

# 海中ケーブル構造の波浪応答解析とその計算プログラム

## DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS OF MARINE CABLE STRUCTURE AND ITS COMPUTATIONAL PROGRAM

福元裕彦\*・中西 宏\*\*・波田凱夫\*\*\*

By Hirohiko FUKUMOTO, Hiroshi NAKANISHI and Yoshio NAMITA

A method of numerical analysis for the nonlinear dynamic response of a marine cable structure subject to hydrodynamic forces due to wave motion is presented. An isoparametric trinodal curved finite element, which was previously developed for static large deformation analysis of cable structures, is applied to the discretization of the equations of motion. In the numerical computation hydrodynamic forces due to wave and current acting on a cable member are strictly evaluated in an automatic process by taking into consideration the interaction of motion between water particles and structural members. Brief explanation is given as to the computational program developed on the basis of the present theory for analyzing a deep-water offshore structure comprising skeleton and buoyant members. Numerical examples shown suggest the applicability of the program to practical problems.

### 1. ま え が き

海底資源の開発を目的とする構造物が建造される海域は近年数百メートルの深海にまで及ぶようになり、それに伴って、従来比較的浅い海域で用いられてきたジャケット型構造物に代わり、セミサブ(Semi-Submersible)、TLP(Tension Leg Platform)、ガイドタワー(Guyed Tower)など、いわゆる揺動型の構造物が実用に供されるようになりつつある。

揺動型の構造物では係留索あるいは支索としてケーブルが重要な役割を果たすことが多い。これらのケーブルはそれに作用する外力の変動に応じて極端な弛緩状態から緊張状態に至る多様な変形性状を示し、力学的にはその復元力や剛性に関して強度の非線形性を有している。また解析に際しては、ケーブルに作用する流体力を、構造部材と水粒子との相互作用を考慮した非線形抗力として評価する必要があり、さらに、ケーブルが弛緩・緊張を繰り返すたびに海底に接触したり、海中に浮上したりするという複雑な境界条件を考慮せねばならない。

本研究は、このような構造特性をもつケーブルあるいはケーブル・システムが波浪などに変動外力を受けるときの時刻歴応答を解析し、さらに実用計算に耐えるプログラムを組み立てることを目的としたものである。

著者らはすでに曲線要素を用いた有限要素法によるケーブル構造の静的大変形解析について報告している(文献1))。本文では、その中で提案された3節点アイソパラメトリック曲線ケーブル要素を時間領域での動的応答解析用に拡張すべく定式化を行っている。

有限要素法に基づく海中ケーブル構造の解析についてはすでにかなりの研究がみられ、文献2), 3), 4), 5), 6)などがその代表的なものと思われる。これらのうちで曲線要素を用いているものには、離散化したカテナリー理論に基づくPeyrot<sup>5)</sup>と4節点要素を用いた仮想仕事の原理から動的つり合い式を導くLoおよびLeonard<sup>6)</sup>の研究がある。前者は海底との接触問題を比較的容易に扱え、流体力を分布荷重また付加質量力を節点集中荷重として取り扱っている。後者は三次の変位関数を使って定式化を行っているのに対し、著者らは文献1)に示すように3節点要素を用い、二次の変位関数により、三次式の場合と同程度の精度のよい解を得る。もちろん、ここでは流体力および付加質量力は分布荷重として取り扱う。

\* 正会員 工修 神戸製鋼所機械研究所

(〒651 神戸市中央区脇浜町1-3-18)

\*\* 正会員 工博 神戸製鋼所機械研究所主任研究員(同上)

\*\*\* 正会員 工博 神戸製鋼所機械研究所主任研究員(同上)

本文では、文献1)の3節点曲線要素を用いて、モリソン式に基づく流体力による節点力ベクトル、付加質量行列および減衰力の係数行列を定式化し、これによって海中ケーブルの運動方程式を離散化し、これを直接数値積分法によって解く。また、この曲線要素のほかに通常のトラス、フレーム要素等を併せ用いて、任意の海中骨組構造物の動的応答解析プログラムを作成している。若干の数値計算例によって本文の手法の精度や実用性を検討している。

2. 基礎方程式

(1) 流体力と運動方程式

ここでは、Morison<sup>7)</sup>の式に基づいて流体力を表現する。水粒子と構造物との相互作用を考慮する場合、部材の微小長さ  $ds$  に作用する流体力  $dF$  は、粘性抗力(部材の法線方向成分および接線方向成分)と流体慣性力の和として、

$$dF = \frac{1}{2} \rho C_{DN} D (v_n - \dot{x}_n) |v_n - \dot{x}_n| ds + \frac{1}{2} \rho C_{DT} D (v_t - \dot{x}_t) |v_t - \dot{x}_t| ds + \rho C_M \frac{\pi}{4} D^2 \ddot{v}_n ds - \rho C_{AM} \frac{\pi}{4} D^2 \ddot{x}_n ds \dots\dots(1)$$

と表わされる。ここに、 $\rho$ ：水の密度、 $D$ ：部材の外径、 $C_{DN}$ ：部材法線方向の抵抗係数、 $C_{DT}$ ：部材接線方向の抵抗係数、 $C_M$ ：慣性力係数、 $C_{AM}$ ：付加質量係数、 $v_n$  および  $\dot{v}_n$ ：水粒子の速度および加速度の部材法線方向成分、 $v_t$ ：水粒子速度の部材接線方向成分、 $\dot{x}_n$  および  $\ddot{x}_n$ ：部材の速度および加速度の部材法線方向成分、 $\dot{x}_t$ ：部材速度の部材接線方向成分を示す。以下の解析では、式(1)の右辺第4項(付加質量成分)は運動方程式の中では付加質量による慣性力として取り扱う。したがって以下においては、流体力は式(1)の第4項を除いた形で記述される。

次に流体中の構造物に関する時間領域での応答解析の基礎式を有限要素で離散化された系について書き表わすと、

$$(M + M_a)\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F \dots\dots(2)$$

となる。ここに、 $M$ ：構造物の質量行列、 $M_a$ ：付加質量行列、 $C$ ：構造減衰の係数行列(本文ではRayleigh減衰を考えている)、 $K$ ：剛性行列、 $F$ ：流体力ベクトル、 $x$ ：節点変位ベクトル、 $\dot{x}$  および  $\ddot{x}$ ：それぞれ節点速度および加速度ベクトルである。

(2) 運動方程式の数値積分

本文では、式(2)を直接数値積分するのにWillson<sup>8)</sup>の $\theta$ 法を適用する。

そのため、まず式(2)を時間  $t$  に関する増分形

$$(M + M_a)\ddot{x}^{t+\Delta t} + C\dot{x}^{t+\Delta t} + K\Delta x = F^{t+\Delta t} - R^t \dots\dots(3)$$

に書き改める。ここに、 $\Delta t$ ：数値積分の時間間隔で、各項の諸量に付された添字はそれらの量が評価されるべき時刻を表わす。また  $\Delta x$  は変位増分で、

$$\Delta x = x^{t+\Delta t} - x^t$$

である。さらに、 $R^t$  は時刻  $t$  において評価された部材要素内力に基づく節点力ベクトルである。

ここで、流体力  $F$  には節点速度に関する量が含まれていることを考慮して、式(3)を

$$(M + M_a)\ddot{x}^{t+\Delta t} + (C + D_c^{t+\Delta t})\dot{x}^{t+\Delta t} + K\Delta x = \bar{F}^{t+\Delta t} - R^t \dots\dots(4)$$

と書きかえる。ここに、

$$\bar{F} = F - D_c \dot{x} \quad (\text{添字省略}) \dots\dots(5)$$

である。 $D_c^{t+\Delta t}$  は流体による減衰力の係数行列であり、

$$D_c^{t+\Delta t} = [\partial F / \partial \dot{x}]^{t+\Delta t} \dots\dots(6)$$

で計算される。

式(4)を直接数値積分するのに、Willsonの $\theta$ 法の所論に従い、時刻  $t + \tau$  における速度と加速度を時刻  $t$  における値を用いて、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^{t+\tau} &= a_0 \Delta x - a_2 \dot{x}^t - a_3 \ddot{x}^t \\ \ddot{x}^{t+\tau} &= a_1 \Delta x - a_4 \dot{x}^t - a_5 \ddot{x}^t \end{aligned} \right\} \dots\dots(7)$$

と書き表わす。ここに、 $\tau = \theta \Delta t$  で、 $\theta$  は問題の性質によって適宜設置される定数である(通常  $\theta = 1.4$  とされる)。また  $a_0 \sim a_5$  は  $\tau$  に関する定数で、

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 6/\tau^2, \quad a_1 = 3/\tau, \quad a_2 = 12/\tau^2 \\ a_3 &= 2, \quad a_4 = 2, \quad a_5 = \tau/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

である。

式(7)を式(4)に代入することにより、変位増分  $\Delta x$  に関する連立方程式

$$\begin{aligned} \bar{K} \Delta x &= \hat{F}^{t+\tau} \dots\dots(9) \\ \bar{K} &= K^t + a_0(M + M_a) + a_1(C + D_c^{t+\Delta t}) \\ \hat{F} &= \bar{F}^t + \theta(\bar{F}^{t+\Delta t} - \bar{F}^t) + (M + M_a)(a_2 \dot{x}^t + a_3 \ddot{x}^t) \\ &\quad + (C + D_c^{t+\Delta t})(a_4 \dot{x}^t + a_5 \ddot{x}^t) - R^t \end{aligned}$$

を得る。式(9)によって  $\Delta x$  が、式(7)によって  $\dot{x}^{t+\tau}$  および  $\ddot{x}^{t+\tau}$  が決定される。さらに、線形内挿によって  $\dot{x}^{t+\Delta t}$ 、 $\ddot{x}^{t+\Delta t}$  が得られる。

次に、上記のようにして得られた変位増分  $\Delta x$  の線形化による誤差を小さくするため、 $\Delta x$  を求めたと同様の手順で修正変位増分  $\Delta^2 x$  を求め、 $\Delta x$  を修正してゆく。この反復計算は  $\Delta^2 x$  が許容値以下に達するまで続けられる。

3. 曲線ケーブル要素による定式化

(1) 質量行列

図一1は文献1)で提案された3節点アイソパラメトリック曲線要素である。要素  $m$  の質量行列  $M_m$  は一般に、

$$M_m = \int_{-1}^1 NA\rho_s N^T d\xi \quad (\xi \text{ は正規座標系}) \dots\dots (10)$$

で与えられる。ここに、 $\rho_s$  は密度、 $A$  は要素の断面積（一定）、 $N$  は形状関数で、

$$N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]$$

$$= \left[ \frac{1}{2} \xi(\xi-1) - \xi^2 + 1 \quad \frac{1}{2} \xi(\xi+1) \right] \dots\dots (11)$$

である<sup>1)</sup>。式 (10) を具体的に計算すると、

$$M_m = \rho_s A \times$$

$M_{11}$							
0	$M_{11}$						
0	0	$M_{11}$					Sym.
$M_{21}$	0	0	$M_{22}$				
0	$M_{21}$	0	0	$M_{22}$			
0	0	$M_{21}$	0	0	$M_{22}$		
$M_{31}$	0	0	$M_{32}$	0	0	$M_{33}$	
0	$M_{31}$	0	0	$M_{32}$	0	0	$M_{33}$
0	0	$M_{31}$	0	0	$M_{32}$	0	$M_{33}$

.....(12)

$$M_{in} = \int_{-1}^1 N_i N_n d\xi \quad (l, n=1, 2, 3)$$

$$J = \{(N'X_m)^2 + (N'Y_m)^2 + (N'Z_m)^2\}^{1/2}$$

(( )' = d/d\xi)

$$X_m = [X_1 \quad X_2 \quad X_3]^T, \quad Y_m = [Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3]^T$$

$$Z_m = [Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3]^T$$

となる。ここに、 $X_m$  等は節点座標値ベクトルである。

(2) 要素の接線剛性行列

文献 1) に接線剛性行列を求める一般式が示されているので、ここではその結果のみを要約する。

いま、要素の接線剛性行列  $K_m$  (9×9) を構成する 1 つの成分を取り上げたと、

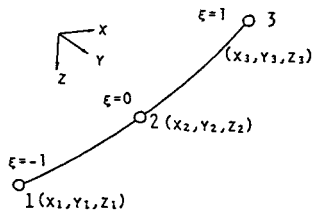


図-1 曲線ケーブル要素

その成分が位置する行および列の構造自由度がそれぞれ  $l$  節点の  $X$  方向および  $n$  節点の  $X$  方向にあるならば、この成分を  $K_m(X_l, X_n)$  と書く。このとき、 $K_m(X_l, X_n)$  は、

$$K_m(X_l, X_n) = A \int_{-1}^1 (\sigma_0 + E\varepsilon) \frac{N_l' N_n'}{J^*} d\xi$$

$$+ A \int_{-1}^1 \left\{ \frac{E}{J} - \frac{\sigma_0 + E\varepsilon}{J^*} \right\} \frac{N_l' N_l' X_m^*}{J^*} \cdot \frac{N_n' N_n' X_m^*}{J^*} d\xi$$

(  $l, n=1, 2, 3$  ).....(13)<sub>1</sub>

と書き表わされる。同様に、列の自由度が  $n$  節点の  $Y$  方向、 $Z$  方向にあるならば、

$$K_m(X_l, Y_n) = A \int_{-1}^1 \left\{ \frac{E}{J} - \frac{\sigma_0 + E\varepsilon}{J^*} \right\}$$

$$\times \frac{N_l' N_l' X_m^*}{J^*} \cdot \frac{N_n' N_n' Y_m^*}{J^*} d\xi \dots\dots (13)_2$$

$$K_m(X_l, Z_n) = A \int_{-1}^1 \left\{ \frac{E}{J} - \frac{\sigma_0 + E\varepsilon}{J^*} \right\}$$

$$\times \frac{N_l' N_l' X_m^*}{J^*} \cdot \frac{N_n' N_n' Z_m^*}{J^*} d\xi \dots\dots (13)_3$$

以下、同様にして  $K_m$  の非零成分が計算される。

$$K_m(Y_l, Y_n) = A \int_{-1}^1 (\sigma_0 + E\varepsilon) \frac{N_l' N_n'}{J^*} d\xi$$

$$+ A \int_{-1}^1 \left\{ \frac{E}{J} - \frac{\sigma_0 + E\varepsilon}{J^*} \right\} \frac{N_l' N_l' Y_m^*}{J^*} \cdot \frac{N_n' N_n' Y_m^*}{J^*} d\xi$$

$$K_m(Z_l, Z_n) = A \int_{-1}^1 (\sigma_0 + E\varepsilon) \frac{N_l' N_n'}{J^*} d\xi$$

$$+ A \int_{-1}^1 \left\{ \frac{E}{J} - \frac{\sigma_0 + E\varepsilon}{J^*} \right\} \frac{N_l' N_l' Z_m^*}{J^*} \cdot \frac{N_n' N_n' Z_m^*}{J^*} d\xi$$

$$K_m(Y_l, Z_n) = A \int_{-1}^1 \left\{ \frac{E}{J} - \frac{\sigma_0 + E\varepsilon}{J^*} \right\} \frac{N_l' N_l' Y_m^*}{J^*}$$

$$\times \frac{N_n' N_n' Z_m^*}{J^*} d\xi \dots\dots (13)_{4-6}$$

ここに、 $E$  はヤング率、 $\sigma_0$  は初期応力 ( $\xi$  に関する数値積分点での値) であり、また、

$$J^* = \{(N'X_m^*)^2 + (N'Y_m^*)^2 + (N'Z_m^*)^2\}^{1/2}$$

$$\varepsilon = J^*/J - 1$$

$$X_m^* = [X_1^* \quad X_2^* \quad X_3^*]^T, \quad Y_m^* = [Y_1^* \quad Y_2^* \quad Y_3^*]^T$$

$$Z_m^* = [Z_1^* \quad Z_2^* \quad Z_3^*]^T$$

である。 $X_m^*$  等は変形後の節点の座標値を表わす。

(3) 部材応力に基づく節点力ベクトル

文献 1) の所論により、 $l$  節点における  $X, Y, Z$  方向の要素内力に基づく節点力  $R_{lx}, R_{ly}, R_{lz}$  はそれぞれ、

$$R_{lx} = A \int_{-1}^1 |\sigma_0 + E\varepsilon| \frac{N_l' N_l' X_m^*}{J^*} d\xi$$

$$R_{ly} = A \int_{-1}^1 |\sigma_0 + E\varepsilon| \frac{N_l' N_l' Y_m^*}{J^*} d\xi$$

$$R_{lz} = A \int_{-1}^1 |\sigma_0 + E\varepsilon| \frac{N_l' N_l' Z_m^*}{J^*} d\xi$$

(  $l=1, 2, 3$  )

.....(14)

と書き表わされる。ただし、部材は非抗圧性であるので、数値計算上、軸力が負になれば  $\sigma_0 + E\varepsilon$  を 0 とおく。

(4) 分布流体力に基づく節点力ベクトル

いま、部材の断面形状が波の波長に比べて十分小さいと仮定し、式 (1) のモリソン式 (右辺第 4 項を除く) に基づき、分布流体力による節点力ベクトル  $F_l$  ( $l=1, 2, 3$ : 図-1 における節点番号) を求める。

図-1 に示すような正規座標系  $\xi$  を用いて、要素内任意点での変位  $\bar{x}$ 、速度  $\dot{\bar{x}}$ 、加速度  $\ddot{\bar{x}}$  を節点におけるそれぞれの値で補間し、

$$\bar{x} = Bx, \quad \dot{\bar{x}} = B\dot{x}, \quad \ddot{\bar{x}} = B\ddot{x}$$

$$B = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(15)$$

と書き表わす。ここに、 $N_1, N_2, N_3$  は形状関数で、

$$N_1 = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi), \quad N_2 = 1 - \xi^2, \quad N_3 = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)$$

である。また、

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \ddot{x} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix}$$

で、 $x_l, \dot{x}_l, \ddot{x}_l (l=1, 2, 3)$  はそれぞれ節点  $l$  における変位、速度および加速度の列ベクトルである。

さて、変形後の要素  $m$  において要素上の任意点での単位接線ベクトル  $e_t$  を書き表わすと、

$$e_t = [N'X_m^*/J^* \quad N'Y_m^*/J^* \quad NZ_m^*/J^*]$$

となる。次に、要素上の任意点における水粒子と要素との相対速度  $u_r(\xi)$  および水粒子の加速度  $\dot{u}(\xi)$  を同様に式 (15) の補間関数  $B$  を用いて節点での値で書き表わし、

$$u_r(\xi) = Bv_r, \quad \dot{u}(\xi) = B\dot{v}_r \dots\dots\dots(16)$$

とする。ここに、 $v_r$  および  $\dot{v}_r$  はそれぞれ要素節点 (1, 2, 3) での相対速度および水粒子の加速度ベクトルで、

$$v_r = \begin{bmatrix} v_{r1} \\ v_{r2} \\ v_{r3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - \dot{x}_1 \\ v_2 - \dot{x}_2 \\ v_3 - \dot{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{v}_r = \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{bmatrix}$$

と書かれる。ここに、 $v_l$  および  $\dot{v}_l (l=1, 2, 3)$  は節点  $l$  における水粒子の速度および加速度の列ベクトルである。要素と水粒子との相対速度を要素法線方向の成分と接線方向の成分に分け、それぞれ  $u_{rn}(\xi), u_{rt}(\xi)$  とすると、

$$\left. \begin{aligned} u_{rn}(\xi) &= u_r(\xi) - (u_r(\xi) \cdot e_t)e_t \\ u_{rt}(\xi) &= (u_r(\xi) \cdot e_t)e_t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

なる関係がある。同様に、水粒子の加速度の要素法線方向成分  $\dot{u}_n(\xi)$  は、

$$\dot{u}_n(\xi) = \dot{u}(\xi) - (\dot{u}(\xi) \cdot e_t)e_t \dots\dots\dots(18)$$

となる。これらを式 (1) に代入し、形状関係を乗じた後、要素全長にわたって積分すると、節点 1, 2, 3 における分布流体力に基づく節点力  $F_1, F_2, F_3$  が得られる。

$$\begin{aligned} F_l &= \int_{-1}^1 N_l dF_l \\ &= \frac{1}{2} \rho C_{DN} D \int_{-1}^1 N_l u_{rn}(\xi) |u_{rn}(\xi)| J^* d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho C_{DT} D \int_{-1}^1 N_l u_{rt}(\xi) |u_{rt}(\xi)| J^* d\xi \\ &\quad + \rho C_M \frac{\pi}{4} D^2 \int_{-1}^1 N_l \dot{u}_n(\xi) J^* d\xi \end{aligned} \dots\dots\dots(19)$$

( $l=1, 2, 3$ )

(5) 分布付加質量行列

前節と同様にして、式 (1) の右辺第 4 項に基づき、節点  $l (l=1, 2, 3)$  での付加質量力  $F_{al}$  を求めると、

$$F_{al} = \rho C_{AM} \frac{\pi}{4} D^2 \int_{-1}^1 N_l |\ddot{x} - (\ddot{x} \cdot e_t)e_t| J^* d\xi$$

となる。要素  $m$  の付加質量行列  $M_{am}$  は上式を要素節点加速度  $\ddot{x}$  で偏微分することにより得られる。すなわち、

$$M_{am} = \int_{-1}^1 B^T D_e B J^* d\xi \dots\dots\dots(20)$$

$$D_e = \rho C_{AM} \frac{\pi}{4} D^2 (E - e_t e_t^T)$$

である ( $E$  は  $3 \times 3$  の単位行列)。

(6) 流体による減衰力の係数行列

流体による減衰力係数行列  $D_{cm}$  は式 (6) と式 (19) より、

$$\begin{aligned} D_{cm} &= \begin{bmatrix} \partial F_1 / \partial \dot{x}_1 & \partial F_1 / \partial \dot{x}_2 & \partial F_1 / \partial \dot{x}_3 \\ \partial F_2 / \partial \dot{x}_1 & \partial F_2 / \partial \dot{x}_2 & \partial F_2 / \partial \dot{x}_3 \\ \partial F_3 / \partial \dot{x}_1 & \partial F_3 / \partial \dot{x}_2 & \partial F_3 / \partial \dot{x}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D_{c11} & D_{c12} & D_{c13} \\ D_{c21} & D_{c22} & D_{c23} \\ D_{c31} & D_{c32} & D_{c33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $D_{c1n} (l, n=1, 2, 3)$  はそれぞれ、

$$\begin{aligned} D_{c1n} &= \frac{1}{2} \rho C_{DN} D \int_{-1}^1 N_l N_n |u_{rn}(\xi)| (E - e_t e_t^T) \\ &\quad + u_{rn}(\xi) u_{rn}(\xi)^T / |u_{rn}(\xi)| J^* d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho C_{DT} D \int_{-1}^1 N_l N_n |u_{rt}(\xi)| (e_t e_t^T) \\ &\quad + u_{rt}(\xi) u_{rt}(\xi)^T / |u_{rt}(\xi)| J^* d\xi \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

で与えられる。上式の右辺第 1 項は要素法線方向の粘性抵抗力による減衰係数を、また第 2 項は接線方向の抵抗力による減衰係数を示している。

4. その他の要素

前記の曲線ケーブル要素のほかに、後述の数値計算に用いた要素について簡単に説明する。

(1) トラス要素 (直線ケーブル要素)

図-2 に示すトラス要素について、節点の流体力ベクトル、付加質量行列および流体による減衰力係数行列を示す。直線要素に関するこれらの量の定式過程は文献 2) などにも示されるが、前記の曲線要素に関する所論によ

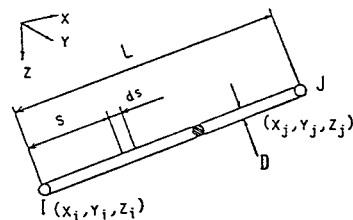


図-2 トラス要素

り、容易に誘導される。

流体力に基づく節点力  $F_i$  および  $F_j$  は、

$$\begin{aligned}
 F_i &= \frac{1}{2} \rho C_{DN} D \int_0^L \left(1 - \frac{S}{L}\right) \mathbf{u}_{rn}(s) | \mathbf{u}_{rn}(s) | ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho C_{DT} D \int_0^L \left(1 - \frac{S}{L}\right) \mathbf{u}_{rt}(s) | \mathbf{u}_{rt}(s) | ds \\
 &\quad + \rho C_M \frac{\pi}{4} D^2 \int_0^L \left(1 - \frac{S}{L}\right) \dot{\mathbf{u}}_n(s) ds \\
 F_j &= \frac{1}{2} \rho C_{DN} D \int_0^L \frac{S}{L} \mathbf{u}_{rn}(s) | \mathbf{u}_{rn}(s) | ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho C_{DT} D \int_0^L \frac{S}{L} \mathbf{u}_{rt}(s) | \mathbf{u}_{rt}(s) | ds \\
 &\quad + \rho C_M \frac{\pi}{4} D^2 \int_0^L \frac{S}{L} \dot{\mathbf{u}}_n(s) ds
 \end{aligned} \tag{23}$$

と表わされる。ここに、 $\mathbf{u}_{rn}(s)$  および  $\mathbf{u}_{rt}(s)$  はそれぞれ水粒子と要素との相対速度の部材法線方向成分および接線方向成分、 $\dot{\mathbf{u}}_n(s)$  は水粒子の加速度の部材法線方向成分である。また、 $L$  は要素長さ、 $S$  は節点  $i$  から測った座標である。

付加質量行列  $M_{am}$  および流体減衰力係数行列  $D_{cm}$  は式 (6) と式 (23) より、それぞれ、

$$M_{am} = \frac{\pi}{12} \rho C_{AM} D^2 L \begin{bmatrix} \mathbf{E}_i & 0.5 \mathbf{E}_i \\ 0.5 \mathbf{E}_i & \mathbf{E}_i \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E} - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T$$

$$\begin{aligned}
 D_{cm} &= \frac{1}{2} \rho C_{DN} D \int_0^L \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{S}{L}\right) A_n & \frac{S}{L} \left(1 - \frac{S}{L}\right) A_n \\ \frac{S}{L} \left(1 - \frac{S}{L}\right) A_n & \left(1 - \frac{S}{L}\right) A_n \end{bmatrix} ds \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho C_{DT} D \int_0^L \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{S}{L}\right) A_r & \frac{S}{L} \left(1 - \frac{S}{L}\right) A_r \\ \frac{S}{L} \left(1 - \frac{S}{L}\right) A_r & \left(1 - \frac{S}{L}\right) A_r \end{bmatrix} ds
 \end{aligned} \tag{25}$$

で表わされる。ここに、

$$A_n = | \mathbf{u}_{rn}(s) | ( \mathbf{E} - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T ) + \mathbf{u}_{rn}(s) \mathbf{u}_{rn}(s)^T / | \mathbf{u}_{rn}(s) |$$

$$A_r = | \mathbf{u}_{rt}(s) | \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T + \mathbf{u}_{rt}(s) \mathbf{u}_{rt}(s)^T / | \mathbf{u}_{rt}(s) |$$

で、 $\mathbf{E}$  は  $3 \times 3$  の単位行列、 $\mathbf{e}_i$  は要素接線方向の単位ベクトルである。

(2) フレーム要素

図-3の直線フレーム要素について式 (1) より節点における流体力ベクトル  $\mathbf{F}$  を計算すると、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \frac{1}{2} \rho C_{DN} D L \mathbf{R}^T \int_0^1 \mathbf{B}_i^T \bar{\mathbf{u}}_{rn} | \bar{\mathbf{u}}_{rn} | d\xi \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho C_{DT} D L \mathbf{R}^T \int_0^1 \mathbf{B}_i^T \bar{\mathbf{u}}_{rt} | \bar{\mathbf{u}}_{rt} | d\xi \\
 &\quad + \rho C_M \frac{\pi}{4} D^2 L \mathbf{R}^T \int_0^1 \mathbf{B}_i^T \dot{\bar{\mathbf{u}}}_n d\xi
 \end{aligned} \tag{26}$$

となる。ここに、 $\mathbf{R}$  は座標変換行列 ( $12 \times 12$ ) であり、

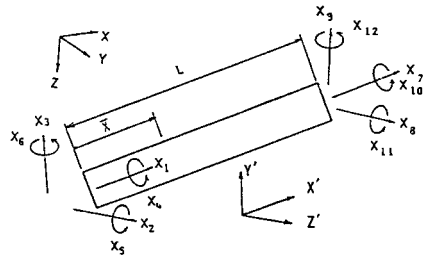


図-3 フレーム要素

また  $\xi = \bar{X}/L$  である。 $\mathbf{B}_F$  は要素上任意点の部材座標系での速度  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}$  と加速度  $\ddot{\bar{\mathbf{x}}}$  を、節点における変形速度  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}$  と変形の加速度  $\ddot{\bar{\mathbf{x}}}$  とに関係づけるための補間関数で、式 (27) で表わされる。

$$\mathbf{B}_F = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & N_5 & 0 & 0 & -N_6 \\ 0 & 0 & N_2 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & 0 & N_5 & N_6 & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 1 - \xi & N_4 &= \xi \\
 N_2 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & N_5 &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\
 N_3 &= (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L & N_6 &= (\xi^2 - \xi^3)L
 \end{aligned}$$

$$(\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{B}_F \dot{\bar{\mathbf{x}}}, \quad \ddot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{B}_F \ddot{\bar{\mathbf{x}}})$$

$\bar{\mathbf{u}}_{rn}$  と  $\bar{\mathbf{u}}_{rt}$  はそれぞれ部材座標系での水粒子と要素との相対速度の要素法線方向および接線方向の成分であり、また  $\dot{\bar{\mathbf{u}}}_n$  は水粒子の加速度の要素法線方向成分である。水粒子の速度と加速度が要素軸に沿って直線的に変化する時、部材座標系での水粒子と要素との相対速度  $\bar{\mathbf{u}}_r$  と水粒子の加速度  $\bar{\mathbf{u}}$  は、

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{u}}_r &= \mathbf{R}^T [(1 - \xi) \mathbf{u}_i + \xi \mathbf{u}_j] - \dot{\bar{\mathbf{x}}} = | \bar{u}_{r1} \quad \bar{u}_{r2} \quad \bar{u}_{r3} |^T \\
 \dot{\bar{\mathbf{u}}} &= \mathbf{R}^T [(1 - \xi) \dot{\mathbf{u}}_i + \xi \dot{\mathbf{u}}_j] = | \dot{\bar{u}}_1 \quad \dot{\bar{u}}_2 \quad \dot{\bar{u}}_3 |^T
 \end{aligned} \tag{28}$$

と書き表わされる。ここに、 $\mathbf{u}_i$  および  $\dot{\mathbf{u}}_i$  ( $i, j$ ) はそれぞれ節点  $i$  での水粒子の速度および加速度を表わし、 $\mathbf{R}$  は全体座標系から部材座標系への変換行列である。式 (28) を用いて

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{u}}_{rn} &= | 0 \quad \bar{u}_{r2} \quad \bar{u}_{r3} |, \quad \bar{\mathbf{u}}_{rt} = | \bar{u}_{r1} \quad 0 \quad 0 | \\
 \dot{\bar{\mathbf{u}}}_n &= | 0 \quad \dot{\bar{u}}_2 \quad \dot{\bar{u}}_3 |
 \end{aligned} \tag{29}$$

が得られる。

次に、付加質量行列および流体減衰力係数行列はそれぞれ、式 (6) および式 (26) より、

$$M_{am} = \frac{\pi}{4} \rho C_{AM} D^2 L \mathbf{R}^T \left( \int_0^1 \mathbf{B}_i^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{B}_i d\xi \right) \mathbf{R} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 D_{cm} &= \frac{1}{2} \rho C_{DN} L D \mathbf{R}^T \left( \int_0^1 \mathbf{B}_i^T G_n \mathbf{B}_i d\xi \right) \mathbf{R} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \rho C_{DT} L D \mathbf{R}^T \left( \int_0^1 \mathbf{B}_i^T G_r \mathbf{B}_i d\xi \right) \mathbf{R}
 \end{aligned} \tag{31}$$

と表わされる。ここに、

$$G_N = \frac{1}{|\bar{u}_{rn}|} \bar{u}_{rn} \bar{u}_{rn}^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u}_{rn} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u}_{rn} \end{bmatrix}$$

$$G_T = \frac{1}{|\bar{u}_{rt}|} \bar{u}_{rt} \bar{u}_{rt}^T + \begin{bmatrix} \bar{u}_{rt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である。

### 5. 海洋構造物の波浪応答の数値計算プログラム

前章までの所論に基づき、任意の海中骨組構造物の動的応答を計算するためのプログラムを作成した。

図-4 は計算の流れを示す。ここでは、構造物を構成する要素について、その法線および接線方向の抵抗係数および慣性力係数を与えるだけで、水粒子と要素との相互作用を考慮した流体力が自動的に計算される。その際、抵抗力の評価において通常なされるような線形近似は一切行わない。境界条件としては、回転・固定・ばね支持

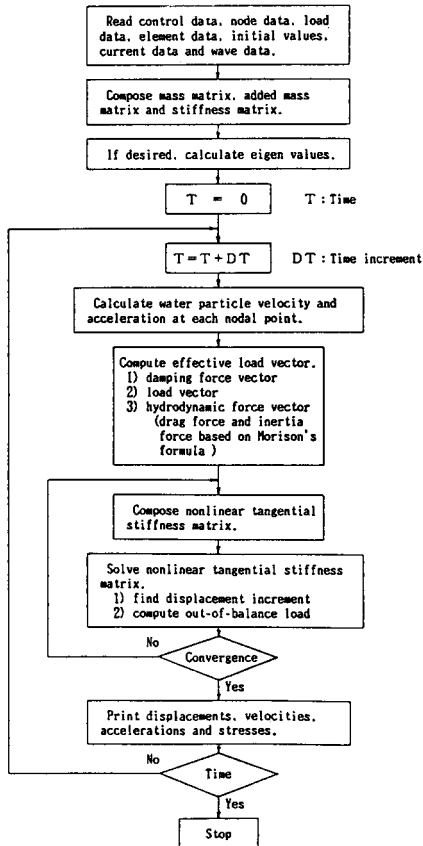


図-4 計算のフローチャート

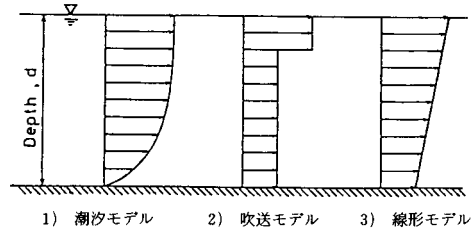


図-5 潮流の流速分布パターン

など通常のものほかにケーブルの着地、浮上といった一種の接触問題も取り扱えるようになっている。

運動方程式を直接数値積分するとき、各時刻ステップで逐次流体力を計算するから構造物の変形とともに変化する流体力は十分厳密に評価される。なお、途中で現われる非線形連立方程式を解くには Newton-Rapson 法が用いられる。

流体力としては、浮力、潮流力および波力が考えられる。これらのうち浮力と潮流力は静的に考慮される。すなわち、浮力は要素ごとに均一に作用するものと考え、潮流については図-5 に示すような流速分布のパターンを用意し、計算の性質に応じていずれかを選ぶものとしている。

波浪による水粒子の運動には、微小振幅波または Stokes 波（三次波または五次波）の理論が用いられる。さらに実際の海象を表現するために、異なった波高、周期、入射角をもつ複数の波を重ね合わせることもできる。

### 6. 数値計算例

#### (1) 曳航索

前記のプログラムによる計算結果の妥当性を検討するため、既往の研究で得られているものとの比較を行う。ここでは、まず静的解析の計算例として、Gibbons<sup>9)</sup> が行った曳航索に関する実験の結果を取り上げる。この実験は表-1 に示される球状体を、表-2 のような諸元をもつケーブルによって一定の速度で水中曳航するときのケーブルの定常形状を測定したものである。Webster<sup>9)</sup> および吉田<sup>1)</sup> はこの系をモデルとし、それぞれ直線要素を用いた有限要素法によって計算している。ただし、曳

表-1 曳航体諸元

外径 (m)	0.3048
水中重量 (kN)	2.852
抵抗係数	0.6

表-2 ケーブル諸元

外径 (mm)	8.89
E A (kN)	853.6
全長 (m)	85.3
単位長さあたりの水中重量 (N/mm)	24.7
法線抵抗係数	1.5
接線抵抗係数	0.03

航速度を 5.397 m/s としている。吉田は曳航索の流体力係数を  $C_{DN}=1.5$ ,  $C_{DT}=0.03$  としたとき、計算結果が Gibbons の実験値によく一致すると報告している。

ここでは、曳航索を 10 要素の曲線ケーブル要素で分割し、流体力係数としては吉田の指摘する値を用い、また曳航体の抵抗係数を 0.6 として計算を行う。なお、曳航体の受ける流体力は曳航索下端の節点に集中して作用するものとして考慮する。計算は曳航索が海面下に鉛直に垂れ下がった状態を初期値とし、曳航速度を徐々に上げ、所定の速度に達するまで続けられた。

図-6 および表-3 に Gibbons による実験値および吉田による計算結果とともに曲線ケーブル要素による計算結果を示す。三者は互いに若干の差異を示しているが、実用的にはほぼ満足すべき一致をみていると思われる。

図-7 は、曲線および直線ケーブル要素の計算精度の比較のため、曳航索の要素分割数を変化させて同様の計算を行った結果を示す。これは、横軸に構造の自由度を、縦軸に曳航体取付部でのケーブル張力をとり、分割数の

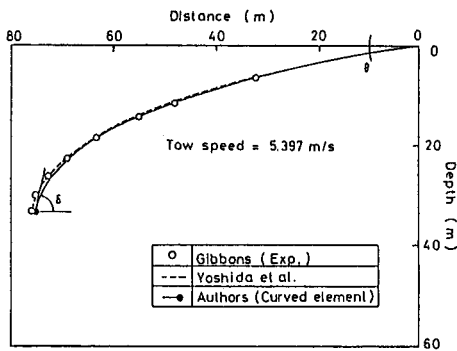


図-6 曳航時のケーブル形状

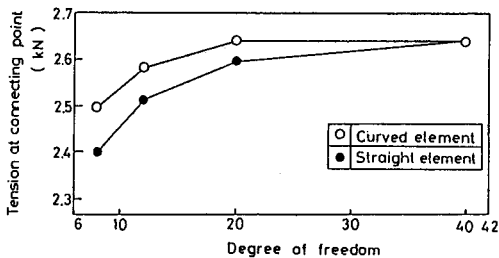


図-7 曳航時のケーブル形状

表-3 計算結果の比較

	Gibbons らによる実験値	吉田らによる計算値	曲線ケーブル要素を用いた計算値
水深 (m)	32.9	33.0	33.3
曳航点での張力 (kN)	2.930	2.989	2.911
曳航体結合部での張力 (kN)	2.626	2.636	2.626
曳航点での角度, $\theta$ (deg)	8.0	10.7	10.7
曳航体結合部での角度, $\delta$ (deg)	80.0	82.9	75.3

増加とともに計算値がどのように収束してゆくかを示している。図にみられるように、構造の自由度が 40 のときに計算値がほぼ収束していると考えられる。曲線要素を用いた場合には自由度が 20 のときにすでに十分収束値に近いとみられるが、直線要素による計算値は自由度 40 ではじめて曲線要素によるものに一致する。曲線要素を用いると、要素を組み立てるための計算は直線要素の場合に比べて著しく複雑になるが、分割数が少なく済み、また解の精度も高いので、特に非線形解析の繰り返し計算においては曲線要素の経済性は高いと思われる。

(2) アンカー・ドロップ

次に、動的過渡応答の数値解析例として、アンカー・ドロップの問題を取り上げ、吉田<sup>4)</sup>の計算結果と比較する。計算モデルは図-8 に示すように先端にアンカーを取り付けたケーブルで、これが水面に平行に置かれた状態を初期状態 ( $t=0$ s) とし、図に示すようにケーブル端の A 点を固定してアンカーを自由落下させたときの応答を計算する。表-4 と表-5 にそれぞれケーブルおよびアンカーの諸元を示す。

計算にあたり、ケーブルは線形弾性とし、ケーブルおよびアンカーの流体力係数は海洋鋼構造物設計指針(案)(文献 10)による値を採用している(文献 4)では流体力係数としてケーブルには円柱の、アンカーには球の

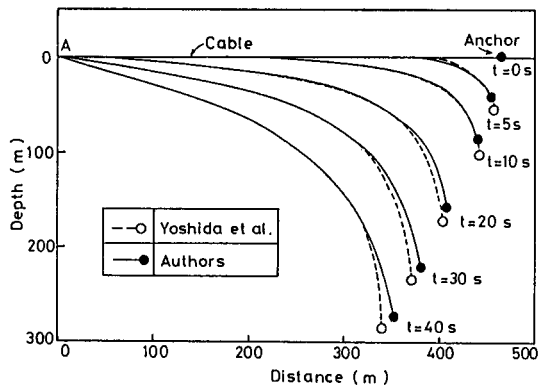


図-8 アンカー・ドロップ

表-4 ケーブル諸元

外径 (mm)	25.4
E A (kN)	843.8
全長 (m)	457.2
初期張力 (kN)	4.449
法線抵抗係数	1.0
接線抵抗係数	0.0
慣性力係数	2.0
付加質量係数	1.0

表-5 アンカー諸元

外径 (m)	1.219
水中重量 (kN)	53.34
抵抗係数	0.5
慣性力係数	1.5
付加質量係数	1.0

値を用いたとのみ記されている)。また運動方程式の数値積分に用いた時間刻みは0.1秒とし、時間が40秒を経過するまで計算を行っている(文献4)で時間刻みとして0.002~0.02秒という細かい値がとられているが、本文では大略の傾向を知るためだけの目的で時間刻みは粗くしている)。

図-8にアンカーが沈下してゆく過程でのケーブルの遷移形状を示す。本計算値は比較的少ない要素分割数(10要素)と粗い時間刻みのもとに得られたものであるにもかかわらず、図から明かなように、文献4)の結果と若干の差異を示すものの、大局的な傾向はほぼ満足できる程度に表現しているものと思われる。

(3) ガイドタワーの波浪応答

海中ケーブル構造の1つの典型として図-9のようなガイドタワーを取り上げ、その波浪応答を解析する。従来このような構造物を解析するときには、ガイラインを線形ばねで置換し、そこに作用する流体力を無視するといった取扱いがなされるのが常であった。しかし最近のように海中構造物の建造海域が数百メートルの深海に及ぶようになってくると構造全体が大型化し、そのような単純なモデル化をすることには意味がなくなってきた。ここではガイラインを曲線ケーブル要素で表わして波浪に対する動的応答を解析する。

ガイラインとしては直径10cmの鋼製ケーブルを用い、これを20本タワーの周囲に放射状に配置する。ガイラインの海底側端部は張力を緩和するため、1.764MNの重錘(図-10)に連結されており、さらにこの重錘にチェーンが取り付けられ、その末端が海底に固定されている。表-6にガイラインの諸元を示す。以下の計算では簡単のためタワーは1本のフレーム材に置換し、その諸元は表-7のとおりとする。またチェーンには直線ケーブル要素を用い、重錘は図-10に示すように588kNの集中質量が3個配列されているものとす

表-6 ガイライン諸元

径 (m)	0.1
断面積 (m <sup>2</sup> )	7.85×10 <sup>-2</sup>
ヤング率 (GPa)	157.6
単位面積当りの密度 (ton)	6.0
法線抵抗係数	1.0
慣性力係数	2.0
付加質量係数	1.0
重錘の重さ (MN)	1.76

表-7 タワー諸元

断面積 (m <sup>2</sup> )	3.9
断面2次モーメント (m <sup>4</sup> )	518.0
ヤング率 (GPa)	206.0
単位面積当り密度 (ton)	6.86
法線抵抗係数	1.0
抗力計算のための単位長さ当りの部材外径 (m)	51.2
慣性力係数	2.0
慣性力計算のための単位長さ当りの部材体積 (m <sup>3</sup> )	20.6
付加質量係数	1.0

る。ガイラインの張力が変化するにつれて重錘が浮上したり、着底したりするが、そのような境界条件の変化に対しては、重錘位置の節点の鉛直変位と反力から、その節点を拘束するか、あるいは自由にするかを判定するという方法で対処している(文献1)参照)。なおタワーの下端はボールジョイントと仮定して計算を行う。また、静的解析により、初期つり合い状態におけるケーブルの係留力を計算すると、タワーとの接点で1.69MNとなる。

以下の数値計算においては、ガイラインに作用する流体力を考慮に入れて応答を計算するもの(Type1)と流体力を無視するもの(Type2)との2種類のモデルを取り扱う。後者は通常この種の構造物解析でよく用いられる線形ばねで代用したモデルに相当するものと考えられる。

以上のような条件で、まず図-9に示したように、ガイドタワーに線形分布の潮流が作用した場合の計算結果を図-11と12に示す。海面の流速を0から2.57m/sまで変化させたときの塔頂水平変位を図-11に、また、海面での流速が2.57m/sのときのガイラインの張力分

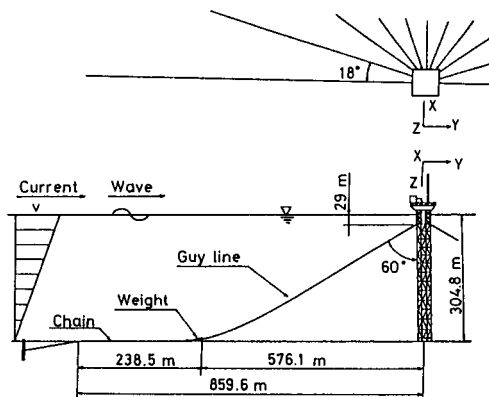


図-9 ガイドタワー概要

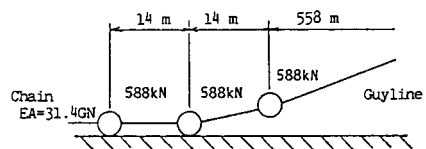


図-10 重錘モデル



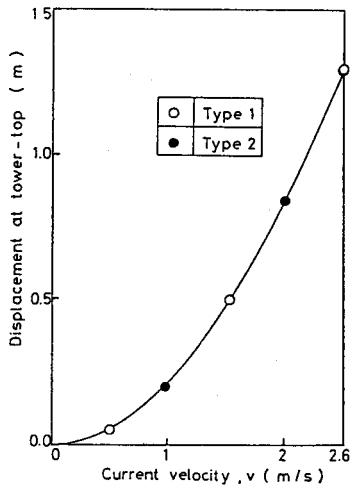


図-11 塔頂水平変位

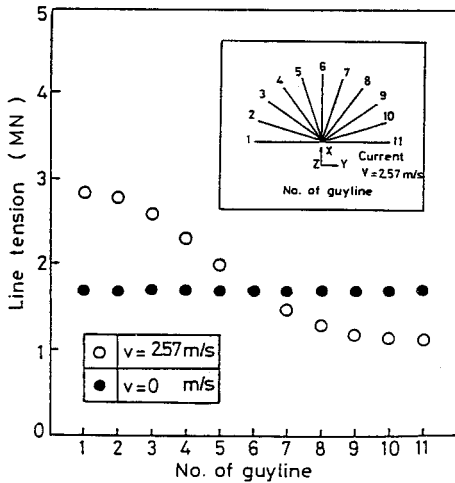


図-12 ガイラインの張力分布

布を図-12に示している。これらの計算例では上記の Type 1 と Type 2 との間の差はほとんどみられない（最大で 0.1% 程度）。これはタワーの受圧面積がガイラインのそれよりかなり大きいため、Type 1 と Type 2 の間でガイラインの受ける流体力に相違があっても構造全体としてはその影響がほとんど及ばないことによると思われる。

表-8 は固有周期の計算結果を示す。一次モードにおける両 Type での結果の相違はガイラインの付加質量の有無によるものであり、ガイラインの付加質量を含んだ Type 1 では見掛け上の質量が Type 2 に比べ大きいため、固有周期が長くなっている。

次に、Type 1 と Type 2 にそれぞれ表-9 に示すような波が作用したときの応答を計算する。この波は北海での波浪統計データに基づいて海象を 8 種の規則波で代表させたもので、ここではすべて深海波として扱う。図-

表-8 固有周期

モード	固有周期 (s)	
	Type 1	Type 2
1	14.0	13.7
2	1.6	1.6

表-9 波

波高 (m)	波周期 (s)
2.0	6.0
4.0	8.0
6.0	9.0
11.0	11.0
15.0	12.0
18.0	13.0
21.0	14.0
28.0	15.0

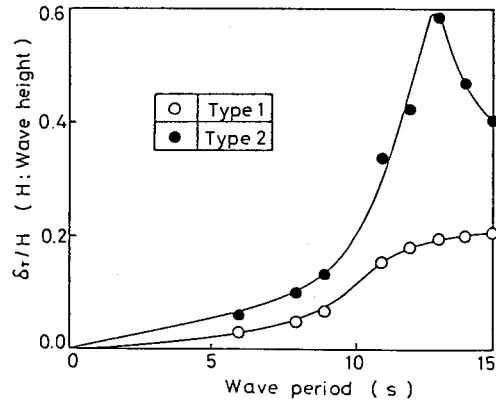


図-13 波周期と塔頂水平変位

表-10 ガイラインの流体力と塔頂水平変位の関係 (波高 18 m, 周期 13 秒)

作用する力		$\delta_r/H$
Type 1	流体抗力 ○ 流体慣性力 ○	0.192
	流体抗力 ○ 流体慣性力 ×	0.200
	流体抗力 × 流体慣性力 ○	0.500
Type 2	流体抗力 × 流体慣性力 ×	0.576

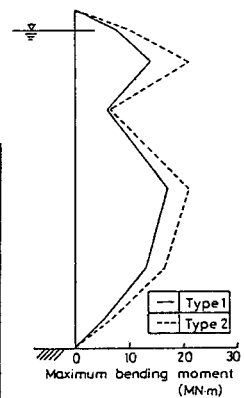
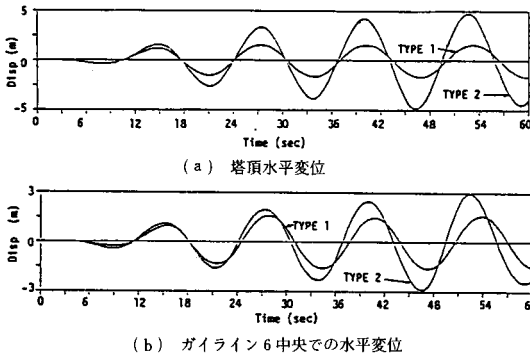
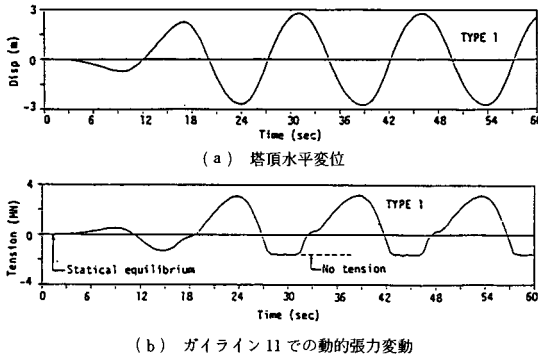


図-14 最大曲げモーメントの分布 (波高 6 m, 波周期 9 秒)

13 は波の周期と塔頂水平変位の両振幅  $\delta_r$  を波高で無次元化した値との関係を示している。ガイラインに作用する流体力を無視した Type 2 では一次モードの固有周期付近に応答のピークがみられるが、流体力を考慮した Type 1 ではそのような現象がみられない。図-14 は波高 6 m, 周期 9 秒の波が作用するときの塔の曲げモーメント分布である。また、図-15 および 16 は時刻歴応答の計算結果の一例である。図-16(b) はガイドタワーが大きな波浪を受けて激しく動揺すると、ガイラインが



図—15 時刻歴応答 (波高 18 m, 波周期 13 秒)



図—16 時刻歴応答 (波高 28 m, 波周期 15 秒)

着底して張力がほとんどなくなるまで弛緩する状態を示している。

このように、ガイラインの流体力を考慮するか否かによって計算結果にかなりの差がみられる。そこで、これらの差に対して、ガイラインに作用する流体力のうち慣性力成分と抗力成分のどちらが支配的であるかを検討した結果を表—10に示す。これから、ガイラインに作用する減衰力がこの相違に支配的であることがわかる。これらの結果から明らかなように、大型の係留構造物ではケーブル部材で線形ばねで置換するといった近似法では現象を正しく把握できないようである。

## 7. あとがき

本研究では、海中ケーブル構造の非線形波浪応答解析を行うのに、3節点アイソパラメトリック曲線ケーブル要素による定式化を行い、それを要素ライブラリーに組み込んで1つの有限要素解析プログラムを作成した。また、若干の数値計算例によってその実用性を検討した。

具体的な計算例として、まず曳航索およびアンカーの自由落下問題を取り上げ、既往の研究成果と比較して解の妥当性を確認し、ついで、実在のガイドタワーをモデルにとってその波浪応答の計算結果を示し、ケーブルを線形ばねで近似する慣用法との相違を明らかにした。

## 参考文献

- 1) 中西 宏・波田凱夫：曲線要素を用いた有限要素法によるケーブル構造の大変形解析，土木学会論文報告集，第318号，1982。
- 2) Johansson, P.I. : Nonlinear dynamic response of a mooring line, DNV Publication, No.106, 1978.
- 3) Webster, R.L. : Nonlinear static and dynamic response of underwater cable structures using the finite element method, OTC 2322, 1975.
- 4) 吉田宏一郎ほか：有限要素法による水中線状構造の応答解析，日本造船学会論文集，第144号，1978。
- 5) Peyrot, A.H. : Marine cable structures, ASCE, Vol.106, ST 12, 1980.
- 6) Lo, A. and Leonard, J.W. : Dynamic analysis of underwater cables, ASCE, Vol.108, EM 4, 1982.
- 7) Morison, J.R. et al. : The forces exerted by surface wave on pile, American Institute of Mining Metallurgical and Petroleum Engineers, Vol.189, 1950.
- 8) Bath, K.J. and Willson, E.L. : Nonsap-A nonlinear structural analysis program, Nuclear Engineering and Design, Vol.29, 1974.
- 9) Gibbons, T. and Walten, C.O. : Evaluation of two method for predicting towline tensions and configurations of a towed body system using bare cable, DTMB Report 2313, 1966.
- 10) 土木学会：海洋鋼構造物設計指針（案）解説書，1976。  
(1984.8.2・受付)