

卵形消化槽中の内容液による地震時壁面衝撃圧の一解法

AN ANALYTICAL METHOD OF IMPULSIVE WATER PRESSURE ON THE WALL OF EGG-SHAPED SLUDGE DIGESTER TANK DURING EARTHQUAKES

小坪 清真*・高西 照彦**・吉岡 民夫***・鳥野 清****

By Seima KOTSUBO, Teruhiko TAKANISHI, Tamio YOSHIOKA and Kiyoshi UNO

Egg-shaped sludge digester tank model with the scale of 1/30 was made of acrylic plastic. Horizontal and rocking vibration tests of the tank model were carried out on the shaking table with rather high frequency (10~25 Hz) and the impulsive water pressures on the tank wall in various water depth were measured. Theoretical solutions to analyze the impulsive water pressure in an axisymmetric rigid tank were deduced by using the transfer matrix method. It was proved that the theoretical values agreed well with the measured ones obtained from the model tests. The calculating diagrams were drawn to be able to obtain easily the equivalent mass of water in tank, its center of action and the equivalent moment of inertia of water.

1. ま え が き

近年、省エネルギーの観点から、下水処理場において、下水汚泥および有機汚泥等に対して、嫌気性消化法による処理がなされることが多くなっているが、その際、消化槽としては、従来から円筒形や亀甲形のものを用いられているのが現状である。しかし、円筒形消化槽にはその緩い傾斜の底部に細かい砂が堆積しやすいという欠点があり、また亀甲形のものには、その経線が折れ曲がる箇所に応力集中が生じるという欠点がある。これらの欠点はいずれも槽の幾何学的な形状に起因するものであることから、そのような欠点をもたない合理的な形状を有する消化槽が求められるようになった。その要求を満たすものとして、卵形をした消化槽が、約20年前に西ドイツで開発されて、現在西ドイツを中心に数多く建設され、稼働中であり、好成績を収めている。

卵形消化槽をわが国に導入する場合に、是非とも検討

しなければならない重要な問題は、その耐震性ということであろう。

卵形消化槽の耐震性について考えるとき、まず第一に解明しなければならない課題としては、その内容液による地震時動水圧およびスロッシングをどのように見積もればよいかという問題がある。

現在までに、種々な形状を有する容器について、その内容液による壁面動水圧および表面波高に対する理論的・実験的研究が Westergaard¹⁾、Jacobsen²⁾、Housner³⁾をはじめとして数多くの人^{4)-9)、11)-16)}によってなされてきた。その中でも Housner³⁾は、地震時動水圧を(i)地震の短周期成分に応答する衝撃圧と(ii)地震の長周期成分に応答する振動圧(いわゆるスロッシングによる動水圧)とに区別して取り扱うという実用的な方法を提案した。この方法に従えば、2種類の動水圧についてそれぞれ独立に見通しのよい解析を行うことができ、さらにそれに基づいて、それぞれの動水圧の作用を動的に等価な質量およびばね付き質量として表現することが可能であるため、一般に貯水槽に対する耐震計算を容易に行うことができるという利点がある。著者らも上記の Housnerの方法に従って、卵形消化槽の地震時壁面動水圧を衝撃圧と振動圧とに分けて考察することにした。本論では、まず衝撃圧の問題のみを取り上げることにする。

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科
(〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)

** 正会員 工博 九州工業大学助教授 開発土木工学科
(〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1)

*** オリエンタルコンクリート KK 主任研究員
(〒102 千代田区五番町五番地)

**** 正会員 工博 九州大学助教授 工学部土木工学科
(〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)

さて、現在までに卵形消化槽の地震時壁面動水圧に関して行われた研究としては、著者らの知るかぎり中村ら¹⁰⁾によるものがただ1つあるに過ぎない。中村らは内容液と消化槽とを一体として三次元 FEM による解析を行って、卵形消化槽壁面の最大動水圧分布を求めているが、そこでは振動圧と衝撃圧とは一体として取り扱われており、両者を区別して考察するというはなされていない。

本論ではまず、卵形消化槽模型を作製して、これに水を満たして振動台上に設置し、比較的高い振動数で加振したときの動水圧（衝撃圧）を模型の壁面に取り付けた水圧計によって測定した。次に、卵形消化槽の槽壁に働く内容液の衝撃圧を算定する理論について述べ、数値計算を行って得られた結果と上記の実験結果とを比較して理論の妥当性を検証した。さらに、形状がいろいろ異なる卵形消化槽について、内容液の地震時壁面衝撃圧とその作用点を容易に求めることができる図表を作製して、一般の卵形消化槽の耐震計算に必要な基礎的資料を提供した。

2. 振動実験

実験に用いた卵形消化槽模型を Fig.1 に示す。模型はアクリル樹脂製で、壁厚は 15 mm である。大きさは実物の約 1/30 である。模型には図に示すように、振動方向の一方の経線上の壁に、合計 5 個の水圧計 p1~p5 (共和電業製圧力変換器 PG-200 GD, 容量 0.2 kgf/cm²) を取り付けた。また、模型の天端、経線上および振動台上に加速度計 a1~a3 (共和電業製 AS-2 C, 容量 2 G) を取り付けられている。模型は鉄製の支持台 (A) を用いて、振動台上に剛結した。

内容液としては水を用いた。実際の消化槽中の内容液の比重は 1.0~1.2 程度であるが、比重の相違に対する補正は容易である。

振動実験は、水深をいろいろに変えた場合について、調和波加振による (i) 水平剛振動実験と (ii) ロッキング振動実験とを行って、上記の各測点における動水圧

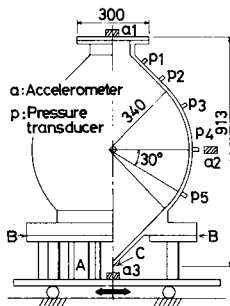


Fig.1 Egg-shaped sludge digester tank model, Unit (mm).

と加速度とを計測した。加振振動数としては、模型のスロッシングによる第一次の固有振動数が 1.5~2.5 Hz (水深によって異なる) であることおよび満水時の模型自身の弾性振動の第一次の固有振動数が 71.1 Hz であることを考慮して、上記の振動数の近傍を除いて実験を行った。少なくとも加振振動数が 6~25 Hz (実験は 25 Hz までしか行わなかった) の範囲内では、水平振動に対して、Fig.1 中の 3 個の加速度計はいずれも同一の加速度値を示した。それは、この振動数の範囲内では模型の弾性振動成分は無視できるほど小さく、したがって模型は剛振動を行っていると考えてもよいことを示唆している。また、第二次以上のスロッシングによる共振現象については、それは顕著には現われなかった。以上のことから、当然のことながら、6~25 Hz の加振振動数においては、同一の入力加速度に対しては各測点における動水圧の計測値は、常にそれぞれ相等しいという結果が得られるはずであるが、このことは実験的にも確かめられた。

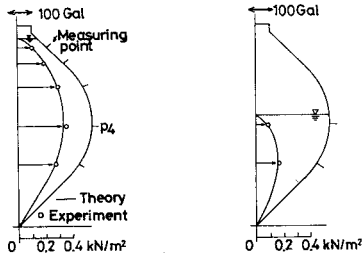
(1) 水圧計に対する補正

実験に用いた水圧計によって計測された生の測定値に対しては、次に述べるような 2 種類の補正を施す必要がある。すなわち、(i) 水圧計の受圧面に加わる受圧面自身の慣性力に対する補正と (ii) 水圧計の受圧面と水槽内壁間に取り込まれた水の慣性力に対する補正とである。(i) については、空虚時の模型を一定加速度で加振したときに得られる水圧計の出力 (見掛けの動水圧の値) を知ることによってその補正值を求めることができる。(ii) については、水圧計はその構造上、模型壁面と受圧面との間に水が取り込まれるが、その空間の形状を知らず、入力加速度が与えられたとき、この取り込まれた水による慣性力は有限要素法を用いれば計算することができる。以上の 2 種類の補正值を、実験によって得られた生の測定値からともに差し引くことによって、正しい動水圧の実験値が得られることになる。以下に示す動水圧の実験値はすべて上記の補正を加えた後に得られたものである。

(2) 水平剛振動実験

加振振動数は 6~25 Hz の間で、振動台入力加速度を 100 Gal として、水深をいろいろ変えて卵形消化槽模型の水平剛振動実験を行い、壁面動水圧を測定した。得られた結果のうち 10 Hz の場合の一例を Fig.2(a), (b) に示した。同図中、実験値は○印で表わしてある。なお実験値はすべて、模型の中立軸を基準として水平右向きに目盛っている。得られた実験値の誤差は、全実験を通じて 3~4% であった。また、測点の位置は図中一印で示した。

Fig.2 から、水深が深い場合には、模型の経線上の最



(a) Depth of water 0.846 m (b) Depth of water 0.495 m

Fig. 2 Maximum impulsive water pressure on the wall during horizontal vibration.

大壁面動水圧の分布形は、ほぼ経線の形に相似であることがわかる。また、たとえば Fig. 2(a) において、測点 p4 における実験値は 0.34 kN/m² であるが、この値は、この測定点と同一レベルにある内容液がすべて付着水として働くと考えたときの水圧 0.33 kN/m² (内容液の密度 1 000 kg/m³ × 半径 0.33 m × 加速度 1 m/s²) にほぼ等しい。上記の結果は、水深の深い卵形消化槽が比較的高い振動数で水平剛振動を行う場合には、内容液はその大部分が付着水として働くことを示唆している。

(3) ロッキング振動実験

Fig. 1 に示すように、模型は支持台 (A) を通して振動台に取り付けられているが、いまここで改めて、模型を支持台に固定しているボルトの部分 (B) に、振動方向前後および中心の 3 か所 (中心線に対称に合計 6 か所) にゴム製バックグを挿入し、前後のばねの間隔を変えてロッキングばねを加減することによって、振動台を一定の振動数で加振したとき、模型がその最下端 (C) を不動点とするロッキング振動を生じるように調整して、振動実験を行った。加振振動数を 22.5 Hz、模型の天端加速度を 100 Gal、水深を 0.846 m としたときの実験結果を Fig. 3 に示す。壁面動水圧の分布形は水平剛振動の場合によく似ているが、いまの場合は、水面に近い部分が相対的に多少膨らんだ形をしていることがわかる。動水圧の値は水平剛振動の場合に比べて小さい。

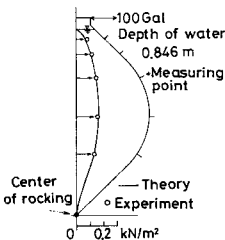


Fig. 3 Maximum impulsive water pressure on the wall during rocking vibration.

3. 理論解析

一般の軸対称容器について、その内容液による壁面衝撃圧の厳密な理論解を導くことは非常に困難である。そのため、勢い有限要素法等を利用した数値解法に頼らざるを得ないことになる。本章では、一般の軸対称容器に対する壁面衝撃圧を簡便に求めることができる有限要素法とは別の近似解法について述べる。

曾我部ら⁸⁾は、一般の軸対称容器中の液体のスロッシングに対する固有周期を求めるのに、内容液を厚さの薄い円筒状の集合体に分割し、これに伝達行列法を適用するという解析法を提案している。この方法に従えば、一般の軸対称容器中の液体のスロッシングに対する固有周期を容易に求めることができる。しかし、曾我部らの方法は、これをただちに軸対称容器の壁面衝撃圧問題に適用することはできない。特に、この方法によっては、一般に容器のロッキング振動に対する動水圧問題を解明することが困難である。

著者らは、曾我部らの方法を拡張して、一般の軸対称容器の水平およびロッキング剛振動に対する内容液の壁面衝撃圧を容易に求めることができる解析法を導いた。

(1) 水平剛振動の解析理論

a) 解析手順 (i) Fig. 4 に示すように、軸対称容器中の内容液を n 個の円筒要素に分割する。(ii) 状態量として内容液の衝撃圧と鉛直変位とを選び、各要素についてその下端の状態量を上端のそれに伝達する要素伝達行列および節点伝達行列を導く。(iii) 各要素について求めた伝達行列を順次掛け合わせることによって、結局、内容液の底面の状態量を自由表面の状態量に伝達する行列を得る。(iv) (iii) で得た伝達行列に対して、底面と自由表面における境界条件を適用することによって、残りの未知の状態量を定める。

b) 解析上の仮定 (i) 内容液は非粘性、非圧縮性、非回転流れである。(ii) 軸対称容器が比較的高い振動数で振動する場合の内容液の動水圧 (衝撃圧) のみを考察の対象とする。したがってそのときの表面波高は非常に低く、静止自由表面位置における動水圧は 0 としよ。 (iii) 内容液の変位は微小である。(iv) 容器は剛である。

c) 基礎方程式 まず、軸対称容器に対する座標系として円筒座標 (r, θ, z) を採用する (Fig. 5)。

次に、Fig. 4 から 1 つの要素を取り出して、この要素 k について考える (Fig. 6)。ここでは、誤解のおそれがないので簡単のため要素番号 k は省略する。

さて、前項 b) (i) の仮定により液体は速度ポテンシャル ϕ を有するので、円筒要素 k の内部 V_k の液体の運動を支配する方程式は、Fig. 6 に示す局所円筒座標 ($r, \theta,$

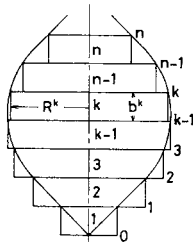


Fig. 4 Element discretization.

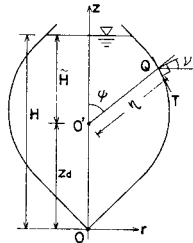


Fig. 5 Axisymmetric tank and cylindrical co-ordinates.

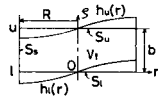


Fig. 6 Cylindrical element.

ξ) を用いれば、次式のように表わされる。

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (1)$$

容器の水平変位を δ とし、液体の運動は円周方向に余弦的に変化するとすれば、容器と液体との境界上における速度に関する境界条件式は、

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{d\delta}{dt} \cos \theta \quad (2)$$

で与えられる。また、要素 k の仮想境界上 S_u および S_b においては、それぞれ次式

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=b} = \frac{\partial \bar{h}^u}{\partial t}, \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial \bar{h}^l}{\partial t} \quad (3)$$

に示す境界条件が満足されなければならない。ここに、 \bar{h}^u 、 \bar{h}^l は円筒要素の上端および下端における液体の変位を表わし、b は要素の厚さである (Fig. 6 参照)。

要素内部の衝撃圧 \bar{p} は、液体の密度を γ とすれば

$$\bar{p} = -\gamma \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \quad (4)$$

で与えられる。式 (1)~(4) が水平振動に対する基礎方程式である。

いま、容器が円振動数 ω の調和振動をしている場合について考えて、

$$\bar{\delta}(t) = \delta e^{i\omega t} \quad (5)$$

条件式 (2) を満足する解として

$$\bar{\phi}(r, \theta, \xi, t) = i\omega \{ \phi(r, \xi) + r\delta \} \cos \theta \cdot e^{i\omega t} \quad (6)$$

$$\bar{h}(r, \theta, t) = h(r) \cos \theta \cdot e^{i\omega t} \quad (7)$$

$$\bar{p}(r, \theta, \xi, t) = p(r, \xi) \cos \theta \cdot e^{i\omega t} \quad (8)$$

とにおいて、式 (1)~(4) に代入すれば、基礎方程式から時間項 i と座標 θ の項とが消去できて次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=b} = h^u, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = h^l \quad (11)$$

$$p = \omega^2 \gamma (\phi + r\delta) \quad (12)$$

d) 要素の伝達行列 式 (10) の境界条件を満足する式 (9) の解は、A_m, B_m を未定係数として次式によって与えられる。

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} J_1 \left(\epsilon_m \frac{r}{R} \right) \left\{ A_m \cosh \left(\epsilon_m \frac{\xi}{R} \right) + B_m \sinh \left(\epsilon_m \frac{\xi}{R} \right) \right\} \quad (13)$$

ここに、J_1(r) は第一種第一次のベッセル関数で、ε_m は J_1(ε_m) = 0 を満たす第 m 番目の正根である。

いま、式 (12) の右辺第 1 項に式 (13) を代入し、第 2 項の r をフーリエ・ベッセル級数展開

$$\frac{r}{R} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\epsilon_m^2 - 1} \frac{1}{J_1(\epsilon_m)} J_1 \left(\epsilon_m \frac{r}{R} \right) \quad (14)$$

を用いて表わせば、衝撃圧 p は次式のように書ける。

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \omega^2 \gamma J_1 \left(\epsilon_m \frac{r}{R} \right) \left\{ A_m \cosh \left(\epsilon_m \frac{\xi}{R} \right) + B_m \sinh \left(\epsilon_m \frac{\xi}{R} \right) + \frac{2}{\epsilon_m^2 - 1} \frac{R\delta}{J_1(\epsilon_m)} \right\} \quad (15)$$

さて、式 (11) の h^u と h^l をベッセル関数を用いて

$$h^u(r) = \sum_{m=1}^{\infty} J_1 \left(\epsilon_m \frac{r}{R} \right) H_m^u \quad (16)$$

$$h^l(r) = \sum_{m=1}^{\infty} J_1 \left(\epsilon_m \frac{r}{R} \right) H_m^l \quad (17)$$

のように表わし、同式に式 (13) を代入すれば、A_m, B_m は H_m^u, H_m^l を用いて表わすことができ、

$$A_m = \frac{(R/\epsilon_m)}{\sinh(\epsilon_m b/R)} H_m^u - \frac{R}{\epsilon_m} \coth(\epsilon_m b/R) H_m^l \quad (18)$$

$$B_m = (R/\epsilon_m) H_m^l \quad (19)$$

となる。ここに、H_m^u, H_m^l はそれぞれ要素の上端および下端における液体の第 m 次 の鉛直振幅を表わす。

次に、式 (18), (19) を式 (15) に代入し、p(r, ξ) を h(r) と同様に

$$p(r, b) = \sum_{m=1}^{\infty} J_1 \left(\epsilon_m \frac{r}{R} \right) P_m^u \quad (20)$$

$$p(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} J_1 \left(\epsilon_m \frac{r}{R} \right) P_m^l \quad (21)$$

と表わせば、結局、状態量として選んだ衝撃圧振幅 P_m^u,

P_m^{ik} と鉛直変位振幅 H_m^{ik} , H_m^{ik} との間に成り立つ関係式が得られて、次式のように書ける。ここで、要素番号 k を付して表わせば

$$X_m^{ik} = (\Omega_m)^{-1} f^k \Omega_m X_m^{ik} \dots\dots\dots (22)$$

である。ここに、

$$X_m^{uk} = \left\{ \begin{array}{l} P_m^{uk} - \frac{2 R^k \omega^2 \gamma \delta}{(\varepsilon_m^2 - 1) J_1(\varepsilon_m)} \\ H_m^{uk} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

$$X_m^{lk} = \left\{ \begin{array}{l} P_m^{lk} - \frac{2 R^k \omega^2 \gamma \delta}{(\varepsilon_m^2 - 1) J_1(\varepsilon_m)} \\ H_m^{lk} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

$$f_m^k = \left(\begin{array}{cc} \cosh\left(\varepsilon_m \frac{b^k}{R^k}\right) & R^k \sinh\left(\varepsilon_m \frac{b^k}{R^k}\right) \\ \frac{1}{R^k} \sinh\left(\varepsilon_m \frac{b^k}{R^k}\right) & \cosh\left(\varepsilon_m \frac{b^k}{R^k}\right) \end{array} \right) \dots\dots\dots (25)$$

$$\Omega_m = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 \gamma / \varepsilon_m \end{array} \right) \dots\dots\dots (26)$$

式 (22) が要素 k の第 m 次の伝達行列である。

e) 節点の伝達行列 Fig. 4 に示すように、一般に各要素の半径は異なっているので、たとえば節点 k について、要素 k の上端の状態量 X_m^{uk} と要素 $k+1$ の下端の状態量 X_m^{lk+1} とをそのまま直接結びつけることができない。したがってここでは曾我部ら⁸⁾に従って次の2つの条件、すなわち要素 k の上端と要素 $k+1$ の下端において (i) 液体の流入・流出量が等しい (ii) 衝撃圧が等しいという条件を課すことによって、節点 k において要素が完全に連続している場合と等価になるように状態量に補正を施した。

まず、(i) の条件は次式によって満たされる。

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{R^{k+1}} \bar{h}^{lk+1}(r, \theta, t) r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{R^k} \bar{h}^{uk}(r, \theta, t) r dr d\theta \dots\dots\dots (27)$$

式 (7), (16), (17) を用いれば、上式から

$$H_m^{lk+1} = (R^k / R^{k+1})^2 H_m^{uk} \dots\dots\dots (28)$$

が得られる。次に、(ii) の条件は近似的に、要素の対称軸上での衝撃圧の勾配が等しいという条件に置き換えることができよう。したがってこの条件式は

$$\frac{\partial}{\partial r} |\bar{p}^{k+1}(r, \theta, 0, t)| |_{r=0} = \frac{\partial}{\partial r} |\bar{p}^k(r, \theta, b^k, t)| |_{r=0} \dots\dots\dots (29)$$

と書ける。式 (8), (20), (21) を用いれば、上式から

$$P_m^{lk+1} = (R^{k+1} / R^k) P_m^{uk} \dots\dots\dots (30)$$

が得られる。式 (28) と式 (30) とを行列表示すれば、節点 k における第 m 次の伝達行列が次式

$$X_m^{lk+1} = (\Omega_m)^{-1} q^k \Omega_m X_m^{uk} \dots\dots\dots (31)$$

のように求められる。ここに、

$$q^k = \left(\begin{array}{cc} R^{k+1} / R^k & 0 \\ 0 & (R^k / R^{k+1})^2 \end{array} \right) \dots\dots\dots (32)$$

f) 壁面衝撃圧の算出 要素 k において成立する要素の伝達行列 (式 (22)) と節点 k において成立する節点の伝達行列 (式 (31)) とを $k=1, 2, \dots, n$ について順次掛け合わせれば、次数 m に関して、内容液の下端 (容器の底面上) の状態量 X_m^{ln} と上端 (自由表面上) の状態量 X_m^{un} との関係を示す系全体の伝達行列が得られて、次のように表わすことができる。

$$X_m^{un} = C_m X_m^{ln} \dots\dots\dots (33)$$

ここに、

$$C_m = (\Omega_m)^{-1} c_m \Omega_m \dots\dots\dots (34)$$

$$c_m = \prod_{k=1}^n (q^k f_m^k), (q^k: \text{単位行列}) \dots\dots\dots (35)$$

さて、内容液の上下端における境界条件は、上端 (自由表面上) において衝撃圧 $\bar{p}^n(r, \theta, b^n, t) = 0$, 下端 (底面上) において鉛直変位 $\bar{h}^{ln}(r, \theta, t) = 0$ である。それぞれ式 (8), (20) および式 (7), (17) を用いれば、上記の境界条件は各次数 m について

$$P_m^{un} = 0 \dots\dots\dots (36)$$

$$H_m^{ln} = 0 \dots\dots\dots (37)$$

と表わされる。いま、行列 c_m の要素を c_{mij} と表示すれば (c_{mij} は既知の値である), 式 (36), (37) を用いて式 (33) から P_m^{ln} , H_m^{un} を求めることができ

$$P_m^{ln} = \frac{2 \omega^2 \gamma \delta}{(\varepsilon_m^2 - 1) J_1(\varepsilon_m)} \left(R^1 - \frac{R^n}{c_{m11}} \right) \dots\dots\dots (38)$$

$$H_m^{un} = - \frac{2 \varepsilon_m R^n \delta}{(\varepsilon_m^2 - 1) J_1(\varepsilon_m)} \frac{c_{m21}}{c_{m11}} \dots\dots\dots (39)$$

となる。 P_m^{ln} , H_m^{un} が与えられれば、式 (22), (31) を順次 $k=1, 2, \dots, n$ として用いることによって、 P_m^{lk} , H_m^{lk} , P_m^{uk} , H_m^{uk} を求めることができる。さらに、上記の手順を $m=1, 2, \dots$ について実行すれば、式 (20) より各節点の最大壁面衝撃圧

$$p_m^k = \sum_{n=1}^{\infty} J_1(\varepsilon_n) P_m^{uk} \dots\dots\dots (40)$$

を得ることができる。

(2) ロッキング振動の解析理論

軸対称容器が、Fig. 5 に示す点 O' を中心とするロッキング振動を行うときに生ずる壁面衝撃圧を求める理論について述べる。

解析手順および解析上の仮定については水平振動の場合と全く同じである。

a) 基礎方程式 要素 k (Fig. 6 参照) について考える。液体の速度ポテンシャルは、水平振動の場合と同様に式 (1) を満足する。

次に、容器のロッキング角変位を $\bar{\beta}$ とすれば、容器と液体との境界上における速度に関する境界条件式は

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} \Big|_{r=R} = (\bar{z} - R \tan \nu) \frac{d\bar{\beta}}{dt} \cos \theta \dots\dots\dots (41)$$

$$\bar{z} = z - z_a \dots\dots\dots (42)$$

と表わせる。ここに、 z_a および ν は Fig. 5 に示すように、それぞれ容器下端から回転振動の中心までの距離および壁面の外向法線が水平面となす角である。

上式の境界条件については多少の説明を必要とする。容器がロッキング振動をしているとき、Fig. 5 の点 Q における液体の法線方向速度は、厳密には $\eta(d\bar{\beta}/dt) \cos(\phi + \nu)$ である。ここに、 ϕ は z 軸と $O'Q$ とのなす角である。上記の速度は一般に、水平成分と鉛直成分とを有しているが、本論のように、内容液を円筒要素の集合体として取り扱う場合には、各要素についてその周面上の鉛直方向速度に関する境界条件はこれを導入することが困難である。そこで本論では、要素の周面上における衝撃圧が、容器の壁面上での厳密な境界条件を用いて求めた衝撃圧に等価になるように、要素の周面上の水平方向速度に修正を加えた。すなわち、点 O' を中心とするロッキング振動に対して、点 Q の回転速度は $\eta(d\bar{\beta}/dt)$ となるが、その水平および鉛直成分に、それぞれ対応する面積の比 b/l_s および l_r/l_s (Fig. 7 参照。図は円筒要素 k の周面と容器壁とに囲まれる部分を示す。) を重みとして掛けたうえで両者を加えた値を当該要素の周面上の水平方向速度として採用した。なお、 ν としては近似的に、Fig. 7 に示すように、容器の経線を経線上の節点を通る折線で置換したときの折線上の法線が水平面となす角(要素内で一定)を用いた。

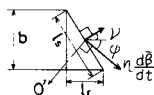


Fig. 7

仮想境界上における境界条件式および要素内衝撃圧に関しては、それぞれ式 (3) および式 (4) が成立する。式 (1), (41), (3), (4) がロッキング振動に対する基礎方程式である。

いま、容器が円振動数 ω でロッキング振動をしている場合を考えて

$$\bar{\beta}(t) = \beta e^{i\omega t} \dots\dots\dots (43)$$

$$\bar{\phi}(r, \theta, \zeta, t) = i\omega \phi(r, \zeta) + \beta r (\bar{z} - R \tan \nu) \cdot \cos \theta \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots (44)$$

$$\bar{h}(r, \theta, t) = |h(r) + \beta r| \cos \theta \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots (45)$$

$$\bar{p}(r, \theta, \zeta, t) = p(r, \zeta) \cos \theta \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots (46)$$

とにおいて、式 (1), (41), (3), (4) に代入すれば、基礎方程式は衝撃圧 p を除いては水平振動の場合と全く同型となり、式 (9)~(11) で表わされる。 p につい

ては式 (12) の代わりに次式が得られる。

$$p = \omega^2 \gamma \{ \phi + r \beta (\bar{z} - R \tan \nu) \} \dots\dots\dots (47)$$

b) 要素の伝達行列 水平振動の場合と全く同様にするれば、ロッキング振動に対する要素の伝達行列として次式を得る。

$$\tilde{X}_m^{uk} = (Q_m)^{-1} f^k Q_m \tilde{X}_m^{lk} \dots\dots\dots (48)$$

ここに、

$$\tilde{X}_m^{uk} = \left\{ \begin{matrix} P_m^{uk} - \frac{2 R^k \omega^2 \gamma (\bar{z}^k - R^k \tan \nu^k) \beta}{(\epsilon_m^2 - 1) J_1(\epsilon_m)} \\ H_m^{uk} \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

$$\tilde{X}_m^{lk} = \left\{ \begin{matrix} P_m^{lk} - \frac{2 R^k \omega^2 \gamma (\bar{z}^{k-1} - R^k \tan \nu^k) \beta}{(\epsilon_m^2 - 1) J_1(\epsilon_m)} \\ H_m^{lk} \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

$$\bar{z}^k = z^k - z_a \quad (z^k: \text{節点 } k \text{ の } z \text{ 座標}) \dots\dots\dots (51)$$

c) 節点の伝達行列 水平振動の場合と同様にするれば、節点の伝達行列として次式を得る。

$$\tilde{X}_m^{k+1} = (Q_m)^{-1} q^k Q_m \tilde{X}_m^{uk} + (Q_m)^{-1} s^k Q_m w_m \dots\dots\dots (52)$$

ここに、

$$s^k = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_m R^{k+1} (R^{k+1} \tan \nu^{k+1} - R^k \tan \nu^k) \\ 0 & \{ (R^k)^3 - (R^{k+1})^3 \} / (R^{k+1})^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (53)$$

$$w_m = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 2\beta / \{ (\epsilon_m^2 - 1) J_1(\epsilon_m) \} \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

d) 壁面衝撃圧の算出 式 (48), (52) を用いて、 $k=1, 2, \dots, n$ とし、中間の状態量を消去すれば、結局次数 m に関して内容液の下端の状態量 \tilde{X}_m^{ln} と上端の状態量 \tilde{X}_m^{1n} との関係を示す系全体の伝達行列が得られて、次のように表わすことができる。

$$\tilde{X}_m^{1n} = C_m \tilde{X}_m^{ln} + D_m \dots\dots\dots (55)$$

ここに、

$$D_m = (Q_m)^{-1} d_m Q_m w_m \dots\dots\dots (56)$$

$$d_m = \sum_{j=2}^n (\prod_{k=j}^n q^k f^k s^{j-1}) \dots\dots\dots (57)$$

さて、内容液の上下端における境界条件は、上端において衝撃圧 $\bar{p}^n(r, \theta, b^n, t) = 0$ 、下端において鉛直変位は

$$\bar{h}^{1l}(r, \theta, t) = -\beta r \cos \theta \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots (58)$$

である。それぞれ式 (46), (20) および式 (45), (17), (14) を用いれば、上記の境界条件は各次数 m について

$$P_m^{1n} = 0 \dots\dots\dots (59)$$

$$H_m^{1n} = -4 \beta R^1 / \{ (\epsilon_m^2 - 1) J_1(\epsilon_m) \} \dots\dots\dots (60)$$

と表わせる。いま、行列 d_m の要素を d_{mij} と表示すれば、式 (59), (60) を用いて式 (55) から P_m^{1n} , H_m^{1n} を求めることができ

$$P_m^{1n} = \frac{2 \omega^2 \gamma \beta}{(\epsilon_m^2 - 1) J_1(\epsilon_m)} \left\{ R_1 (\bar{z}^0 - R^1 \tan \nu^1) \right.$$

$$\left. \frac{R^n(\tilde{z}^n - R^n \tan \nu^n)}{C_{m11}} \frac{d_{m12}}{\varepsilon_m C_{m11}} + \frac{2R^1 c_{m12}}{\varepsilon_m C_{m11}} \right\} \dots\dots\dots (61)$$

$$H_m^{un} = \frac{2\beta}{(\varepsilon_m^2 - 1)J_1(\varepsilon_m)} \left\{ \frac{\varepsilon_m R^n (\tilde{z}^n - R^n \tan \nu^n) c_{m21}}{C_{m11}} + \frac{d_{m12} C_{m21}}{C_{m11}} - d_{m22} + 2R^1 \left(\frac{C_{m22}}{C_{m11}} - \frac{C_{m12} C_{m21}}{C_{m11}} \right) \right\} \dots\dots\dots (62)$$

となる。ところで、数値計算に際して上式を用いて H_m^{un} を求める場合、次数 m が大きくなるに従って有効数字の桁落ちが激しくなり、得られた値の精度が悪くなる。次のようにすればそれを防止することができる。すなわち、式 (25)、(32) を考慮すれば、式 (35) から

$$C_{m11} C_{m22} - C_{m12} C_{m21} = |c_m| = R^1 / R^n \dots\dots\dots (63)$$

の関係式を導くことができる。さらに、

$$\tilde{d}_m = c_m^{-1} d_m \dots\dots\dots (64)$$

によって \tilde{d}_m を定義し、その要素を \tilde{d}_{mij} と表示すれば

$$\frac{d_{m12} C_{m21}}{C_{m11}} - d_{m22} = \frac{\tilde{d}_{m22} R^1}{C_{m11} R^n} \dots\dots\dots (65)$$

という関係式を導くことができる。式 (63)、(65) を用いれば、式 (62) の H_m^{un} は次式のように表わせる。

$$H_m^{un} = \frac{2\beta}{(\varepsilon_m^2 - 1)J_1(\varepsilon_m)} \left\{ \frac{\varepsilon_m R^n (\tilde{z}^n - R^n \tan \nu^n) c_{m21}}{C_{m11}} - \frac{R^1 \tilde{d}_{m22}}{R^n C_{m11}} + \frac{2(R^1)^2}{R^n C_{m11}} \right\} \dots\dots\dots (66)$$

さて、 P_m^u 、 H_m^u が与えられれば、式 (48)、(52) を用いて P_m^{uk} 等を求め、さらにその値を使って各節点の最大壁面衝撃圧が算出できることは、水平振動の場合と全く同様である。

ところで、式 (48)、(52) から P_m^{uk} 等を求めるとき、一般に次数 m が大きい場合には式 (25) 中の双曲線関数の値が非常に大きくなって、桁落ちを生ずるようになり、そのため計算が途中で発散してしまつて P_m^{uk} 等を算出することができなくなることがある。このような場合には、次に示すような補正法を利用すればよいであろう。いま、次数 m について、 k 要素までの状態量が得られた場合を考える。 k 要素と n 要素の状態量の間には、式 (55) と同型の式が成り立つ。

$$\tilde{X}_m^{un} = C_m \tilde{X}_m^{uk} + D_m \dots\dots\dots (67)$$

いま、 k 要素の状態量に $\Delta \tilde{X}_m^{uk}$ の誤差があったとすれば、これを用いて算出した n 要素の状態量には誤差 $\Delta \tilde{X}_m^{un}$ が伝達されているはずであり、両者の状態量の間には式 (67) を参照すれば、次式の関係が成り立つ。

$$\tilde{X}_m^{un} + \Delta \tilde{X}_m^{un} = C_m (\tilde{X}_m^{uk} + \Delta \tilde{X}_m^{uk}) + D_m \dots\dots\dots (68)$$

したがって、式 (67)、(68) より次式が得られる。

$$\Delta \tilde{X}_m^{un} = C_m \Delta \tilde{X}_m^{uk} \dots\dots\dots (69)$$

$k \sim n$ について ($\tilde{X}_m^{uk} + \Delta \tilde{X}_m^{uk}$) は既知であり、また

\tilde{X}_m^{un} は式 (59)、(66) から求められるので、 $\Delta \tilde{X}_m^{un}$ を定めることができる。したがって式 (69) から $\Delta \tilde{X}_m^{uk}$ を定めることができ、これにより $k \sim n$ 要素に対する補正量がすべて得られることになる。

(3) 数値計算結果および考察

前節に示した理論に従って、種々の形状を有する卵形消化槽が、正弦的に水平またはロッキング剛振動を行うときの内容液による壁面衝撃圧分布を求めた。

まず、式 (16) 等の無限級数の次数 m による壁面衝撃圧の収束状態を知るために、Fig. 1 に示した卵形容器が水平剛振動をする場合について、水深を 0.846 m、入力を 100 Gal、要素分割数を $n=100$ として、採用次数 m をいろいろ変えたときの最大壁面衝撃圧を求めた。得られた結果を Fig. 8 に示す。図中 z は容器下端から計った壁面までの鉛直距離を表わしている。同図から、次数 m としては 10 次までを採用すればよいといえそうである。したがって、以下の数値計算においては、採用次数はすべて 10 次までとした。また試算の結果、要素分割数としては $n=100$ を採用すれば十分であることがわかったので、以下の計算ではすべて $n=100$ とした。

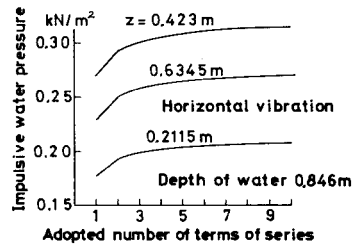


Fig. 8 Accuracy of calculation.

次に、Fig. 1 に示した卵形消化槽模型が水平およびロッキング剛振動をする場合について、水深および回転中心をいろいろ変えて、そのときの最大壁面衝撃圧分布を求めた。結果の一例を Fig. 2, 3, 9 に示す。図中実線が理論値を表わしている。理論値と前章の実験値とを比べると、いずれの場合についても両者はよく一致してい

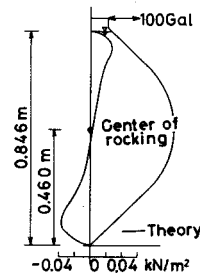


Fig. 9 Maximum impulsive water pressure on the wall of model during rocking vibration.

ることがわかる。

数値計算に関しては、主として2×2の行列を取り扱うだけであるから、記憶容量も少なくすむ、計算プログラムも簡単で、計算時間も非常に少なくすむという利点がある。

上記のことから、本章で述べた軸対称容器の水平およびロッキング剛振動に対する内容液の壁面衝撃圧を求め理論の有用性が示されたといえよう。

4. 壁面衝撃圧の簡易計算図表

杭基礎で支えられた卵形消化槽の地震応答計算を行う場合には、内容液の地震時壁面衝撃圧を考慮することが必要である。前述のように動水圧には2種類あるが、いまここでは衝撃圧のみを取り上げることにする。衝撃圧は式(38)等から明らかのように、槽の加速度に比例するから、これを付加質量に置換して取り扱うことが行われている³⁾。このようにすれば、貯液槽の地震応答計算を行う上で、その振動モデルを容易に作成することができて非常に便利である。本論でもこの考え方に従うとすれば、付加質量の大きさとその作用点を知ることが必要になる。さらに、杭基礎上の卵形消化槽は回転成分を有するので、これに基づく壁面衝撃圧も考慮に入れなければならない。

本章では、形状の異なる卵形消化槽に対する付加質量およびその作用点などを簡便に求めることができる計算図表を作成した。

卵形消化槽の形状を定めるために与えられる条件は、通常次のようなものである (Fig. 10 参照)。(i) 消化汚泥の自然沈下およびスキムの除去等を考えて、上部および下部の円錐部の傾斜角を45°とする。(ii) 基礎との関連を考慮して下部円錐部の母線の長さ l を定める。(iii) 攪拌装置の取り付け等を考慮して槽頭部開口の半径 r_e を定める。(iv) 要求される容量 V が与えられる。

以上の諸条件が与えられれば、槽中間部の円形壁の半径 R_e を求めることができるので、これによって卵形消化槽の形状が完全に決定されることになる。いま、

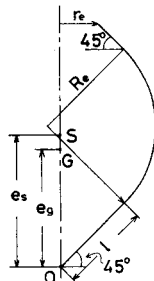


Fig. 10 Fundamental dimension of egg-shaped sludge digester tank.

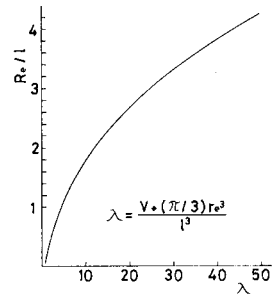


Fig. 11 $\lambda - R_e/l$.

$\lambda = (V + \pi r_e^3/3)/l^3 \dots \dots \dots (70)$
 を形状係数として選べば、 R_e/l は次の三次方程式の根として得られる。

$$(10 - 3\pi)(R_e/l)^3 + (3\pi - 6)(R_e/l)^2 + 6(R_e/l) + 2 - \lambda = 0 \dots \dots \dots (71)$$

λ を与えて R_e/l を求める計算図表を Fig. 11 に示す。

ここで、本章で用いる記号の定義を与えておく。

槽が水平剛振動をする場合について

(i) 付加質量係数 α_s : (壁面衝撃圧の水平方向成分の総和 P_H)/(内容液の慣性力), (ii) 付加質量の作用点の高さ e_s : 衝撃圧合力の作用高さ。

槽がロッキング振動をする場合について

(i) 水による付加慣性モーメント J_G : (Fig. 10において、点Gを通る図面に垂直の軸のまわりの壁面衝撃圧の全モーメント)/(ロッキング角加速度振幅), (ii) 内容液の慣性モーメント J_G^0 : 点Gを通る軸のまわりの全内容液を剛体と考えたときの慣性モーメント, (iii) e_G : J_G が最小になるような点Gの高さ, (iv) 付加慣性モーメント係数 α_{JG} :

$$\alpha_{JG} = J_G/J_G^0 \dots \dots \dots (72)$$

形状の異なる卵形消化槽 (内容液は満水状態とする) がそれぞれ水平およびロッキング剛振動を行う場合の壁面衝撃圧を前章の理論を用いて算出し、 α_s , e_s/l , α_{JG} 等を求め、それらの値を r_e/l をパラメーターとして、横軸に式(70)の λ をとって Fig. 12~14 に示した。上記の数値計算において P_H , J_G 等を求める際には、近似的に、Fig. 7 に示すように、容器の経線を経線上の節点を通る折線で置換し、それぞれ折線上での衝撃圧はすべて等しく一定で、それは両節点上における値の平均値で代表されると仮定した。

水平剛振動に対しては、 l , r_e , V , γ が与えられれば、Fig. 12 から α_s を求めることができるから、 $\alpha_s \gamma V$ によって付加質量が得られる。また、同図から付加質量の作用点の高さ e_s も得られる。

ロッキング振動に対しても同様に、 l , r_e , V , γ が与えられれば、Fig. 13 から J_G^0 , Fig. 14 から α_{JG} を求め

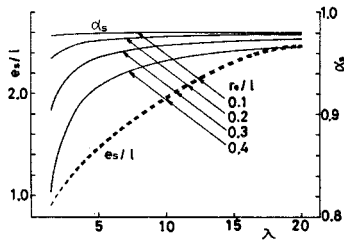


Fig. 12 $\lambda \sim e_s/l, \alpha_s$.

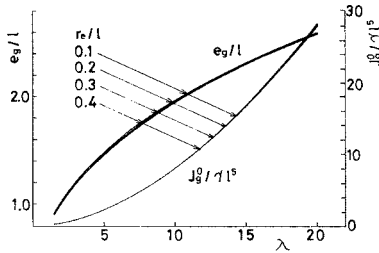


Fig. 13 $\lambda \sim e_g/l, J_g^0/\gamma l^2$.

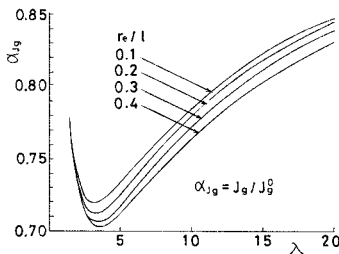


Fig. 14 $\lambda \sim \alpha_{JC}$.

ることができるから、 $J_c = \alpha_{JC} J_c^0$ によって点Gに関する付加慣性モーメントが得られる。また Fig. 13 から、 J_c に対する回転振動の中心の高さ e_g が得られる。もし、対称軸上の他の点Yに関する付加慣性モーメント J_Y が必要となきには、

$$J_Y = J_c + \alpha_s \gamma V e_{Yc}^2 \dots \dots \dots (73)$$

によって、これを求めることができる。ここに、 e_{Yc} は点Gと点Yとの距離である。

以上によって結局、 l, r_e, V, γ が与えられれば本章の計算図表を利用することによって、卵形消化槽の形状を定めることができ、さらにその地震応答計算のための振動モデルを作成する際に必要な諸量 ($\alpha_s, e_s, \alpha_{JC}$ 等) を簡便に求めることができることになる。

Fig. 12 から、水平剛振動に対する付加質量係数 α_s は $\lambda > 4, r_e/l < 3.5$ において (通常の卵形消化槽はこの範囲にある) 0.93 以上の値をとることがわかる。このことは、卵形消化槽では内容液の 93% 以上が付加質量として働くと考えなければならないことを示している。

ここで、付加質量の作用点に関して 1 つの注意を述べ

ておく。それは、剛体についてはその慣性モーメントが最小になる点と質量中心の位置とは一致するが、液体の付加質量についてはそのような関係は成り立たず、Fig. 12 の e_s と Fig. 13 の e_g とを比べてみればわかるように、同じ $\lambda, r_e/l$ に対して両者の値はわずかに異なっているということである。このことは一般に、貯液槽の地震応答計算に際して、その振動方程式を導くうえで複雑さを加える原因になる。幸い、卵形消化槽については両者の差は小さく、たとえば $\lambda = 4.84, r_e/l = 0.341$ に対して $e_s/l = 0.46302, e_g/l = 0.46199$ であるから、近似的には両者は等しいと考えてよさそうである。しかし、高さに比べて直径の大きい円筒形油槽については、その差は無視できないであろう。

5. おわりに

本論で得られた結果は、次のとおりである。

- (1) 実物の約 1/30 の卵形消化槽模型を作成して振動台上に設置し、水深をいろいろ変えて、比較的高い振動数で水平およびロッキング剛振動実験を行って、内容液による壁面衝撃圧を測定し、その分布形を明らかにした。
- (2) 一般の軸対称容器の水平およびロッキング剛振動に対する内容液による壁面衝撃圧を比較的容易に求めることができる近似解析理論を導いた。
- (3) (1) の実験値と (2) によって求めた理論値とはよく一致することを確かめ、上記の理論解の有用性を示した。
- (4) 通常の卵形消化槽が水平剛振動を行うときには、内容液の 93% 以上が付加質量として働く。
- (5) 形状の異なる卵形消化槽に対する内容液の付加質量とその作用点および任意の軸まわりの付加慣性モーメントを簡便に求めることができる実用的な計算図表を作製した。

なお、本論では卵形消化槽の槽壁が剛である場合を取り扱ったが、槽が地震を受けて振動するときには、槽壁は弾性変形を生じているはずである。槽壁の弾性変形を考慮した壁面動水圧の解析法については、現在研究中である。

参考文献

- 1) Westergaard, H.M. : Water pressure on dams during earthquakes, Transaction of ASCE, Vol. 98, pp. 418-433, 1933.
- 2) Jacobsen, L.S. : Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of fluid surrounding a cylindrical pier, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 39, pp. 189-204, 1949.
- 3) Housner, G.W. : Dynamic pressures on accelerated fluid containers, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 47,

- pp. 15~33, 1957.
- 4) Bauer, H.F. : Flüssigkeitsschwingungen in Kege-lbehälterformen, Acta Mechanica, Vol.43, pp.185~200, 1982.
 - 5) 曾我部潔：球形タンク内部の液体の液面動揺の固有周期の半実験式及び計算図表, 生産研究, 第26巻, 9号, pp.355~358, 1974.
 - 6) Chu, W.H. : Fuel sloshing in a spherical tank filled to an arbitrary depth, AIAA JOURNAL, pp.1972~1979, 1964.
 - 7) Chu, W.H. : Low-gravity fuel sloshing in an arbitrary axisymmetric rigid tank, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, pp.828~837, 1970.
 - 8) 曾我部潔・重田達也・柴田 碧：液体貯槽の耐震設計に関する基礎的研究, 東京大学生産技術研究所報告, Vol.26, No.7, pp.261~290, 1977.
 - 9) Haroun, M. A. and Housner, G.W. : Dynamic characteristics of liquid storage tanks, Proc. of ASCE, Vol.108, No.EM 5, pp.783~800, 1982.
 - 10) 中村 嶽・伊藤雅保・武田寿一：コンクリート製卵形消
 化槽の解析手法の検討, 大林組技術研究所報, No.28, pp.55~60, 1984.
 - 11) 坂井藤一・迫田治行：大型液体タンクの地震応答に関する研究, 第4回日本地震工学シンポジウム(1975)講演集, pp.623~630.
 - 12) 坂井藤一・小川 浩：ロッキングを考慮した円筒形液体タンクのパルジング振動, 第6回日本地震工学シンポジウム(1982)講演集, pp.1329~1336.
 - 13) 迫田治行・坂井藤一：球形タンク内容液の振動効果に関する研究, 圧力技術, Vol.16, No.3, 1978.
 - 14) LNG, LPG 関連技術特集号, 三菱重工技報, Vol.21, NO.2, 1984.
 - 15) Fischer, D. : Dynamic fluid effects in liquid-filled flexible cylindrical tanks, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.7, pp.587~601, 1979.
 - 16) 谷 資信・堀 直人・緑川 功：液体の入った円筒シェルのロッキング振動解析, 日本建築学会論文報告集, No.316, 1982.

(1984.5.21・受付)