【土木学会論文集　第356号／Ⅰ-3　1985年4月】

最小二乗法と媒介関数による有限要素定式化

FINITE ELEMENTS FORMULATION BY THE LEAST SQUARES METHOD AND INTERMEDIARY FUNCTIONS

岩崎峯夫*
By Mineo IWASAKI

In the Galerkin formulation, the trial function is required Cm-1 continuity on element boundaries. To avoid this requirement, the differential equation is integrated by parts. This integration changes the initial differential equation form and the physical meaning of the equation vanishes. The formulation presented here is led by the least squares criterion and intermediary functions. The residuals on element boundaries are formulated by the Gauss' theorem. The formulation belongs to the mixed method in the method of weighted residual. Therefore, the formulation may be available for problems whose functionals have not been found and does not require the Cm-1 continuity. This makes it easy to understand the physical meaning of the formulation.

1. まえがき

有限要素定式化において，重み付き残差法の１つであるガラーキン法は，他の手法に比較して優れた一般性を有している．しかし，重み関数として形状関数を用いることの優位性の根拠については，ガラーキン法に含まれていない．また，ガラーキン法は，要素間で，要素内で成立する支配微分方程式より一次低い微分量の連続性を試験関数に要求する[1]．この連続性が満たされないとき，部分積分を行って式を変形する．この変形は，元の微分方程式の原形を壊すために，定式化の物理的理解を難しくする．この報告の目的は，空間変数に関する有限要素定式化において，物理的理解が容易な定式化法を導出することにある．

2. 離散関数の表現

有限要素法においては，連続関数が最終的に集中量の和によって表わされる離散関数に変換される．この離散関数は，通常の関数で表現できず，δ 関数により表現ができる．

この報告では，説明を簡潔にするために，二次元問題について述べる．

点 $(x_i,\ y_i)$ に集中量 g_i を有す関数 G を δ 関数を用いて次のように表わすことにする．

$$G=g_i\delta_i=\infty\ \text{(点}\ (x_i,\ y_i)\ \text{上で)} \qquad (1)$$

$$G=g_i\delta_i=0\ \text{(点}\ (x_i,\ y_i)\ \text{以外で)} \qquad (2)$$

$$\int_\Omega G d\Omega=\int_\Omega g_i\delta_i d\Omega=g_i \qquad (3)$$

ただし，領域 Ω は，点 $(x_i,\ y_i)$ を含む領域とする．

また，二次元の場合，線上にある量も集中量になる．線 s 上に分布する集中量 g_s を有する関数 G を次のように表わすことにする．

$$G=g_s\delta_s=\infty\ \text{(線}\ s\ \text{上で)} \qquad (4)$$

$$G=g_s\delta_s=0\ \text{(線}\ s\ \text{上以外で)} \qquad (5)$$

$$\int_\Omega G d\Omega=\int_\Omega g_s\delta_s d\Omega=\int_s g_s ds \qquad (6)$$

このように，集中量を δ 関数で表現すると，関数 G は，単位面積当たりの分布量を表わす関数として取り扱える[2]．

したがって，二次元で，n 個の点に集中量を有す離散分布関数を G とすると，次のように表現できる．

$$G=\sum_{i=1}^{n} g_i\delta_i \qquad (7)$$

* 正会員　工修　港湾技術研究所機材部作業船研究室長
（〒239　横須賀市長瀬3-1-1）

3. 任意の分布関数の離散化

解析領域 Ω で，単位面積当たりの量の分布を表わす関数 F が定義されているとする．

関数 F の一般的表現は，次のようになる．

$$F=f(x,\ y)+\sum_{j=1}^{m} r_j\delta_j \cdots\cdots(8)$$

ただし，$f(x,\ y)$ は，連続関数で，m は，集中量の個数とする．r_j は，点 $(x_j,\ y_j)$ での集中量とする．

次に，この関数 F が離散化されて得られる離散関数を式（7）で表わされる関数 G とする．

ただし，関数 G の集中量の位置と数は，後述する媒介関数の選び方によって，自由に定めることができる．

任意の関数 F を直接離散化して，関数 G を求めることは難しい．そこで，離散化の媒介をする関数を用いることにする．この関数を媒介関数とよぶことにする．

媒介関数を用いた離散化は，次のように行う．まず，関数 F に近似な媒介関数 H を求める．次に，関数 G に近似な媒介関数 P を求める．ここで，関数 H と P が一致するなら，関数 F と G が近似であると考える．このようにして，関数 F に近似な離散関数 G を求めることができる．

（1） 媒介関数の表現

媒介関数 H と P を試験関数と同じように，次式で表わすものとする．

$$H=\sum_{i=1}^{e}[N^b]_i\{H\}_i=[N^b]\{H\} \cdots\cdots(9)$$

$$P=\sum_{i=1}^{e}[N^b]_i\{P\}_i=[N^b]\{P\} \cdots\cdots(10)$$

ただし，e は，領域 Ω を分割した要素数で，$[N^b]_i$ は，要素 i の形状関数で，媒介関数のものであることを示すために添字 b を付ける．$[N^b]_i$ は，要素 i の領域外でゼロである．$\{H\}_i$ と $\{P\}_i$ は，要素 i の節点での関数値，$\{H\}$ と $\{P\}$ は，関数 H と P の節点値を節点番号順に並べたものとする．

また，節点数と節点の位置は，離散関数 G の集中量の数と位置に一致するように定めるものとする．

（2） 関数 F と近似な媒介関数 H

関数 H が関数 F に近似するように，節点値 $\{H\}$ を最小二乗法[1),3)]で定めることにする．

領域 Ω での関数 F と関数 H の差の二乗和 II は，次式で与えられる．

$$\mathrm{II}=\int_\Omega([N^b]\{H\}-F)^2 d\Omega \cdots\cdots(11)$$

関数 H を定めるパラメーターが節点値 $\{H\}$ であるので，二乗和 II を $\{H\}$ の各成分で微分し，それをゼロとおくと次式が得られる．

$$\int_\Omega[N^b]^T[N^b]\,d\Omega\{H\}=\int_\Omega[N^b]^T F d\Omega \cdots\cdots(12)$$

式（12）を解くことによって，関数 F と近似な関数 H が求められる．

（3） 関数 G と近似な媒介関数 P

前節と同様な過程によって，式（12）に対応する次式が得られる．

$$\int_\Omega[N^b]^T[N^b]\,d\Omega\{P\}=\int_\Omega[N^b]^T G d\Omega \cdots\cdots(13)$$

式（13）の右辺の節点 k に関する項は，式（7）を用いて，次のように表わされる．

$$\int_\Omega N_k^b\sum_{i=1}^{n} g_i\delta_i d\Omega=g_k \cdots\cdots(14)$$

ただし，N_k^b は，形状関数 $[N^b]$ の節点 k に関する成分で，g_k は，節点 k における集中量である．

式(14)が成立することは，成分 N_k^b の値が節点 k で1，他の節点でゼロであることから明らかである．

したがって，式（13）は，次のようにも表わされる．

$$\int_\Omega[N^b]^T[N^b]\,d\Omega\{P\}=\{G\} \cdots\cdots(15)$$

ただし，$\{G\}$ は，節点集中量を節点番号順に並べたもので，次式で表わされるものである．

$$\{G\}^T=[g_1,\ g_2\cdots\cdots g_i\cdots\cdots g_n] \cdots\cdots(16)$$

式（15）を解くことにより，離散関数 G と近似な関数 P を求めることができる．

（4） 関数 F の離散化

前節で求めた媒介関数 H と P が一致したならば，関数 F と関数 G は，近似であると考えることができる．この一致が成立する条件は，式（12）と式（15）の右辺が一致することであり，次のように与えられる．

$$\int_\Omega[N^b]^T F d\Omega=\{G\} \cdots\cdots(17)$$

このようにして，媒介関数 H と P を媒介として，関数 F と近似な離散関数 G を定めることができる．

したがって，式（17）は，離散化の基本式を与える．

4. 関数 F_1 と関数 F_2 が近似である条件

領域 Ω において，単位面積当たりの量の分布を表わす関数 F_1 と F_2 が定義されていたとする．関数 F_1 と F_2 が近似である条件は，次のように求めることができる．

前章と同様に，F_1 に近似な媒介関数 H と F_2 に近似な媒介関数 P を求める．ここで，関数 H と P が一致するなら，関数 F_1 と F_2 が近似であると考える．

そこで，式（12）の F に F_1 を，式（13）の G に F_2 を代入し，関数 H と P が一致すると，次式が成立する．

$$\int_\Omega[N^b]^T(F_1-F_2)d\Omega=0 \cdots\cdots(18)$$

式（18）は，関数 F_1 と F_2 が近似であるための条件を示している．

また，この式は，式（17）により，関数 F_1 と F_2 に近似な離散関数を求め，それらを G_1 と G_2 とすると，

これらの関数が一致すること，すなわち，次式が成立することを示している．

$\{G_1\}=\{G_2\}$ ……………………………………………(19)

ただし，$\{G_1\}$ と $\{G_2\}$ は，関数 G_1 と G_2 の節点集中量を成分とするものである．

式（18）は，関数 F_1 と F_2 の残差を形状関数 $[N^b]$ の成分を重みとして，各節点に分配し，それをゼロとおくガラーキン法をも示している．したがって，最小二乗法と媒介関数を用いることによって，ガラーキン法の有効性の根拠が説明できる．

5. 有限要素定式化

前章で，領域 Ω において分布する2つの関数 F_1 と F_2 が近似であるための条件を求めた．

そこで，関数 F_1 を正解を与える関数 ϕ から導かれたもので，関数 F_2 を試験関数 ϕ^* から導かれたものとすると，式（18）の両関数が近似になる条件を満足し，関数 ϕ と ϕ^* の一部が一致するなら，関数 ϕ と ϕ^* を近似であると考えることができる．

（1） 閉じた系を形成する関数 F_1

関数 F_1 は，正解である関数 ϕ から導かれたものであり，したがって，正解であり，単位面積当たりの量の分布を表わす関数とする．

正解である分布関数 F_1 は，領域 Ω での解析が領域 Ω の外領域から独立するために，境界 Γ を含む領域 Ω で，力学的表現でいうと，つり合いがとれていなければならない．すなわち，閉じた系でなければならない．このためには，式（20）を満足する必要があり，これにより，境界に分布する量が自動的に導入される．

$$\int_\Omega F_1 d\Omega=0 \quad\cdots\cdots(20)$$

たとえば，F_1 を単位面積当たりの x 方向力の分布を表わす関数であるとすると，式（20）は，x 方向力のつり合いが領域 Ω 内で成立することを示している．

このような閉じた系を形成する分布関数 F_1 は，各種の定理から，いろいろ存在するが，ここでは，ガウスの発散定理をもとにして求めることにする．

領域 Ω とその境界 Γ で，正解である関数 ϕ が分布しており，関数 M，N が ϕ から次のように導かれたものとする．

$M=Lm(\phi)$，$N=Ln(\phi)$ ……………………………(21)

ただし，Lm，Ln は，微分作用素である．

ガウスの発散定理から[4]次の式が得られる．

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)d\Omega=\int_\Gamma(Mm+Nn)d\Gamma \quad\cdots\cdots(22)$$

ただし，$(m,\ n)$ は，境界 Γ 上で外向に引いた法線の方向余弦である．

式（22）を式（6）の δ 関数を用いて表わすと，次式となる．

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}-(Mm+Nn)\delta_\Gamma\right)d\Omega=0 \quad\cdots\cdots(23)$$

式（23）と式（20）の対比により，F_1 を次のように定める．

$$F_1=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}-(Mm+Nn)\delta_\Gamma \quad\cdots\cdots(24)$$

式（24）で示される関数 F_1 が領域 Ω に分布していると閉じた系になる．

次に，領域 Ω を e 個の要素に分割し，要素ごとに式（22）を適用し，同様な操作を行うと，関数 F_1 は，次のようにも表わされる．

$$F_1=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}-\sum_{i=1}^{e}(Mm_i+Nn_i)\delta_{\Gamma_i} \quad\cdots\cdots(25)$$

ただし，δ_{Γ_i} は，要素 i の境界 Γ_i 上の集中量を表わす δ 関数とする．$(m_i,\ n_i)$ は，境界 Γ_i 上で外向に引いた法線の方向余弦である．

（2） 閉じた系を形成する関数 F_2

関数 F_2 は，試験関数 ϕ^* から導かれた単位面積当たりの量の分布を表わす関数とする．また，関数 F_2 は，関数 F_1 と同様に，次式が成立する関数を用いるものとする．

$$\int_\Omega F_2 d\Omega=0 \quad\cdots\cdots(26)$$

試験関数 ϕ^* を次のように表わすものとする．

$$\phi^*=\sum_{i=1}^{e}\phi_i^*=\sum_{i=1}^{e}[N]_i\{\phi^*\}_i=[N]\{\phi^*\} \quad\cdots\cdots(27)$$

ただし，ϕ_i^* は，要素 i の試験関数，$[N]_i$ は，要素 i の形状関数，$\{\phi^*\}_i$ は，要素 i の節点での関数値，$[N]$ は，領域 Ω での形状関数，$\{\phi^*\}$ は，全節点の関数値を節点番号順に並べたものである．

関数 ϕ_i^* に微分作用素 Lm と Ln を作用して得られる関数を次のように表わすものとする．

$M_i^*=Lm(\phi_i^*)$，$N_i^*=Ln(\phi_i^*)$ ……………………(28)

関数 M_i^* と N_i^* は，連続関数であるのでガウスの発散定理から次式が成立する．

$$\int_{\Omega_i}\left(\frac{\partial M_i^*}{\partial x}+\frac{\partial N_i^*}{\partial y}\right)d\Omega_i=\int_{\Gamma_i}(M_i^*m_i+N_i^*n_i)d\Gamma_i \quad\cdots\cdots(29)$$

ただし，Ω_i は，要素 i の領域を表わす．

ここで，次式で表わされる分布関数 F_i を考えると，要素 i において，閉じた系となる．

$$F_i=\frac{\partial M_i^*}{\partial x}+\frac{\partial N_i^*}{\partial y}-(M_i^*m_i+N_i^*n_i)\delta_{\Gamma_i} \quad\cdots\cdots(30)$$

全要素について，このような関数を求め，加え合わせ，それを F_2 とする．

$$F_2=\sum_{i=1}^{e}F_i \quad\cdots\cdots(31)$$

関数 F_2 は，閉じた系となる関数の和であるから，閉じた系となり，式 (26) を満足する．

もし，式 (31) において，要素と要素の境界で，M_i^* と N_i^* で表わされる量が連続している場合は，要素と要素の境界で，式 (30) の第2項にあたる量が互いに消しあい，境界 Γ にのみ現われ，次式で表わされる．

$$F_2=\frac{\partial M^*}{\partial x}+\frac{\partial N^*}{\partial y}-(M^*m+N^*n)\delta_\Gamma \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (32)$$

ただし，$M^*=Lm(\phi^*)$，$N^*=Ln(\phi^*)$ とする．

したがって，M^* と N^* が要素間で連続していないと，式 (32) の表現は，用いることができない．しかし式 (31) の表現を用いると，この連続性が要求されることはない．

(3) 有限要素定式化

前節で求めた関数 F_1 と F_2 が式 (18) を満足するなら，次の各式が得られる．

式 (25) と式 (31) から次式が得られる．

$$\int_\Omega [N^b]^T\Big(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M^*}{\partial x}-\frac{\partial N^*}{\partial y}-\sum_{i=1}^{e}(Mm_i+Nn_i-M_i^*m_i-N_i^*n_i)\delta_{\Gamma_i}\Big)d\Omega=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (33)$$

式 (33) の境界 Γ_i に分布する成分は，境界 Γ_i で発生する境界残差を表わしていると考えることができる．したがって，式 (33) の表現は，要素間の境界残差を考慮したガラーキン法による定式化とも理解できる．

また，式 (24) と式 (31) を用い，δ 関数による表現をやめると，次式が得られる．

$$\sum_{i=1}^{e}\int_{\Omega_i}-[N^b]_i^T\Big(\frac{\partial M_i^*}{\partial x}+\frac{\partial N_i^*}{\partial y}\Big)d\Omega_i+\sum_{i=1}^{e}\int_{\Gamma_i}[N^b]_i^T(M_i^*m_i+N_i^*n_i)d\Gamma_i=-\int_\Omega[N^b]^T\Big(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\Big)d\Omega+\int_\Gamma[N^b]^T(Mm+Nn)d\Gamma \cdots\cdots (34)$$

式 (34) の左辺は，要素ごとに部分積分の定理を用いて変形すると，次式によっても表わされる．

$$\sum_{i=1}^{e}\int_{\Omega_i}\Big(\frac{[N^b]_i^T}{\partial x}M_i^*+\frac{[N^b]_i^T}{\partial y}N_i^*\Big)d\Omega_i \cdots\cdots\cdots (35)$$

この式の表現は，実際の計算に有利である．

ここで，

$$\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}=f \cdots\cdots\cdots\cdots (36)$$

$$Mm+Nn=q \cdots\cdots\cdots\cdots (37)$$

と表わされるものとし，式 (34) に式 (27)，(28)，(36)，(37) を代入すると，最終的に次式が得られる．

$$[K]\{\phi^*\}=-\int_\Omega[N^b]^T f d\Omega+\int_\Gamma[N^b]^T q d\Gamma \cdots\cdots (38)$$

境界 Γ において，Φ が与えられる境界 Γ_r と q が与えられる境界 Γ_n に分ける．境界 Γ_r 上の節点で，ϕ^* に ϕ の節点値を与え，境界 Γ_n 上で，式 (38) の右辺の第2項を与える．このようにして，式 (38) を解くと，未知の $\{\phi^*\}$ が求められる．求められた $\{\phi^*\}$ を式 (38) に代入すると，境界 Γ_r の節点について，式 (38) の右辺の値が求められる．

式 (35) の $[N^b]$ は，媒介関数の形状関数である．したがって，この関数が $\{\phi^*\}$ のパラメーターの個数と同じ元数の連立一次方程式を作れる関数であるかぎり，試験関数の形状関数 $[N]$ と一致する必要はない．しかし，これらの形状関数を異なったものとすることの利点は，特殊な場合以外にはないと思われる．

式 (33)，(34)，(38) が本報告の定式化の基本式である．

(4) 定式化の変形

前節の定式化は，微分方程式と境界条件とも必ずしも満足しない試験関数を用いるものである．

重み付き残差法では，微分方程式は満足するが，境界条件は必ずしも満足しない試験関数を用いる境界法と，境界条件は満足するが，微分方程式は必ずしも満足しない試験関数を用いる内部法がある[5]．

前者の場合には，本定式化は次のようになる．

すべての要素に対し次式を満足する試験関数を選ぶ．

$$\frac{\partial M_i^*}{\partial x}+\frac{\partial N_i^*}{\partial y}=f \cdots\cdots\cdots\cdots (39)$$

すると，式 (34) は，次のように変形できる．

$$\sum_{i=1}^{e}\int_{\Gamma_i}[N^b]_i^T(M_i^*m_i+N_i^*n_i)d\Gamma_i=\int_\Gamma[N^b]^T q d\Gamma \cdots\cdots\cdots\cdots (40)$$

この場合，式 (38) は，次のような形をとる．

$$[K']\{\phi^*\}=\int_\Gamma[N^b]^T q d\Gamma \cdots\cdots\cdots\cdots (41)$$

後者の場合には，本定式化は次のようになる．すなわち，境界 Γ_n で次式が成立するものとする．

$$M^*m+N^*n=q \cdots\cdots\cdots\cdots (42)$$

この条件を式 (34) の定式化に導入するために，式 (34) の両辺から，次式を引くと，最終的に，式 (44)

$$\int_\Gamma[N^b]^T(M^*m+N^*n)d\Gamma \cdots\cdots\cdots\cdots (43)$$

の形をした式が得られる．

$$[K'']\{\phi^*\}=-\int_\Omega[N^b]^T f d\Omega+\int_\Gamma[N^b]^T(q-M^*m-N^*n)d\Gamma \cdots\cdots\cdots\cdots (44)$$

ここで，境界 Γ_r 上の節点で，ϕ^* に ϕ の節点値を与え，境界 Γ_n 上で，式 (44) の右辺第2項をゼロと与える．このようにして，式 (44) を解き，求められた $\{\phi^*\}$ を式 (44) に代入すると，境界 Γ_r の節点について，式 (44) の右辺の値が求められる．

6. 応用例

ここでは，この報告の定式化法によって定式化を行い，この手法がガラーキン法に比べ物理的理解の容易さを有していることを示す．

弾性問題の定式化は，次のようになる．

弾性問題の支配微分方程式は，次の方程式である[6]．

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=-X \quad\cdots\cdots(45)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}=-Y \quad\cdots\cdots(46)$$

式（45）に関して，前述の各式の M に σ_x，N に τ_{xy} を代入すると，次の各式が得られる．

式（24）は，次のようになる．

$$F_1=\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}-(\sigma_x m+\tau_{xy}n)\delta_\Gamma \quad\cdots\cdots(47)$$

弾性力学によれば[6]，$-(\partial\sigma_x/\partial x+\partial\tau_{xy}/\partial y)$ は，領域 Ω 内の点（x, y）で生じる単位面積当たりの x 方向力と理解することができる．また，$(\sigma_x m+\tau_{xy}n)$ は，境界 Γ 上の点（x, y）で生じる単位長さ当たりの x 方向力と理解することができる．

式（47）で表わされる F_1 は，式（23）からわかるように，領域 Ω の範囲だけで x 方向の力の和がゼロとなり，x 方向のつり合いがとれ，領域 Ω の外の領域から独立した分布関数を表わしている．

式（31）は，次のようになる．

$$F_2=\sum_{i=1}^{e}\left(\frac{\partial \sigma^*_{xi}}{\partial x}+\frac{\partial \tau^*_{xyi}}{\partial y}-(\sigma^*_{xi}m_i+\tau^*_{xyi}n_i)\delta_{\Gamma_i}\right) \quad\cdots(48)$$

式（49）を式（48）と同じように考えると，要素 i において x 方向力のつり合いのとれた分布関数があり，関数 F_2 は，これらの関数の和である．したがって，関数 F_2 は，領域 Ω の範囲で，x 方向力のつり合った分布関数である．

そして，関数 F_1 と F_2 が近似であるためには，関数 F_1 と F_2 を式（17）でそれぞれ離散関数に変換し，それらの関数が等しくなる条件式（19）を満足すると考える．すると，式（34）に対応する次式が得られる．

$$\sum_{i=1}^{e}\int_{\Omega i}-[N^b]_i^T\left(\frac{\partial \sigma^*_{xi}}{\partial x}+\frac{\partial \tau^*_{xyi}}{\partial y}\right)d\Omega_i+\sum_{i=1}^{e}\int_{\Gamma i}[N^b]_i^T(\sigma^*_{xi}m_i+\tau^*_{xyi}n_i)d\Gamma_i=-\int_\Omega[N^b]^T\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right)d\Omega+\int_\Gamma[N^b]^T(\sigma_x m+\tau_{xy}n)d\Gamma \quad\cdots\cdots(49)$$

式（49）において，左辺は関数 F_2 と右辺は関数 F_1 に近似な離散関数を表わしている．

式（46）に関しては，前述の各式の N に σ_y，M に τ_{xy} を代入することにより，式（49）に対する同様な式が得られる．

ここで，分布関数 F_2 が導かれる元の試験関数を，次式で表わすとする．

$$u^*=\sum_{i=1}^{e}[N]_i\{u^*\}_i=[N]\{u^*\} \quad\cdots\cdots(50)$$

$$v^*=\sum_{i=1}^{e}[N]_i\{v^*\}_i=[N]\{v^*\} \quad\cdots\cdots(51)$$

ただし，u^* と v^* は，それぞれ，x 方向と y 方向の変位を表わす試験関数である．

σ^*_{xi}，σ^*_{yi}，τ^*_{xyi} をこれらの関数で表わし，式（49）などの式に代入すると最終的に，次式が得られる．

$$[K]\begin{Bmatrix}u^*\\v^*\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\int_\Omega[N]^T Xd\Omega+\int_\Gamma[N]^T q_x d\Gamma\\ \int_\Omega[N]^T Yd\Omega+\int_\Gamma[N]^T q_y d\Gamma\end{bmatrix} \quad\cdots(52)$$

ただし，$q_x=\sigma_x m+\tau_{xy}n$，$q_y=\sigma_y n+\tau_{xy}m$ で，媒介関数の形状関数 $[N^b]$ と試験関数の形状関数 $[N]$ を一致させている．

式（52）は，よく知られた弾性問題の定式化を示している．剛性マトリックス $[K]$ の計算は，式（49）などの表現で行えるが，式（35）の表現の方が簡単である．したがって，物理的解釈は，式（34）の表現で，計算は，式（35）の表現で行うとよい．

次に，次式の微分方程式で表わされる問題を考える．

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial y}=0 \quad\cdots\cdots(53)$$

ガラーキン法によると，試験関数 ϕ^* が境界条件を満足するとして，次式により定式化を行う．

$$\int_\Omega[N]^T\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x}+\frac{\partial \phi^*}{\partial y}\right)d\Omega=0 \quad\cdots\cdots(54)$$

この報告による定式化では，式（45）の場合で，式（32）を用いると次式の定式化の式が得られる．

$$\int_\Omega[N]^T\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x}+\frac{\partial \phi^*}{\partial y}\right)d\Omega=\int_\Gamma[N]^T(q-\phi^*m-\phi^*n)d\Gamma \quad\cdots\cdots(55)$$

ただし，$q=\phi m+\phi n$ で，$[N^b]$ を $[N]$ と一致させている．

境界 Γ_r 上の節点で，ϕ^* に ϕ の節点値を与え，境界 Γ_n 上で，式（55）の右辺をゼロとして，$\{\phi^*\}$ の未知成分を求めるまでは，式（54）と式（55）による計算は全く一致する．しかし，求められた $\{\phi^*\}$ を式（54）に代入すると，境界 Γ_r 上の節点に関する右辺の値は，必ずしもゼロにならず，いわゆる反力にあたる量が求められる．これは，式（55）の右辺で表わされる量であるが，式（54）では，この量が何を意味するか不明である．このような場合でも本定式化が式（20），（26）を満足する条件を用いて定式化しているため正しい結果が得られる．

7. まとめ

ガラーキン法自身の中に，重み関数として形状関数を用いることの優位性の根拠は，含まれていない．この優位性は，汎関数の存在する問題に対して変分法による定式化とガラーキン法によるものが一致することから説明されている[1]．けれども，本定式化においては，最小二乗法と媒介関数によって，その根拠を明らかにしている．

したがって，本定式化は，汎関数の存在しない問題に対しても，この優位性の根拠を与えている.

ガラーキン法による定式化は，要素間の境界で，微分方程式より一次低い微分量が連続である試験関数を要求する. しかし,本定式化では,この要求がされないように，試験関数から導かれる関数が領域 Ω でつり合うようにしている. このために，部分積分の必要がなく，本定式化の基本式は，元の微分方程式の原形をとどめている. また，この報告では，単位面積当たりの分布量などを節点に集中化する離散化の基本式を最小二乗法と媒介関数を用いて求めている.

したがって，微分方程式の導出過程と定式化の基本式および離散化の基本式を併せて考えると，定式化の物理的理解は，容易となる. この報告では，この容易さを，変位法による弾性問題の定式化を例として示している.

また，応力の節点値を変数とし，応力と変位の関係式を用いることによって，いわゆる混合法の定式化も本定式化で導くことができる.

一般に用いられているガラーキン法の定式化では，微分方程式は満足しないが，境界条件を満足する試験関数を用いる内部法によっている. けれども，本定式化は，いずれも満足しない試験関数を用いる重み付き残差法での混合法[7]によって定式化の基本式を求めている. このため，前者では，いわゆる反力の項が何を意味するか不明な場合があるが，後者では，この項の意味が明白である.

以上のことから，この報告に示した定式化は，特に，入門者に理解しやすいものであると思われる.

参 考 文 献

1) Zienkiewicz, O.C.：The Finite Element Method in Engineering Science, 3rd ed., McGraw-Hill, London, 1977.
2) C.R. ワイリー（富久泰明訳）：工業数学（上），ブレイン図書，p.365，1962.
3) 前出 2)，pp.188～191.
4) 鷲津久一郎：エネルギ原理入門，培風館，pp.99～101，1970.
5) 鷲津久一郎ほか：有限要素法ハンドブック（I 基礎編），培風館，p.16，1981.
6) Timoshenko and Goodier：Theory of Elastisity, 2nd ed., McGraw-Hill, Kagakusha, 1951.
7) 前出 5)，p.19.

（1984.8.30・受付）