \Delta w_P^i - l_i \left(\cos \theta_{BC}^i - \frac{N_{PR}^i}{EA} \cos 2\theta_{BC}^i + \frac{Q_{PR}^i}{EA} \sin 2\theta_{BC}^i \right) \Delta \theta_{BC}^i + \frac{l_i}{2EA} \sin 2\theta_{BC}^i \Delta N_{PR}^i - \frac{l_i}{2EA} (1 - \cos 2\theta_{BC}^i) \Delta Q_{PR}^i \dots \dots \dots (37)$$

$$\Delta u_P^{i+1} = \Delta u_P^i - l_i \left(\sin \theta_{BC}^i - \frac{N_{PR}^i}{EA} \sin 2\theta_{BC}^i - \frac{Q_{PR}^i}{EA} \cos 2\theta_{BC}^i \right) \Delta \theta_{BC}^i - \frac{l_i}{2EA} (1 + \cos 2\theta_{BC}^i) \Delta N_{PR}^i + \frac{l_i}{2EA} \sin 2\theta_{BC}^i \Delta Q_{PR}^i \dots \dots \dots (38)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{PL}^{i+1} = & \Delta M_{PR}^i + l_i \left\{ (N_{PR}^i \cos \theta_{BC}^i - Q_{PR}^i \sin \theta_{BC}^i) \right. \\ & - \frac{1}{EA} \{ (N_{PR}^i)^2 \cos 2\theta_{BC}^i - 2N_{PR}^i Q_{PR}^i \sin 2\theta_{BC}^i \\ & \left. - (Q_{PR}^i)^2 \cos 2\theta_{BC}^i \right\} \Delta \theta_{BC}^i + l_i \left\{ \sin \theta_{BC}^i \right. \\ & \left. - \frac{1}{EA} (N_{PR}^i \sin 2\theta_{BC}^i + Q_{PR}^i \cos 2\theta_{BC}^i) \right\} \Delta N_{PR}^i \\ & + l_i \left\{ \cos \theta_{BC}^i - \frac{1}{EA} (N_{PR}^i \cos 2\theta_{BC}^i \right. \\ & \left. - Q_{PR}^i \sin 2\theta_{BC}^i) \right\} \Delta Q_{PR}^i \dots \dots \dots (39) \end{aligned}$$

および

$$\Delta \theta_{BC}^i = \Delta \theta_P^i - \frac{l_i}{2EI} \Delta M_{PR}^i \dots \dots \dots (40)$$

$$\Delta \theta_P^{i+1} = \Delta \theta_{BC}^i - \frac{l_i}{2EI} \Delta M_{PL}^{i+1} \dots \dots \dots (41)$$

となる。式 (37)~(39) に式 (40) を代入し、 $\Delta \theta_{BC}^i$ を消去すると、

$$\begin{aligned} \Delta w_P^{i+1} = & \Delta w_P^i - l_i \chi \Delta \theta_P^i + \frac{l_i^2}{2EI} \chi \Delta M_{PR}^i \\ & - \frac{l_i}{2EA} (1 - \cos 2\theta_{BC}^i) \Delta Q_{PR}^i \\ & + \frac{l_i}{2EA} \sin 2\theta_{BC}^i \Delta N_{PR}^i \dots \dots \dots (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta u_P^{i+1} = & \Delta u_P^i - l_i \omega \Delta \theta_P^i + \frac{l_i^2}{2EI} \omega \Delta M_{PR}^i \\ & + \frac{l_i}{2EA} \sin 2\theta_{BC}^i \Delta Q_{PR}^i \\ & - \frac{l_i}{2EA} (1 + \cos 2\theta_{BC}^i) \Delta N_{PR}^i \dots \dots \dots (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{PL}^{i+1} = & l_i \phi \Delta \theta_P^i + \left(1 - \frac{l_i^2}{2EI} \phi \right) \Delta M_{PR}^i + l_i \chi \Delta Q_{PR}^i \\ & + l_i \omega \Delta N_{PR}^i \dots \dots \dots (44) \end{aligned}$$

となる。また、式 (41) に式 (40) および式 (44) を代入して、 $\Delta \theta_{BC}^i$ および ΔM_{PL}^{i+1} を消去すると、

$$\begin{aligned} \Delta \theta_P^{i+1} = & \left(1 - \frac{l_i^2}{2EI} \phi \right) \Delta \theta_P^i - \frac{l_i}{2EI} \left(2 - \frac{l_i^2}{2EI} \phi \right) \Delta M_{PR}^i \\ & - \frac{l_i^2}{2EI} \chi \Delta Q_{PR}^i - \frac{l_i^2}{2EI} \omega \Delta N_{PR}^i \dots \dots \dots (45) \end{aligned}$$

となる。ここで、 χ 、 ϕ および ω は、

$$\chi = \cos \theta_{BC}^i + \frac{1}{EA} (Q_{PR}^i \sin 2\theta_{BC}^i - N_{PR}^i \cos 2\theta_{BC}^i) \dots \dots \dots (46)$$

$$\begin{aligned} \phi = & -(Q_{PR}^i \sin \theta_{BC}^i - N_{PR}^i \cos \theta_{BC}^i) \\ & + \frac{1}{EA} \{ (Q_{PR}^i)^2 \cos 2\theta_{BC}^i + 2N_{PR}^i Q_{PR}^i \sin 2\theta_{BC}^i \\ & - (N_{PR}^i)^2 \cos 2\theta_{BC}^i \} \dots \dots \dots (47) \end{aligned}$$

$$\omega = \sin \theta_{BC}^i - \frac{1}{EA} \{ (Q_{PR}^i)^2 \cos 2\theta_{BC}^i + N_{PR}^i \sin 2\theta_{BC}^i \} \dots \dots \dots (48)$$

である。また、 N_P および Q_P については、

$$\Delta N_{PL}^{i+1} = \Delta N_{PR}^i \dots\dots\dots (49)$$

$$\Delta Q_{PL}^{i+1} = \Delta Q_{PR}^i \dots\dots\dots (50)$$

である。

以上で、ピン要素 i と $i+1$ の状態量の関係式が求められた。

エラスティカの問題の解析では、特に、 Ω^{th} のときの軸圧縮力を P 、増分を ΔP とすると

$$N_{PL}^{i+1} = N_{PR}^i = P \dots\dots\dots (51)$$

$$\Delta N_{PL}^{i+1} = \Delta N_{PR}^i = \Delta P \dots\dots\dots (52)$$

は、明らかである。したがって、独立な未知量は、 Δw_p , $\Delta \theta_p$, ΔM_p , ΔQ_p の4個となり、これらが求められれば、それらを用いて Δu_p , $\Delta \theta_{bc}$ を求めることができる。

これらをマトリックスを用いて表わす。ピン要素 i の状態量ベクトルを ΔV_p で表わし、

$$\Delta V_p^i = \begin{bmatrix} \Delta W & \Delta \theta & \Delta M & \Delta Q & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (53)$$

とする。ここに、 $\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$ は列ベクトルを意味する。またピン要素間伝達マトリックスを F_B とすると、

$$\Delta V_{PL}^{i+1} = F_B^i \Delta V_{PR}^i \dots\dots\dots (54)$$

の関係が成り立つ。ここに、 F_B^i は、

$$F_B^i = \begin{bmatrix} 1 & -l_i \chi & \frac{l_i^2}{2EI} \chi & & \\ 0 & 1 - \frac{l_i^2}{2EI} \psi & -\frac{l_i}{2EI} \left(2 - \frac{l_i^2}{2EI} \psi \right) & & \\ 0 & l_i \cdot \psi & 1 - \frac{l_i^2}{2EI} \psi & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ -\frac{l_i}{2EI} (1 - \cos 2\theta_{bc}^i) & \frac{l_i}{2EI} \sin 2\theta_{bc}^i \cdot \Delta P & & & \\ -\frac{l_i^2}{2EI} \chi & -\frac{l_i^2}{2EI} \omega \cdot \Delta P & & & \\ l_i \cdot \chi & l_i \cdot \omega \cdot \Delta P & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \end{bmatrix} \dots\dots\dots (55)$$

である。また、 Δu_p^{i+1} を、

$$\Delta u_p^{i+1} = \Delta u_p^i + F_{bu}^i \Delta V_{PR}^i \dots\dots\dots (56)$$

と表わすと、

$$F_{bu}^i = \begin{bmatrix} 0 & -l_i \omega & \frac{l_i^2}{2EI} \omega & \frac{l_i}{2EA} \sin 2\theta_{bc}^i \\ -\frac{l_i}{2EA} (1 + \cos 2\theta_{bc}^i) \Delta P \end{bmatrix} \dots\dots\dots (57)$$

で表わされる。ここに、 $[\]$ は行ベクトルを意味する。

また、軸圧縮力 P が座屈荷重 P_{cr} より小さい場合、横たわみは存在せず、一様圧縮変形するから、

$$\theta_{bc}^i = 0 \dots\dots\dots (58)$$

$$Q_{PR}^i = 0 \dots\dots\dots (59)$$

であり、

$$\chi = 1 - \frac{P}{EA} \dots\dots\dots (60)$$

$$\psi = P \left(1 - \frac{P}{EA} \right) \dots\dots\dots (61)$$

$$\omega = 0 \dots\dots\dots (62)$$

となり、第5列目の荷重項は0となる。したがって、伝達マトリックスとして、

$$F_{B0}^i = \begin{bmatrix} 1 & -l_i \chi & \frac{l_i^2}{2EI} \chi & 0 \\ 0 & 1 - \frac{l_i^2}{2EI} \psi & -\frac{l_i}{2EI} \left(2 - \frac{l_i^2}{2EI} \psi \right) & -\frac{l_i}{2EI} \chi \\ 0 & l_i \psi & 1 - \frac{l_i^2}{2EI} \psi & l_i \chi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (63)$$

を用い、状態量ベクトルとしては、

$$\Delta V_{B0}^i = \begin{bmatrix} \Delta w & \Delta \theta & \Delta M & \Delta Q \end{bmatrix}_{B0} \dots\dots\dots (64)$$

を用いる。また、 Δu_p^{i+1} は、

$$\Delta u_p^{i+1} = \Delta u_p^i - \frac{l_i}{EI} \Delta P \dots\dots\dots (65)$$

となる。

(5) 境界条件および境界マトリックス

伝達マトリックス法における境界条件および境界マトリックスについては、文献3), 4)に詳述されているので、ここでは、説明を省略した。

(6) 座屈条件式

伝達マトリックスを用いた座屈解析における座屈条件式およびそれを用いた座屈荷重の計算法については、文献4)に詳述されているので、ここでは、説明を省略した。

(7) 数値解析例

数値解析例としてエラスティカの問題⁵⁾を選んだ。エラスティカの問題は、座屈分岐点の正確な検出と座屈分岐点からの脱出の問題点を有している。これらを考慮して、増分法によって解析を行った。

まず、座屈荷重および固有変形モードを求めた。次に、その座屈分岐点からの脱出は、その点における固有変形モードに比例した微小なたわみ変形を与えることによった。それ以後は、修正増分法により、変形挙動を追跡した。

Fig. 6は、両端単純支持の柱の中央点のたわみの、要素分割として柱を20等分した場合の本数値解であり、図中の×印は文献1)の楕円関数による解析解を示している。なお、ここで用いた基本変形モードは、

$$w = 0.1 L \sin \frac{\pi x}{L} \dots\dots\dots (66)$$

である。また、軸方向変位、たわみ曲線、軸力分布、モーメント分布、せん断力分布等も計算したが、これらはすべて、文献1)のものと完全に一致した。

Table 1は Fig. 7に示す一端固定他端自由の柱の、本法による計算値と楕円関数による解析解の比較を示したものである。これらの数値計算結果と解析解は非常によく一致しており、誤差の蓄積もほとんど認められず、大たわみ問題に対しての本法の妥当性がうかがわれる。

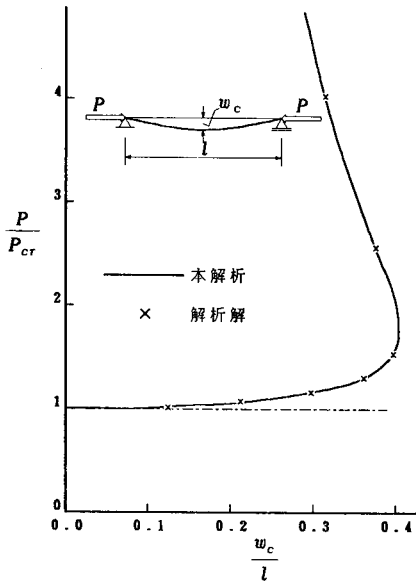


Fig. 6 Numerical example of column.

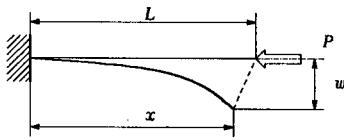


Fig. 7 Model used numerical example.

Table 1 Comparison of numerical results.

P/P _{cr}	x/L		w/L		増分数
	解析解	本解法	解析解	本解法	
1.000	1.000	1.000	0.0	0.0	—
1.015	0.970	0.971	0.220	0.248	5
1.063	0.881	0.883	0.422	0.444	8
1.152	0.741	0.741	0.593	0.612	10
1.293	0.560	0.562	0.719	0.735	10
1.518	0.349	0.352	0.792	0.805	10
1.884	0.123	0.128	0.803	0.812	10
2.541	-0.107	-0.101	0.750	0.765	10
4.029	-0.340	-0.334	0.625	0.642	10
9.116	-0.577	-0.570	0.421	0.443	20

4. 非弾性解析

(1) 非弾性応力-ひずみ関係

Fig. 8 に示すような線形硬化弾塑性体の応力-ひずみ関係を考える。塑性変形がある程度進行した状態より除荷した後の、再負荷に対する材料の降伏点は、除荷を開

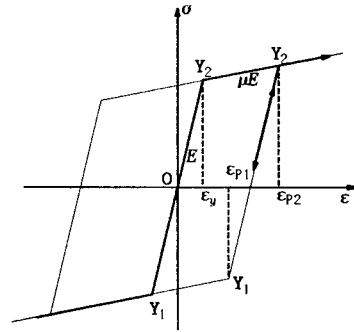


Fig. 8 Idealized stress-strain curve.

始した点であり、再負荷して降伏した後は、除荷前にたどった線の延長上をたどるものとする。すなわち、Fig. 8 において、ヤング率を E 、ひずみ硬化域での傾きを μE 、降伏ひずみを ϵ_y とすると、区間 $Y_1 - Y_2$ では、
 $\sigma = E\epsilon \dots \dots \dots (67)$

区間 $Y_2 - Y_2'$ では、
 $\sigma = \mu E\epsilon + (1 - \mu)E\epsilon_y \dots \dots \dots (68)$

区間 $Y_1 - Y_1'$ では、
 $\sigma = \mu E\epsilon - (1 - \mu)E\epsilon_y \dots \dots \dots (69)$

区間 $Y_1' - Y_2'$ では、
 $\sigma = E\epsilon - (1 - \mu)E(\epsilon_{p2} - \epsilon_y) \dots \dots \dots (70)$

で表わされる。ただし、 $\epsilon_{p1} = \epsilon_{p2} - 2\epsilon_y$ の関係がある。すなわち、一般形で表わすと、
 $\sigma = C\epsilon + \sigma_0 \dots \dots \dots (71)$

となる。断面力に直すと、
 $N_B = -C_{11}\epsilon_{DB} + C_{12}\kappa_P + N_{0B} \dots \dots \dots (72)$

$M_P = -C_{21}\epsilon_{DB} + C_{22}\kappa_P + M_{0B} \dots \dots \dots (73)$

となる。ここに、
 $C_{11} = \int_A C dA, C_{12} = C_{21} = \int_A Cz dA, C_{22} = \int_A Cz^2 dA \dots \dots \dots (74)$

$N_{0B} = -\int_A \sigma_0 dA, M_{0B} = -\int_A \sigma_0 z dA \dots \dots \dots (75)$

である。
 (2) ピン要素間の伝達マトリックス

要素内では、軸力、すなわち、直ひずみが一定であるとする仮定のもとで、ピン要素 i の右断面とピン要素 $i + 1$ の左断面について、式 (72) および (73) より、

$$\epsilon_{DB}^i = -\frac{C_{12}^{iBL}}{D_{BL}^i} N_B^i + \frac{C_{11}^{iBL}}{D_{BL}^i} M_{PR}^i + \epsilon_{BLO}^i \dots \dots \dots (76)$$

$$\kappa_{PR}^i = -\frac{C_{21}^{iBL}}{D_{BL}^i} N_B^i + \frac{C_{11}^{iBL}}{D_{BL}^i} M_{PR}^i + \kappa_{BLO}^i \dots \dots \dots (77)$$

$$\kappa_{PL}^{i+1} = -\frac{C_{21}^{iBR}}{D_{BR}^i} N_B^i + \frac{C_{11}^{iBR}}{D_{BR}^i} M_{PL}^{i+1} + \kappa_{BRO}^i \dots \dots \dots (78)$$

を得る。ここに、
 $D_{BL}^i = C_{11}^{iBL} C_{22}^{iBL} - (C_{12}^{iBL})^2 \dots \dots \dots (79)$

$$D_{BR}^i = C_{11BR}^i C_{22BR}^i - (C_{12BR}^i)^2 \dots\dots\dots (80)$$

$$\epsilon_{BL0}^i = \frac{C_{22BL}^i}{D_{BL}^i} N_{0BL}^i - \frac{C_{12BL}^i}{D_{BL}^i} M_{0BL}^i \dots\dots\dots (81)$$

$$\kappa_{BL0}^i = \frac{C_{21BL}^i}{D_{BL}^i} N_{0BL}^i - \frac{C_{11BL}^i}{D_{BL}^i} M_{0BL}^i \dots\dots\dots (82)$$

$$\kappa_{BR0}^i = \frac{C_{21BR}^i}{D_{BR}^i} N_{0BR}^i - \frac{C_{11BR}^i}{D_{BR}^i} M_{0BR}^i \dots\dots\dots (83)$$

である。式 (11) および (76) より、

$$L_i = l_i(1 - \epsilon_{BL0}^i) - l_i \frac{C_{22BL}^i}{D_{BL}^i} (N_{PR}^i \cos \theta_{BG}^i - Q_{PR}^i \sin \theta_{BG}^i) + l_i \frac{C_{12BL}^i}{D_{BL}^i} M_{PR}^i \dots\dots\dots (84)$$

となる。これより、弾性安定解析の場合と同様に、

$$w_P^{i+1} = w_P^i - l_i(1 - \epsilon_{BL0}^i) \sin \theta_{BG}^i + \frac{l_i}{2} \frac{C_{22BL}^i}{D_{BL}^i} \cdot \{N_{PR}^i \sin 2 \theta_{BG}^i - Q_{PR}^i(1 - \cos 2 \theta_{BG}^i)\} - l_i \frac{C_{12BL}^i}{D_{BL}^i} M_{PR}^i \sin \theta_{BG}^i \dots\dots\dots (85)$$

$$u_P^{i+1} = u_P^i - l_i \{1 - (1 - \epsilon_{BL0}^i) \cos \theta_{BG}^i\} - \frac{l_i}{2} \frac{C_{22BL}^i}{D_{BL}^i} \cdot \{N_{PR}^i(1 + \cos 2 \theta_{BG}^i) - Q_{PR}^i \sin 2 \theta_{BG}^i\} + l_i \frac{C_{12BL}^i}{D_{BL}^i} M_{PR}^i \cos 2 \theta_{BG}^i \dots\dots\dots (86)$$

$$M_{PL}^{i+1} = l_i(1 - \epsilon_{BL0}^i) (N_{PR}^i \sin \theta_{BG}^i + Q_{PR}^i \cos \theta_{BG}^i) - \frac{l_i}{2} \frac{C_{22BL}^i}{D_{BL}^i} \{(N_{PR}^i)^2 \sin 2 \theta_{BG}^i + 2 N_{PR}^i \cdot Q_{PR}^i \cos 2 \theta_{BG}^i - (Q_{PR}^i)^2 \sin 2 \theta_{BG}^i\} + \left\{1 + l_i \frac{C_{12BL}^i}{D_{BL}^i} (N_{PR}^i \sin \theta_{BG}^i + Q_{PR}^i \cos \theta_{BG}^i)\right\} M_{PR}^i \dots\dots\dots (87)$$

$$\theta_{BG}^i = \theta_P^i + \frac{l_i}{2} \frac{C_{21BL}^i}{D_{BL}^i} (N_{PR}^i \cos \theta_{BG}^i - Q_{PR}^i \sin \theta_{BG}^i) - \frac{l_i}{2} \frac{C_{11BL}^i}{D_{BL}^i} M_{PR}^i - \frac{l_i}{2} \kappa_{BL0}^i \dots\dots\dots (88)$$

$$\theta_P^{i+1} = \theta_P^i + \frac{l_i}{2} \left\{ \left(\frac{C_{21BL}^i}{D_{BL}^i} + \frac{C_{21BR}^i}{D_{BR}^i} \right) \cos \theta_{BG}^i - l_i \frac{C_{11BR}^i}{D_{BR}^i} (1 - \epsilon_{BL0}^i) \sin \theta_{BG}^i \right\} N_{PR}^i - \frac{l_i}{2} \left\{ \left(\frac{C_{21BL}^i}{D_{BL}^i} + \frac{C_{21BR}^i}{D_{BR}^i} \right) \cdot \sin \theta_{BG}^i + l_i \frac{C_{11BR}^i}{D_{BR}^i} (1 - \epsilon_{BL0}^i) \cos \theta_{BG}^i \right\} Q_{PR}^i + \frac{l_i^2}{4} \frac{C_{22BL}^i}{D_{BL}^i} \frac{C_{11BR}^i}{D_{BR}^i} \{(N_{PR}^i)^2 \sin 2 \theta_{BG}^i + 2 N_{PR}^i Q_{PR}^i \cos 2 \theta_{BG}^i - (Q_{PR}^i)^2 \sin 2 \theta_{BG}^i\} - \frac{l_i}{2} \left\{ \left(\frac{C_{11BL}^i}{D_{BL}^i} + \frac{C_{11BR}^i}{D_{BR}^i} \right) + l_i \frac{C_{12BL}^i}{D_{BL}^i} \frac{C_{11BR}^i}{D_{BR}^i} \right\} \cdot (N_{PR}^i \sin \theta_{BG}^i + Q_{PR}^i \cos \theta_{BG}^i) \left\} M_{PR}^i$$

$$- \frac{l_i}{2} (\kappa_{BL0}^i + \kappa_{BR0}^i) \dots\dots\dots (89)$$

が得られ、増分形式に直すため Taylor 展開し、高次の項を省略すると、

$$\Delta w_P^{i+1} = \Delta w_P^i - l_i \left\{ (1 - \epsilon_{BL0}^i) \cos \theta_{BG}^i - \frac{C_{22BL}^i}{D_{BL}^i} \cdot (N_{PR}^i \cos 2 \theta_{BG}^i - Q_{PR}^i \sin 2 \theta_{BG}^i) + \frac{C_{12BL}^i}{D_{BL}^i} M_{PR}^i \cos \theta_{BG}^i \right\} \Delta \theta_{BG}^i - l_i \frac{C_{12BL}^i}{D_{BL}^i} \sin \theta_{BG}^i \cdot \Delta M_{PR}^i + \frac{l_i}{2} \frac{C_{22BL}^i}{D_{BL}^i} \sin 2 \theta_{BG}^i \cdot \Delta N_{PR}^i - \frac{l_i}{2} \frac{C_{22BL}^i}{D_{BL}^i} (1 - \cos 2 \theta_{BG}^i) \Delta Q_{PR}^i + \left[-w_P^{i+1} + w_P^i - l_i(1 - \epsilon_{BL0}^i) \sin \theta_{BG}^i + \frac{l_i}{2} \frac{C_{22BL}^i}{D_{BL}^i} \{N_{PR}^i \sin 2 \theta_{BG}^i - Q_{PR}^i(1 - \cos 2 \theta_{BG}^i)\} - l_i \frac{C_{12BL}^i}{D_{BL}^i} M_{PR}^i \sin \theta_{BG}^i \right] \dots\dots\dots (90)$$

が得られ、同様に、 Δu_P^{i+1} , $\Delta \theta_P^{i+1}$, ΔM_{PL}^{i+1} , ΔN_{PL}^{i+1} , ΔQ_{PL}^{i+1} を得ることができる。これらの式に、

$$\Delta \theta_{BG}^i = \left[\Delta \theta_P^i - \frac{l_i}{2} \frac{C_{21BL}^i}{D_{BL}^i} \Delta M_{PR}^i + \frac{l_i}{2} \frac{C_{21BL}^i}{D_{BL}^i} \cos \theta_{BG}^i \Delta N_{PR}^i - \frac{l_i}{2} \frac{C_{21BL}^i}{D_{BL}^i} \sin \theta_{BG}^i \Delta Q_{PR}^i + \left[-\theta_{BG}^i + \theta_P^i + \frac{l_i}{2} \left\{ \frac{C_{21BL}^i}{D_{BL}^i} (N_{PR}^i \cos \theta_{BG}^i - Q_{PR}^i \sin \theta_{BG}^i) - \frac{C_{11BL}^i}{D_{BL}^i} M_{PR}^i - \kappa_{BL0}^i \right\} \right] \right] / \left[1 + \frac{l_i}{2} \frac{C_{21BL}^i}{D_{BL}^i} \cdot (N_{PR}^i \sin \theta_{BG}^i + Q_{PR}^i \cos \theta_{BG}^i) \right] \dots\dots\dots (91)$$

を代入すると、ピン要素の状態量、

$$\Delta V_P = \{\Delta w \quad \Delta u \quad \Delta \theta \quad \Delta M \quad \Delta N \quad \Delta Q \quad 1\} \dots\dots (92)$$

に対するピン要素間の伝達マトリックス F_B を次式の形で得ることができる。

$$F_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & f_{17} \\ 0 & 1 & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} & f_{27} \\ 0 & 0 & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} & f_{37} \\ 0 & 0 & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & f_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & f_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (93)$$

ここに、 f_{ij} は式 (90) 等から得られるマトリックスの要素である。

式 (93) の伝達マトリックスの第 7 列目の項は、修正項であり、Newton 法を用いて非線形連立方程式を解く場合の解の精度の向上を目的とするものである。ある増分ステップの状態量を次の増分ステップの第一次近似解とし、修正項が許容値以下となるまで反復を繰り返す。

これにより、各増分ステップでの計算誤差および誤差の蓄積がかなり改善されるものと思われる。

(3) 荷重マトリックス

荷重として、 x 軸方向荷重 N_L 、 z 軸方向荷重 Q_L 、 y 軸に関する曲げモーメント M_L を考える。これらすべては、ピン要素に作用するものとし、 N_L および Q_L は、それぞれの座標軸の正方向に作用する場合を正、 M_L は、 y 軸の正方向に向かって時計回りに作用する場合を正とする (Fig. 9)。

Fig. 9 のように、ピン要素 i のつり合いを考えると、

$$N_{PR}^i = N_{PL}^i + N_L^i \dots\dots\dots (94)$$

$$Q_{PR}^i = Q_{PL}^i + Q_L^i \dots\dots\dots (95)$$

$$M_{PR}^i = M_{PL}^i + M_L^i \dots\dots\dots (96)$$

が成り立つ。増分形に直すと、

$$\Delta N_{PR}^i = \Delta N_{PL}^i + \Delta N_L^i + (-N_{PR}^i + N_{PL}^i + N_L^i) \dots\dots\dots (97)$$

$$\Delta Q_{PR}^i = \Delta Q_{PL}^i + \Delta Q_L^i + (-Q_{PR}^i + Q_{PL}^i + Q_L^i) \dots\dots\dots (98)$$

$$\Delta M_{PR}^i = \Delta M_{PL}^i + \Delta M_L^i + (-M_{PR}^i + M_{PL}^i + M_L^i) \dots\dots\dots (99)$$

となる。したがって、これをマトリックスで表わすと、

$$\Delta V_{PR}^i = W_P^i \Delta V_{PL}^i \dots\dots\dots (100)$$

の形にまとめられる。ここに、 W_P^i は、

$$W_P^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta M_{PR}^i + (-M_{PR}^i + M_{PL}^i + M_L^i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta N_{PR}^i + (-N_{PR}^i + N_{PL}^i + N_L^i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta Q_{PR}^i + (-Q_{PR}^i + Q_{PL}^i + Q_L^i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (101)$$

となる。

(4) 数値解析例

従来の伝達マトリックス法では、未知量を伝達していくものであるが、ここでは、数値計算における精度の向上を考えて、境界条件式を伝達する手法⁶⁾を採用した。

数値計算例として、一定軸力と繰り返し曲げを受ける単純はり-柱の解析を行った。解析に用いたはり-柱の断面形状および載荷方法を Fig. 9 に示す。本計算例のモデルは文献 2) に用いられたもので、Fig. 8 に示される材料定数として、 $E=2100.0 \text{ tf/cm}^2$ (206 MPa)、 $\mu=1/100$ 、 $\epsilon_y=0.001472$ が用いられている。Fig. 10 には、一定軸力、 $P_0=15.6 \text{ tf}$ (153 kN) と両端に繰り返し等端モーメント

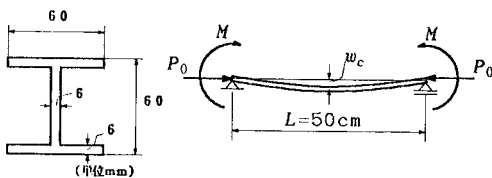


Fig. 9 Dimensions of beam-column.

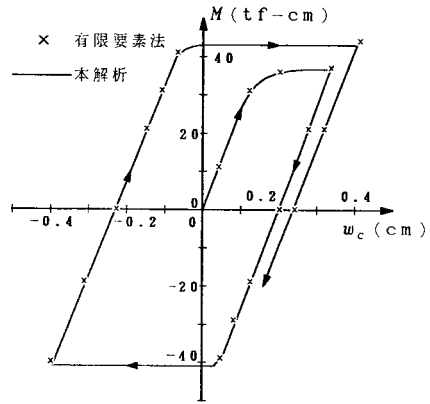


Fig. 10 Numerical results.

トが作用するときの、スパン中央のたわみの本解析法による数値計算結果と文献 2) の有限要素法による数値解が比較して示されており、両者はきわめてよく一致している。また、塑性領域の比較も行ったが、これもよく一致した。

なお、本解析法による数値計算には、要素数は 20 を、また、断面の高さ方向の分割数は 20 (ウェブ部分を 12 層、フランジ部分を 8 層) を用い、重心点評価を行っている。

5. 結 論

はり-柱問題に対して、剛体モデルを用いた伝達マトリックスを誘導し、それを用いて、大たわみ問題および弾塑性解析の数値計算例を示し、十分な精度で数値解が得られることを示した。

これより、本解析法は有限要素法に比較して、定式化が容易であり、計算機の容量も少なくてよく、小型電子計算機の使用において有利である。

本数値解析法における問題点としては、

- (1) 差分を用いているため、要素の分割数によって、解が影響を受ける場合があること、
- (2) 一般の有限要素法でもいえることであるが、増分の取り方によって、解が得られない場合がある。これは、座屈分岐点直後および塑性化がかなり進行した場合のような不安定領域において、解が発散することがある、等である。

以上の点に注意すれば、本解析法により、平面骨組構造物の大たわみ問題、弾塑性問題等の解が、手軽に、十分な精度で得ることができる。

なお、本研究には、金沢大学電子計算機センターの M 170 F を使用した。

参 考 文 献

- 1) 近藤一夫・川井忠彦：低次の形状関数を用いた梁柱の座屈および大撓み問題の有限要素解析，日本造船学会論文集，第142号，pp.197～207，昭和52年。
- 2) 近藤一夫・川井忠彦：塑性安定問題に関する一離散化解析，日本造船学会論文集，第143号，pp.250～256，昭和53年。
- 3) 成岡昌夫・遠田良嘉：伝達マトリックス法，コンピューターによる構造工学講座 I-2-B，培風館，1970。
- 4) 吉田 博・井本芳宏：拘束をうけるはりの弾性および非弾性横倒れ座屈解析，土木学会論文報告集，第208号，pp.1～12，1972年12月。
- 5) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. : Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1961.
- 6) 中村秀治：数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法の提案，土木学会論文報告集，第289号，pp.43～53，1979年9月。

(1984. 9. 25・受付)