

弾性節点・弾性支点を有する連続桁橋の汎用的な動的解析法*

A PRACTICAL DYNAMIC ANALYSIS METHOD OF CONTINUOUS GIRDER BRIDGE WITH SPRING CONNECTIONS ON SPRING SUPPORTS

小堀為雄**・久保雅邦***

By Tameo KOBORI and Masakuni KUBO

A dynamic analysis method of continuous girder bridge is proposed to evaluate its natural frequencies and mode shapes, which is applicable for any conditions of imperfect rigid connections of beam and elastic supports. These conditions of nodal imperfections and support restrictions can be approximately modeled by four kinds of elastic springs independent of each other, i.e. momental and shearing ones for connections and rotational and vertical ones for supports respectively. In this analysis method, the basic unknowns of equilibrium equations are the integral constants in general solution of mode shape function, neither deformations nor forces of beam, which are used in current methods, e.g. eigen-stiffness method or dynamic four-moments method, etc. Then, the characteristic equation can be obtained from equilibrium equations constructed by substitution of all deformations and forces represented by these unknowns for equilibrium relationships at all nodal points. Because the transformations between deformations and forces of beam need not be induced, the procedure of analysis can be simple, and moreover it is possible to use properly and advantageously each relationships between deformations and forces in accordance with scale of spring constants, which are varied from zero to infinite in magnitude.

1. ま え が き

橋梁の動的応答を解析する中で、部材節点の結合条件や支点部における支点条件の不完全さを考慮すべき場合がある。たとえば、ゲルバー桁橋のヒンジ部は理想的な回転ヒンジとなっていることは少なく、回転方向や鉛直方向の変形特性を考慮しなければならない場合がこれに相当し(図-1(a))、また、耐震や防振を目的として隣り合う単純桁の桁端部を連結板を用いて結合した部分では、連結板の局部変形等による結合部の不完全さが問題となる場合がある(図-1(b))。一方、上部構造と下部構造との接点部は理想的な剛支点や自由接点ではなく、桁端部や支点部の構造に応じて回転方向や鉛直方向の支点拘束を考慮すべき場合がある^{3),4)}。

ここで、構造物に対して大変形の応答が問題になる場合以外は、これらの結合部や支点部における変形を近似的に弾性変形と考えることが可能であり、弾性ばねを用

いて上記の結合条件や支点条件をモデル化することができる。この節点および支点をここでは弾性節点および弾性支点とよぶ。すなわち、弾性節点とは接続する部材端の相対変形に比例した断面力が伝達する節点であり、弾性支点とは支点部の変形に比例した拘束力を生ずる支点である。いずれも回転方向と鉛直方向との弾性ばねを用いてモデル化され、ばね定数の大きさによってそれぞれ結合部の不完全度や支点部の拘束度を表わす。本論文は、このような構造条件をもつ橋梁の動的応答を解析する前提として、これを弾性節点や弾性支点を有する連続ばりにモデル化し、その固有振動数・振動モードを解析する方法について述べるものである。一般に、構造物の固有振動数・振動モードが得られれば、その動的応答を解析することは可能である。

従来、この種の弾性ばねを用いた連続桁橋の動的解析にはいくつかの研究があるが、その解析方法は部材質量の扱い方によって分布質量系と集中質量系とに大別され

* 本論文は第37回年次学術講演会¹⁾および昭和58年度関西支部年次講演会²⁾で一部発表した主旨に加筆しまとめた。

** 正会員 工博 金沢大学教授 建設工学科
(〒920 金沢市小立野2-40-20)

*** 正会員 工修 総合技術コンサルタント 技術課
(〒533 大阪市東淀川区東中島3-5-9)

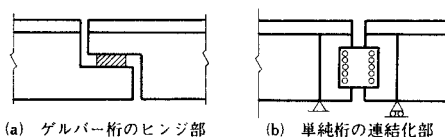


図-1 不完全な結合部の一例

る。前者の方法には静的構造解析⁵⁾でいう応力法^{6)~8)}や変位法^{9)~11)}を応用した方法が提案されており、後者の方法では変位法もしくは伝達マトリックス法¹²⁾が用いられている。集中質量系による方法は1つの近似解法であって大型構造物の場合に有利であるが¹³⁾、橋梁の走行荷重による動的応答を解析する場合などでは、解析の精度上から分布質量系による方法が用いられる。ところが、これらの動的解析法では部材の応力や変位を未知数としているために、多くの弾性節点や弾性支点を取り入れる場合には方程式の誘導が煩雑になるとともに、ばね定数の値によっては数値計算が困難になる。たとえば、振動たわみ角法¹⁴⁾によって比較的柔な弾性支点を有する連続ばりの方程式をはさみ打ち法によって解く場合、正解と特異解とが接近するため正解を見逃す可能性がある。

これに対して、本研究では、任意のばね定数をもつ連続ばりの汎用的な動的解析を目的として、実用的な解析方法を提案した。本研究の方法では、振動モードを表わす一般解の積分定数を未知数とし、自由振動をしているはり部材の両端における応力と変位とのつり合い条件式を用いて連立斉次方程式を組み立て、その係数行列を用いて振動数方程式を求めた。質量の扱いは分布質量系であるが、動的解析の中で応力と変位との変換を行う必要がなく、多数の弾性節点や弾性支点を有する場合にも方程式の誘導が簡明である。さらに、方程式の中に特異解が存在しないと同時に、簡単な判定条件によって任意のばね定数の値に対して数値計算が可能となる。また、従来の分布質量系による方法では、固有振動数を求めた後いったん応力や変位について解き、さらに振動モードを算出する必要があるが、本解法では固有振動数を求めた後直接振動モードを算出できる利点がある。解析手法の電算プログラム化が容易であり、この種の連続ばりの汎用的な動的解析法として優れていると思われる。

2. 解析理論

(1) 弾性節点と弾性支点

前項で定義した弾性節点と弾性支点のモデル化を図-2に示す。ここで、 k_m と k_s をそれぞれモーメントばね、せん断ばねとよび、回転変形とせん断変形における結合部の不完全度を表わす。また、 k_r と k_v をそれぞれ回転支点ばね、鉛直支点ばねとよび、回転反力と鉛直反力による支点拘束度を表わす。4つの弾性ばね(k_m, k_s, k_r, k_v)はそれぞれ $0 \sim +\infty$ の範囲で任意の値をもち、それぞれ独立であるとする。表-1にばね定数の両極値と構造条件の関係、および一般的な構造解析上のモデル図を示す。それぞれ理想的な結合条件と支点条件とを表わしている。

弾性節点と弾性支点とを一体化した節点・支点を図-

3に示す。弾性支点ばねの定数を、この節点に接続する2つの部材の右端と左端とにそれぞれ半分ずつ分割するものとする。一般にはこの分割の割合を変えたモデル化も可能であるが、ここではまず解析手法を簡単な形で明らかにすることを考えてこの仮定を用いる。4つの弾性ばね(k_m, k_s, k_r, k_v)はそれぞれ独立ではあるが、解析手法の便宜上からある節点や支点を定義する場合、必ず図-3のように4つのばね定数を1組にして定義するものとする。たとえば、弾性節点だけの場合には、表-1に従って k_m と k_s のほかにも $k_r = k_v = 0$ として定義する。以後の説明で特に断わらない限り、図-3の弾性節点・弾性支点を節点あるいは支点とよぶことにする。

(2) 基礎微分方程式

着目する連続桁橋をすべての節点や支点ごとに分割し、はり部材と弾性ばねとを用いて連続ばりにモデル化する。計算上の径間数 N は分割された部材数に等しく、節点や支点の数は連続ばりの両端部を含めて $N+1$ 個で

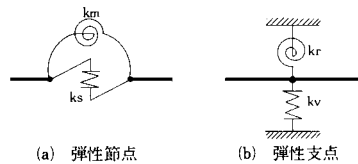


図-2 弾性節点と弾性支点

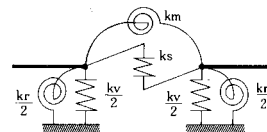


図-3 弾性節点・支点

表-1 理想化された結合条件と支点条件

		(a) 結合条件	
		モーメントばね	
		$k_m = 0$	$k_m = \infty$
せん断ばね	$k_s = 0$	自由 	スライド
	$k_s = \infty$	回転ヒンジ 	剛結
		(b) 支点条件	
		回転支点ばね	
		$k_r = 0$	$k_r = \infty$
鉛直支点ばね	$k_v = 0$	自由端 	スライド支点
	$k_v = \infty$	回転支点 	固定端

ある。この連続ばりの部材番号 $i(i=1, 2, \dots, N)$, 節点番号 $j(j=1, 2, \dots, N+1)$ および座標軸を図-4のように定義する。部材 i の支間長を l_i とし、その左端を原点として小座標 $x=x_i$ を定義する。さらに部材の曲げ剛性 EI_i と単位長さ重量 m_i は各径間内では一定とする。

連続ばりの任意の径間 (部材 i) の曲げ振動の微分方程式は次式で与えられる¹⁵⁾。

$$EI_i \frac{\partial^4 y_i}{\partial x_i^4} + \frac{m_i}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 g は重力加速度、 y_i ははりの鉛直変位、 t は時間を表わす。 y_i は x_i と t との関数となり、次の直交関数で与えられると仮定する。

$$y_i(x_i, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_i^{(n)}(x_i) \cdot e^{i\omega_n t} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位、 $\phi_i^{(n)}(x_i)$ は固有関数を表わし、ここでは部材 i の n 次振動における振動モード、 ω_n は n 次の固有円振動数であり、 $e^{i\omega_n t}$ が一般座標にあたる。式 (1) と式 (2) から一般解は次式で与えられる。

$$\phi_i^{(n)}(x_i) = A_i^{(n)} \cdot \cos \beta_i^{(n)} \cdot x_i + B_i^{(n)} \cdot \sin \beta_i^{(n)} \cdot x_i + C_i^{(n)} \cdot \cosh \beta_i^{(n)} \cdot x_i + D_i^{(n)} \cdot \sinh \beta_i^{(n)} \cdot x_i \dots\dots\dots (3)$$

ここに

$$\beta_i^{(n)} = \sqrt[4]{\frac{m_i}{gEI_i} \cdot \omega_n^2} \dots\dots\dots (4)$$

また、 $A_i^{(n)}$, $B_i^{(n)}$, $C_i^{(n)}$, $D_i^{(n)}$ は積分定数を表わす。

なお表記上特に必要でない限り、以後の説明では簡単のためにモード次数を表わす添字 n を省略する。

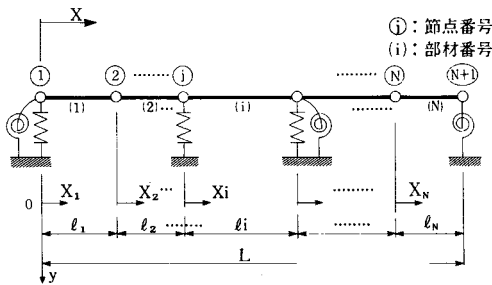


図-4 連続ばりモデル

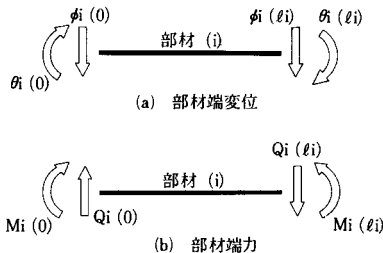


図-5 部材端変位と部材端力

いま、はり部材の応力-ひずみ関係式から、あるモードにおける部材のたわみ $\phi_i(x_i)$, たわみ角 $\theta_i(x_i)$, せん断力 $Q_i(x_i)$ および曲げモーメント $M_i(x_i)$ の間には次の関係式が成り立つ。

$$\theta_i(x_i) = \frac{d\phi_i(x_i)}{dx_i} \dots\dots\dots (5)$$

$$M_i(x_i) = -EI_i \cdot \frac{d^2\phi_i(x_i)}{dx_i^2} \dots\dots\dots (6)$$

$$Q_i(x_i) = -EI_i \cdot \frac{d^3\phi_i(x_i)}{dx_i^3} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、部材の両端における変位と力の符号を、矢印の方向を正として図-5のように定義する。式 (3) と式 (5)~(7) より次の関係式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \phi(0) \\ \theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix}_{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta \\ EI\beta^2 & 0 & -EI\beta^2 & 0 \\ 0 & EI\beta^3 & 0 & -EI\beta^3 \end{bmatrix}_{(i)} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}_{(i)} \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{pmatrix} \phi(l) \\ \theta(l) \\ M(l) \\ Q(l) \end{pmatrix}_{(i)} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\beta \sin \lambda & \beta \cos \lambda \\ EI\beta^2 \cos \lambda & EI\beta^2 \sin \lambda \\ -EI\beta^3 \sin \lambda & EI\beta^3 \cos \lambda \\ \cosh \lambda & \sinh \lambda \\ \beta \sinh \lambda & \beta \cosh \lambda \\ -EI\beta^2 \cosh \lambda & -EI\beta^2 \sinh \lambda \\ -EI\beta^3 \sinh \lambda & -EI\beta^3 \cosh \lambda \end{bmatrix}_{(i)} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}_{(i)} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$\lambda_i = \beta_i \cdot l_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots (10)$$

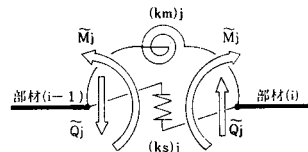


図-6 伝達断面力

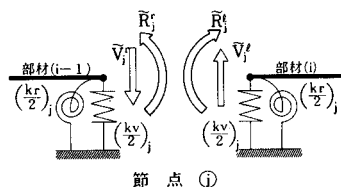


図-7 支点反力

(3) つり合い条件式

部材 $i-1$ と i とが接続する節点でのつり合いを考える。ここで、節点を図-3のように定義したことによって、部材端変位と節点変位との適合条件はすでに満足している。つまり、部材端そのものが節点を表わしており、ここでは部材端と節点とにおけるつり合い条件式を次のように求めることができる。

図-6に示すように、モーメントばねとせん断ばねによって伝達される断面力をそれぞれ伝達モーメント \tilde{M}_j 、伝達せん断力 \tilde{Q}_j とよぶことにする。弾性節点の定義から、部材端たわみ角と部材端たわみおよびそれぞれのばね定数とを用いて \tilde{M}_j と \tilde{Q}_j とを表わすことができる。

$$\tilde{M}_j = (k_m)_j \cdot \{\theta_{i-1}(l_{i-1}) - \theta_i(0)\} \quad (j=i=2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\tilde{Q}_j = -(k_s)_j \cdot \{\phi_{i-1}(l_{i-1}) - \phi_i(0)\} \quad (j=i=2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(12)$$

一方、図-7に示すように、各部材端に作用する支点反力を、それぞれ右端と左端の回転反力 $\tilde{R}_j^r, \tilde{R}_j^l$ 、鉛直反力 $\tilde{V}_j^r, \tilde{V}_j^l$ とよぶ。これらの値は弾性支点の定義から同様に次のように表わすことができる。

$$\tilde{R}_j^r = \left(\frac{k_r}{2}\right)_j \cdot \theta_{i-1}(l_{i-1}) \quad (j=i=2, 3, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\tilde{R}_j^l = -\left(\frac{k_r}{2}\right)_j \cdot \theta_i(0) \quad (j=i=2, 3, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\tilde{V}_j^r = -\left(\frac{k_v}{2}\right)_j \cdot \phi_{i-1}(l_{i-1}) \quad (j=i=2, 3, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\tilde{V}_j^l = \left(\frac{k_v}{2}\right)_j \cdot \phi_i(0) \quad (j=i=2, 3, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(16)$$

ただし、伝達断面力と支点反力の符号は図-6および図-7の矢印の方向を正とする。

いま、自由振動をしている連続ばりには外力が作用していないから、部材 $i-1$ の右端と部材 i の左端とにおいてそれぞれ回転力と鉛直力に関する次のつり合い条件式が成立しなければならない。

回転力に関しては式 (11) と式 (13), (14) より

$$M_{i-1}(l_{i-1}) = \tilde{M}_j + \tilde{R}_j^r \quad (j=i=2, 3, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$\therefore M_{i-1}(l_{i-1}) = \left(k_m + \frac{k_r}{2}\right)_j \cdot \theta_{i-1}(l_{i-1}) - (k_m)_j \cdot \theta_i(0) \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$M_i(0) = \tilde{M}_j + \tilde{R}_j^l \quad (j=i=2, 3, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$\therefore M_i(0) = (k_m)_j \cdot \theta_{i-1}(l_{i-1}) - \left(k_m + \frac{k_r}{2}\right)_j \cdot \theta_i(0) \quad \dots\dots\dots(20)$$

鉛直力に関しては式 (12) と式 (15), (16) より

$$Q_{i-1}(l_{i-1}) = \tilde{Q}_j + \tilde{V}_j^r \quad (j=i=2, 3, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$\therefore Q_{i-1}(l_{i-1}) = -\left(k_s + \frac{k_v}{2}\right)_j \cdot \phi_{i-1}(l_{i-1}) + (k_s)_j \cdot \phi_i(0) \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$Q_i(0) = \tilde{Q}_j + \tilde{V}_j^l \quad (j=i=2, 3, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$\therefore Q_i(0) = -(k_s)_j \cdot \phi_{i-1}(l_{i-1}) + \left(k_s + \frac{k_v}{2}\right)_j \cdot \phi_i(0) \quad \dots\dots\dots(24)$$

ここで、それぞれ式 (18) と式 (20), 式 (22) と式 (24) の和と差を求めると、部材端力と部材変位との関係を次の簡単な形にまとめることができる。

$$\{M_{i-1}(l_{i-1}) + M_i(0)\} - \left(2k_m + \frac{k_r}{2}\right)_j \cdot \{\theta_{i-1}(l_{i-1}) - \theta_i(0)\} = 0 \quad \dots\dots\dots(25)$$

$$\{M_{i-1}(l_{i-1}) - M_i(0)\} - \left(\frac{k_r}{2}\right)_j \cdot \{\theta_{i-1}(l_{i-1}) + \theta_i(0)\} = 0 \quad \dots\dots\dots(26)$$

$$\{Q_{i-1}(l_{i-1}) + Q_i(0)\} + \left(2k_s + \frac{k_v}{2}\right)_j \cdot \{\phi_{i-1}(l_{i-1}) - \phi_i(0)\} = 0 \quad \dots\dots\dots(27)$$

$$\{Q_{i-1}(l_{i-1}) - Q_i(0)\} + \left(\frac{k_v}{2}\right)_j \cdot \{\phi_{i-1}(l_{i-1}) + \phi_i(0)\} = 0 \quad \dots\dots\dots(28)$$

(j=i=2, \dots, N)

一方、連続ばりの始点と終点、つまり部材 1 の左端と部材 N の右端においては、それぞれ $(k_m)_j = (k_s)_j = 0$ すなわち $\tilde{M}_j = \tilde{Q}_j = 0$ ($j=1, N+1$) であるから、式 (18), (20), (22), (24) の各式より次の関係式が得られる。

$$M_1(0) + \left(\frac{k_r}{2}\right)_1 \cdot \theta_1(0) = 0 \quad \dots\dots\dots(29)$$

$$Q_1(0) - \left(\frac{k_v}{2}\right)_1 \cdot \phi_1(0) = 0 \quad \dots\dots\dots(30)$$

$$M_N(l_N) - \left(\frac{k_r}{2}\right)_{N+1} \cdot \theta_N(l_N) = 0 \quad \dots\dots\dots(31)$$

$$Q_N(l_N) + \left(\frac{k_v}{2}\right)_{N+1} \cdot \phi_N(l_N) = 0 \quad \dots\dots\dots(32)$$

式 (25)~(32) の各式が弾性節点・弾性支点における部材端変位と部材端力のつり合い条件式である。

なお、式 (25)~(28) では図-3に示したように、弾性支点ばねの定数を部材の右端と左端とに等分割するという仮定を用いている。しかし、弾性支点のモデル化で不等分割となる場合は、式 (25)~(28) に換えて式 (18), (20), (22), (24) の各式を使用すればよい。この場合には、以下に述べる方程式の誘導が多少煩雑になるが、解析手法の本質的な部分は全く同様である。

以上のつり合い条件式が、ばね定数の全範囲(0~+∞)に対して成り立つことはいうまでもないが、ここで、ばね定数の任意の値に対して同一のつり合い条件式を用いて数値計算を可能にするために、ばね定数に関する係数(ばね係数とよぶ)の大きさに応じてつり合い条件式の形を使い分けることにする。式 (25)~(32) では説明の便宜上、部材端変位にばね係数を乗じた形となっているが、これを模式的に示すと次のようである。

(a) ばね係数が相対的に小さい場合

(力)±(ばね係数)×(変位)=0.....(33)

(b) ばね係数が相対的に大きい場合

(力)/(ばね係数)±(変位)=0.....(34)

この使い分けによって、任意の弾性節点・弾性支点に対して同一のつり合い条件式を用いて計算できることになる。

(4) 振動数方程式

はり部材の応力-ひずみ関係式より求めた式(8),(9)を、部材端におけるつり合い条件式に代入してすべての

部材端変位(たわみ, たわみ角)と部材端力(曲げモーメント, せん断力)とを消去すれば, 自由振動している連続ばりのすべての積分定数を未知数とする連立斉次方程式が得られる。したがって, この方程式が有意義な解をもつという条件から振動数方程式を求めることができる。つまり, 振動数を含む係数行列の行列式をゼロとおけば, これが振動数方程式となる。

まず, 部材 $i-1$ と部材 i とが接続する節点では, 式(8),(9)を式(25)~(28)の各式へ代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ * \\ 0 \\ * \\ 0 \\ * \\ 0 \\ * \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_{i-1} \cdot S_{i-1} + KA_j \cdot C_{i-1}, & X_{i-1} \cdot C_{i-1} + KA_j \cdot S_{i-1}, & -X_{i-1} \cdot SH_{i-1} + KA_j \cdot CH_{i-1}, & * \\ * - X_{i-1} \cdot CH_{i-1} + KA_j \cdot SH_{i-1}, & KA_j, & -X_{i-1} \cdot KA_j, & X_{i-1} \\ -X_{i-1} \cdot S_{i-1} + KB_j \cdot C_{i-1}, & X_{i-1} \cdot C_{i-1} + KB_j \cdot S_{i-1}, & -X_{i-1} \cdot SH_{i-1} + KB_j \cdot CH_{i-1}, & * \\ * - X_{i-1} \cdot CH_{i-1} + KB_j \cdot SH_{i-1}, & -KB_j, & X_{i-1} \cdot -KB_j, & -X_{i-1} \\ \beta_{i-1} \cdot Y_{i-1} \cdot C_{i-1} + \beta_{i-1} \cdot KC_j \cdot S_{i-1}, & \beta_{i-1} \cdot Y_{i-1} \cdot S_{i-1} - \beta_{i-1} \cdot KC_j \cdot C_{i-1}, & -\beta_{i-1} \cdot Y_{i-1} \cdot CH_{i-1} - \beta_{i-1} \cdot KC_j \cdot SH_{i-1}, & * \\ * - \beta_{i-1} \cdot Y_{i-1} \cdot SH_{i-1} - \beta_{i-1} \cdot KC_j \cdot CH_{i-1}, & -\beta_{i-1} \cdot Y_{i-1}, & -\beta_{i-1} \cdot KC_j, & \beta_{i-1} \cdot Y_{i-1}, & -\beta_{i-1} \cdot KC_j \\ \beta_{i-1} \cdot Y_{i-1} \cdot C_{i-1} + \beta_{i-1} \cdot KD_j \cdot S_{i-1}, & \beta_{i-1} \cdot Y_{i-1} \cdot S_{i-1} - \beta_{i-1} \cdot KD_j \cdot C_{i-1}, & -\beta_{i-1} \cdot Y_{i-1} \cdot CH_{i-1} - \beta_{i-1} \cdot KD_j \cdot SH_{i-1}, & * \\ * - \beta_{i-1} \cdot Y_{i-1} \cdot SH_{i-1} - \beta_{i-1} \cdot KD_j \cdot CH_{i-1}, & \beta_{i-1} \cdot Y_{i-1}, & \beta_{i-1} \cdot KD_j, & -\beta_{i-1} \cdot Y_{i-1}, & \beta_{i-1} \cdot KD_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{i-1} \\ B_{i-1} \\ C_{i-1} \\ D_{i-1} \\ A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{pmatrix} \quad (j=i=2, \dots, N) \dots\dots\dots(35)$$

ここに

$$\begin{aligned} KA_j &= \left(\frac{k_v}{2}\right), & KB_j &= \left(2k_s + \frac{k_v}{2}\right), & KC_j &= \left(\frac{k_r}{2}\right), & KD_j &= \left(2k_m + \frac{k_r}{2}\right), \dots\dots\dots(36) \\ C_{i-1} &= \cos \lambda_{i-1}, & S_{i-1} &= \sin \lambda_{i-1}, & CH_{i-1} &= \cosh \lambda_{i-1}, & SH_{i-1} &= \sinh \lambda_{i-1} \\ C_i &= \cos \lambda_i, & S_i &= \sin \lambda_i, & CH_i &= \cosh \lambda_i, & SH_i &= \sinh \lambda_i \\ X_{i-1} &= (EI\beta^3)_{i-1}, & X_i &= (EI\beta^3)_i, & Y_{i-1} &= (EI\beta)_{i-1}, & Y_i &= (EI\beta)_i \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(37)$$

次に, 連続ばりの始点では式(8)と式(29),(30)より

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -KA_1, & X_1, & -KA_1, & -X_1 \\ \beta_1 \cdot Y_1, & \beta_1 \cdot KC_1, & -\beta_1 \cdot Y_1, & \beta_1 \cdot KC_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(38)$$

同じく, 終点では式(9)と式(31),(32)より

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_N \cdot S_N + KA_{N+1} \cdot C_N, & * \\ * - X_N \cdot SH_N + KA_{N+1} \cdot CH_N, & * \\ \beta_N \cdot Y_N \cdot C_N + \beta_N \cdot KC_{N+1} \cdot S_N, & * \\ * - \beta_N \cdot Y_N \cdot CH_N - \beta_N \cdot KC_{N+1} \cdot SH_N, & * \\ X_N \cdot C_N + KA_{N+1} \cdot S_N, & * \\ -X_N \cdot CH_N + KA_{N+1} \cdot SH_N, & * \\ \beta_N \cdot Y_N \cdot S_N - \beta_N \cdot KC_{N+1} \cdot C_N, & * \\ -\beta_N \cdot Y_N \cdot SH_N - \beta_N \cdot KC_{N+1} \cdot CH_N, & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} \dots\dots\dots(39)$$

式(38),(39)の中の記号は式(36),(37)に従っている。ところで, 前記したように, 任意のばね定数に対して汎用的に振動数方程式を解くために, ばね定数とはり部材の動的な剛性を表わす項との間に下記のような簡単な

判定条件を設け, この判定条件に従ってつり合い条件式の形を使い分ける。以下に判定条件について説明する。

まず, 部材 $i-1$ と部材 i とについて新たに

$$X_{\max \cdot j} = \max \text{ of } [(EI\beta^3)_{i-1}, (EI\beta^3)_i] \dots\dots\dots(40)$$

$$Y_{\max \cdot j} = \max \text{ of } [(EI\beta)_{i-1}, (EI\beta)_i] \dots\dots\dots(41)$$

($j=i=2,3,\dots,N$)

とおく。式(40),(41)の右辺の記号はどちらかの最大値であることを表わす。さらに, これを用いて次の判定係数 $\rho_{aj}, \rho_{bj}, \rho_{cj}, \rho_{dj}$ ($j=1, 2, \dots, N+1$)を定義する。すなわち, 節点 $j=2, 3, \dots, N$ においては

$$\begin{aligned} \rho_{aj} &= \frac{KA_j}{X_{\max \cdot j}}, & \rho_{bj} &= \frac{KB_j}{X_{\max \cdot j}}, & \rho_{cj} &= \frac{KC_j}{Y_{\max \cdot j}}, \\ \rho_{dj} &= \frac{KD_j}{Y_{\max \cdot j}} \quad (j=2, 3, \dots, N) \dots\dots\dots(42) \end{aligned}$$

一方, 連続ばりの始点と終点とにおいては, それぞれ部材1あるいは部材 N とばね係数とによって判定係数を定義する。すなわち, 節点1では式(40),(41)で表わされる部材の剛性に換えて X_1 と Y_1 とを用いる。

$$\rho_{a1} = \rho_{b1} = \frac{KA_1}{X_1}, \quad \rho_{c1} = \rho_{d1} = \frac{KC_1}{Y_1} \dots\dots\dots(43)$$

節点 $N+1$ においては, 同じく X_N と Y_N とを用いて

$$\rho_{a \cdot N+1} = \rho_{b \cdot N+1} = \frac{KA_{N+1}}{X_N}, \quad \rho_{c \cdot N+1} = \rho_{d \cdot N+1} = \frac{KC_{N+1}}{Y_N} \dots\dots\dots(44)$$

明らかに以上の判定係数 $\rho_{aj}, \rho_{bj}, \rho_{cj}, \rho_{dj} \geq 0$ ($j=1, 2, \dots, N+1$) であり、つり合い条件式、式 (25)~(32) のそれぞれに対して1つずつの判定係数が与えられる。ここでは、次の判定条件を用いてつり合い条件式の形を使い分ける。

判定条件

- (a) 判定係数 < 1.0 のとき式 (33)
- (b) 判定係数 ≥ 1.0 のとき式 (34)

式 (35), (38) および (39) の各式では、説明上すべてのつり合い条件式が式 (33) の形で使われているが、上記の変換が非常に簡単に行えることは式の形をみれば明白である。

なお、ここでは判定条件の境界を 1.0 としたが、これは三角関数や双曲線関数の和や差によって連立斉次方程式を組み立てる際に、係数行列の要素の値を小さくすることによって計算上のオーバーフローや桁落ちの問題を少なくするためのものである。つまり、ばね係数の値が非常に大きい場合や小さい場合に問題が発生するが、これを解消するための実用的な判定基準として式 (40) や式 (41) の値を導入し、これとばね係数との大小を比較して判定条件とした。この意味で、境界値の 1.0 は厳密な条件ではなく、実用的な他の値を設定することもできる。

さて、式 (35) もしくは式 (38), (39) の関係式をすべての節点について求めれば、すべての積分定数を未知数とする連立斉次方程式が得られる。この係数行列を E とおけば、連立斉次方程式は次のように整理される。

$$|0| = [E] \cdot |C| \dots\dots\dots(45)$$

$$|0|^T = \{0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\} \dots\dots\dots(46)$$

$$|C|^T = \{A_1, B_1, C_1, \dots, A_N, B_N, C_N, D_N, \dots\} \dots\dots\dots(47)$$

ここに、 $|0|$ はゼロベクトル、 $|C|$ はすべての積分定数を

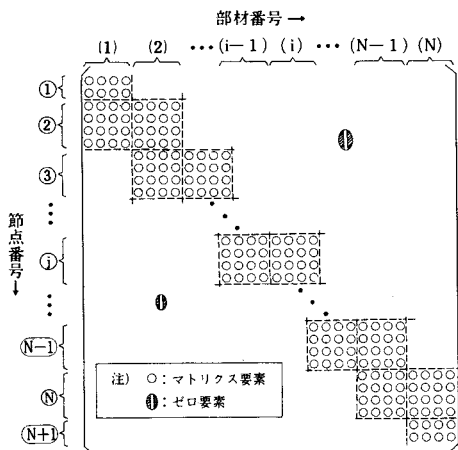


図-8 係数行列 E の形

要素とするベクトルを表わし、 $| \cdot |^T$ はベクトルの転置を表わす。したがって、式 (45) から次の振動数方程式を得る。

$$|E| = 0 \dots\dots\dots(48)$$

N 径間連続ばりの場合には、係数行列 E は $4 \times N$ 次のバンド行列 (半バンド幅は 11) となる。E の形を模式的に図-8 に示す。

(5) 振動モード

振動数方程式を解いて固有円振動数 ω_m ($m=1, 2, \dots$) を求め、これを再び式 (45) へ代入して未知数 $A_i^m, B_i^m, C_i^m, D_i^m$ ($m=1, 2, \dots, i=1, 2, \dots, N$) について解けば、ある基準値に対する比の形で求めることができる。さらに、この結果を次の正規化条件を用いて正規化すれば、振動モード $\phi_i^m(x)$ ($m=1, 2, \dots, i=1, 2, \dots, N$) が得られたことになる。

$$\int_0^L \frac{m_i}{g} [\phi_i^m(x)]^2 dx = 1$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{m_i \cdot l_i}{2g} \cdot [(A_i^m)^2 + (B_i^m)^2 + (C_i^m)^2 - (D_i^m)^2]$$

($m=1, 2, \dots$).....(49)

ところで、本解法では上記のように固有振動数を求めた後直接振動モードを求めることができるが、前記した分布質量系による解法では式 (45) に相当する連立斉次方程式の未知数が応力や変位であるため、いったんこれらについて解きその結果を式 (8) および式 (9) へ代入して振動モードを算出する必要がある。

3. 計算例と考察

(1) 振動たわみ角法との比較

簡単な計算モデルを用いて、本解法と振動たわみ角法

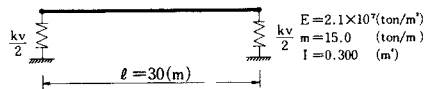


図-9 単純ばりモデル—計算例 (1)

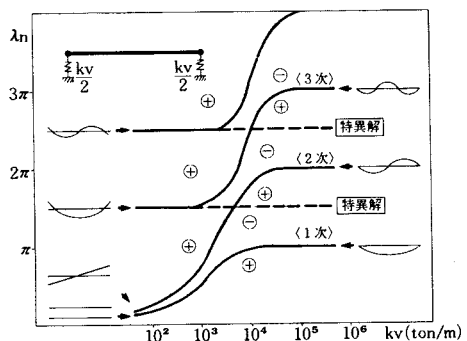


図-10 単純ばりの動的解析—計算例 (1)

との比較を行う。ここで、はさみ打ち法によって振動数方程式を解く。この方法では解の初期値とステップ値とを効果的に設定し、解をはさむことができれば確実に正解を解くことができるが、2つの解が接近している場合ステップ値の選び方が重要である。

計算例(1) 鉛直支点ばねを有する単純ばり

図-9に示す単純ばりについて、鉛直支点ばね k_v の値を任意に変えて固有振動数と振動モードとを本解法に

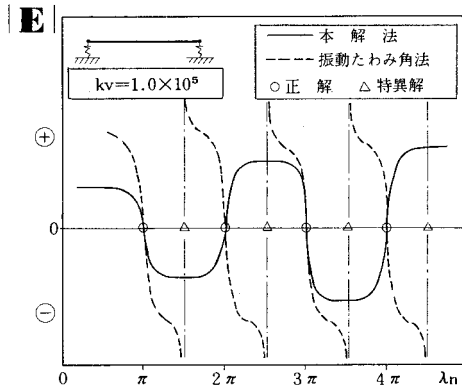


図-11 行列式 $|E|$ の変化—計算例(1) (その1)

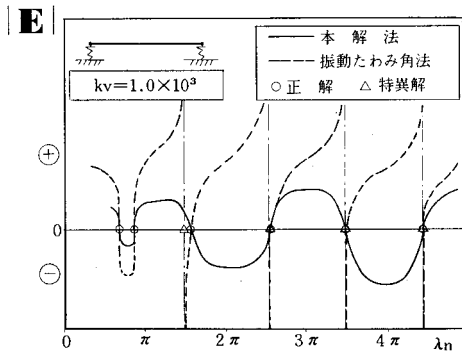


図-12 行列式 $|E|$ の変化—計算例(1) (その2)

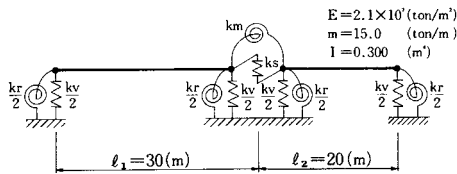


図-13 非対称二径間連続ばりモデル—計算例(2)

表-2 計算例(2)のばね定数

ばね定数	km (tm/rad)	4.66×10^4
	ks (t/m)	4.20×10^8
	kr (tm/rad)	4.20×10^8
	kv (t/m)	4.66×10^4

よって求めると図-10の実線のようになる。

一方、これを振動たわみ角法によって解くと、解が求まる範囲では同様の結果が得られるが、 $k_v \geq 10^4$ (t/m) では数値計算上オーバーフローを生ずる。ちなみに、本研究で調査した一般的な橋梁の弾性支承では $k_v \approx (1.0 \sim 10.0) \times 10^5$ (t/m) であった。図中点線で示す値は振動たわみ角法の特異解を表わし、同じく⊕と⊖の記号は実線と点線とで囲まれた範囲の行列式 $|E|$ の符号を表わす。つまり、図-11と図-12の例に示す符号の変化からわかるように、振動たわみ角法には特異解が存在しこの解の前後で符号が反転する。ここで、図-11のように正解と特異解とが比較的離れている場合には、解に近づく行列式の値がゼロに収束するか発散するかによって判定したり、あるいはあらかじめ理論的に特異解を調べておくことによってこれを除くことができる。しかし、図-12のように正解と特異解とが接近している場合には、十分に小さいステップ値を用いないと正解をはさむことができない。つまり正解を見逃す可能性があり、そのために試行錯誤の労力が多大にならざるを得ない。

これに対して、図-11と図-12から明らかなように、本解法では特異解が存在せず行列式の符号は正解のみが算出されるように変化している。したがって、任意のばね定数に対して確実に正解を求めることができる。なお、計算は倍精度で行った。

計算例(2) 非対称二径間連続ばり

図-13に示す計算モデルについて、本解法と振動たわみ角法とによる行列式の符号の変化を図-14に示す。表-2にばね定数の値を示す。この例では、連続ばりがいくつもの弾性節点や弾性支点を有することによって振動モードが複雑になり、これを振動たわみ角法によって解く場合正解と特異解との判別がより困難なることを示している。この場合にも、本解法によれば容易に正解を求めることができる。

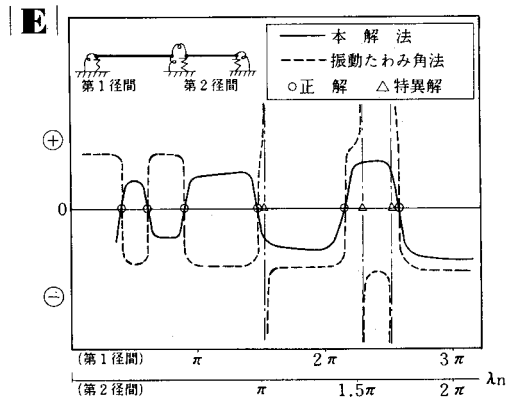


図-14 行列式 $|E|$ の変化—計算例(2)

(2) 高次振動数と多径間連続ばりの場合

この場合には、係数行列の要素の数と値が大きくなるために、本解法においても前記した解析手順だけでは式(48)の計算において数値計算上のオーバーフローを生ずる可能性がある。したがって、次の簡単な操作を加えることによって、この点を解決することができる。式(45)、(48)における係数行列 E の各行の要素の値をその行に含まれる絶対最大値で除しておく。必要なのは行列式の符号の変化であり、その大きさは不要なことから、この操作によって上記の問題を簡単に解決することができる。ところで、この操作は高次振動数や多径間連続ばりの場合に限定する必要はなく、低次モードや少ない径間数の場合にも適用してよい。つまり、この操作を基本的に解析手順の中へ組み入れておけば、本解法が広い範囲に適用できることになる。

計算例(3) 固定端と自由端を有するゲルバー桁橋

図-15に示す種々の結合条件・支点条件を有するゲルバー桁橋について計算例を示す。表-3にはばね定数の

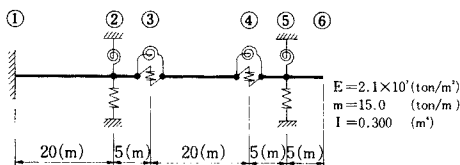


図-15 ゲルバー桁モデル—計算例(3)

表-3 計算例(3)のばね定数

	節点・支点番号					
	①	②	③	④	⑤	⑥
ばね						
k_m (tm/rad)	0	∞	5.0×10^4	5.0×10^4	∞	0
k_s (t/m)	0	∞	1.0×10^6	1.0×10^6	∞	0
定数						
k_r (tm/rad)	∞	1.0×10^4	0	0	1.0×10^4	0
k_v (t/m)	∞	5.0×10^4	0	0	5.0×10^4	0

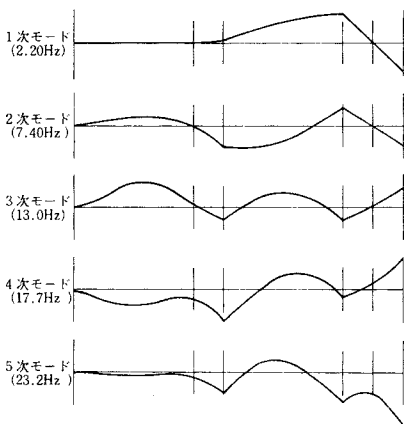


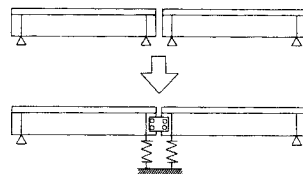
図-16 ゲルバー桁の動的解析—計算例(3)

値を示す。この例題の場合、動的解析上は五径間連続ばりである。5次までの固有振動数・振動モードを求め図-16に示す。種々の弾性節点・弾性支点のために振動モードが複雑に変化するが、本解法によって容易に解析することができた。

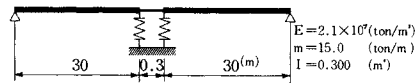
(3) 弾性支承を併用した単純桁の連続化

—計算例(4)

図-17に示すように、隣り合う単純桁の桁端部を比較的小さい連結板と弾性支承とを用いて連続化する場合について示す。まず、連結板の剛性 EI を主桁の剛性 EI_0 と同等にして鉛直支点ばね定数を変化させると図-18のようになる。一般的な弾性支承のばね定数は図の斜線部であり、この範囲であれば十分二径間連続桁に近い動的特性となる。次に、鉛直支点ばね定数を一定にし、連結板の剛性を変化させると図-19のようになる。この結果によれば、図中に振動モードを示すように EI_0 の10%程度の連結板の剛性があれば、十分二径間連続桁に近い動的特性となることを示している。このことは、弾性支承を併用することによって、比較的小さい連結板



(a) 弾性支承化と桁端部の連結



(b) 計算モデル

図-17 単純桁の連続化モデル—計算例(4)

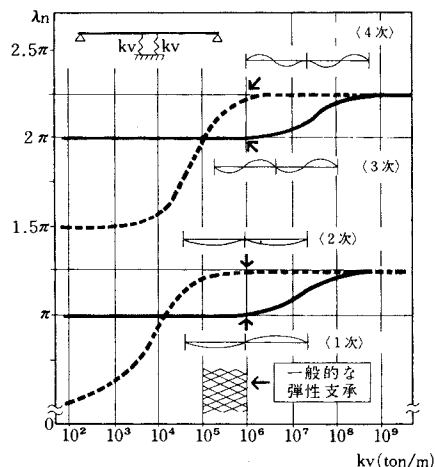
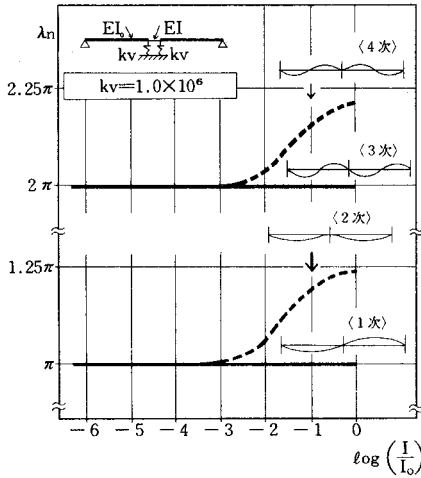


図-18 連続化モデルの動的解析—計算例(4)(その1)



図一19 連続化モデルの動的解析—計算例(4)(その2)

を用いて単純桁の連続化が可能であることを示唆するものである。

4. まとめ

本研究では、弾性節点・弾性支点を有する連続桁橋の汎用的な動的解析を目的として、解析手法が明確かつ実用的な解法を提案した。得られた成果と今後の展望とをまとめると以下のようなものである。

(1) 本解法の振動数方程式の中には特異解が存在せず、かつばね係数とはり部材の動的な剛性との間に簡単な判定条件を導入することによって、任意のばね定数に対して振動数方程式の値が発散するのを避けることができる。したがって、はさみ打ち法を用いて低次モードから高次モードへと確実に正解を算出することができる。

(2) この判定条件の計算は非常に簡単であり、解析手法の中に取り入れておけば任意の弾性節点・弾性支点を有する場合に対して汎用的に動的解析が可能である。

(3) 本解法は分布質量系による方法であるが、固有振動数を求めた後直接振動モードを算出することができる。特に適用としては、走行荷重による連続桁橋の動的応答の解析に有利であると思われる。

(4) 動的解析の中で部材の応力と変位との変換を行う必要がなく、振動数方程式の誘導および振動モードの算出が簡明であり、解析手法の汎用的な電算プログラム化に有利である。

(5) 本研究では連続ばりに適用したが、ここでの解法を拡張発展させ、1節点に接続するいくつかのはり部材に対してつり合い条件式を求めれば、任意の骨組み構造に適用することが可能であろうと思われる。

なお、本研究の計算には(株)総合技術コンサルタントの電算システムACOS-350を用いた。

謝 辞：最後に、本研究にあたり貴重なご助言をいただいた金沢大学 梶川康男助教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 久保雅邦・坂野俊一：弾性節点・弾性支点を有する連続ばりの固有振動解析，第37回土木学会年次学術講演会講演概要集，I-56，昭和57年10月。
- 2) 久保雅邦・横井昭彦・間所晶子：連続ばりの固有振動解析法に関する一考察，昭和58年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要集，I-21，昭和58年5月。
- 3) 阪神高速道路公団・総合技術コンサルタント：振動解析モデルによる防振効果の検討報告書，昭和57年3月。
- 4) 梶川康男・大嶋信太郎：周辺環境への影響を考慮した高架橋への防振効果に関する一解析法，土木学会論文報告集，第341号，1984年1月。
- 5) R.K. リプスレイ，山田・川井(訳)：マトリックス構造解析入門，pp.8~11，培風館，1968年9月。
- 6) 小堀為雄・森本千秋：不完全な剛結部を有する構造物の振動性状について，土木学会論文報告集，第186号，1971年2月。
- 7) 平井一男：結合法による弾性支承を有する連続ばりの動的解析，土木学会論文集，第104号，1964年4月。
- 8) 岡本舜三：建設技術者のための振動学，pp.119~128，オーム社，1967年5月。
- 9) 渡辺 昇・林川俊郎・今野信一：ばね支承上の多径間連続桁の走行荷重による振動解析，第33回土木学会年次学術講演会講演概要集，I-271，昭和53年9月。
- 10) Hayashikawa, T. and Watanabe, N.: Dynamic Behavior of Continuous Beams with Moving Loads, ASCE, EM1, Feb. 1981.
- 11) 建築学大系19(建築耐震論)，pp.118~130，彰国社，昭和54年4月。
- 12) 小堀為雄：応用土木振動学，pp.29~41，森北出版，1974年4月。
- 13) 宮根憲二・桜井春輔：立体ラーメンの固有振動周期に関する2,3の考察，橋梁と基礎，5-9，Sept. 1971。
- 14) 前出11)，pp.118~130。
- 15) 前出12)，pp.61~65。

(1984.6.21・受付)