

実用的制限条件を考慮した変断面ばりの塑性設計に関する一考察

PLASTIC DESIGN OF BEAMS WITH VARIABLE CROSS SECTIONS CONSIDERED THE PRACTICAL CONSTRAINTS

伊藤 満*・福本 昉士**

By Mitsuru ITO and Yuhshi FUKUMOTO

The purpose of this paper is to present a plastic design method of two-span continuous beams with variable cross section which is satisfied the requirements of deflection and stress constraints at service loads. This design is also intended to minimize the structural weight of the beams, and is shown a procedure to determine the modified stepped moment distributions correspond to the required plastic moment distributions in order to perform the practical design. Design loads are of any combinations of moving single and distributed live loads and dead load which are usually considered as bridge loadings.

1. 緒 言

鋼構造物の塑性設計は、構造部材の単位重量と塑性モーメントの間の相関性を利用して、構造重量の最小化を図ることが比較的容易にできる。塑性設計にこうした簡便さのある反面、最小重量設計された構造物は、構造物の崩壊強度が明確であることと、最小重量であること以外、他の剛性、応力などの制限条件についてはなんら保証されていない。

塑性設計を実際の橋梁構造物に適用していくためには、たわみ、応力などの制限条件をも考慮する必要があり、得られた設計は同時に、経済設計のために変断面とし、最小重量設計であることが望まれる¹⁾。

塑性設計の分野において、塑性強度とともに、たわみ、応力などの制限条件を同時に満たす塑性設計法の研究は、たとえば、文献2)、3)に紹介されている。文献2)、3)の中の研究は、建築構造物、主として、ラーメン構造物を対象としたものである。

Melchers⁴⁾は、最近、塑性設計から得られた情報を用

いて、弾性たわみを評価する方法についての提案を行っている。彼の方法は、塑性設計断面を補強することによって、たわみを許容値内に収めようとするものである。また、構造重量の経済性についてはふれていない。

Azad⁵⁾は、等分布荷重を受ける3径間連続ばりの最小重量塑性設計を行い、経済的スパン割りと、腹板高一定とした場合の経済的桁高さを求めている。彼の最小重量塑性設計は、構成断面の寸法値を用いて桁重量を求めるもので、実際の設計により近いものとなっているが、たわみ、応力などの制限条件についてはふれていない。

石川ら^{6),7)}は、弾性時におけるたわみ、応力の制限条件と同時に、終局時における塑性崩壊の条件を考慮した最小重量設計の問題を数理計画法の問題に置き換えて解いている。例として、簡単な不静定トラス、および、2層4スパンラーメンを扱っている。

本研究は、比較的簡単な方法で最小重量塑性設計されたはり、作用荷重を受けたときのたわみ制限、応力制限をも同時に満足するという、いわゆる、実用的制限条件を考慮した変断面ばりの最小重量塑性設計法についての1つの提案⁸⁾を行うものである。対象としたはりは等スパン2径間連続ばりである。また、先に著者らが行った重量最小化のみを目的とした塑性設計^{9),10)}との比較検討を行うものである。

* 正会員 工博 立命館大学教授 理工学部土木工学科
(〒603 北区等持院北町56-1)

** 正会員 Ph.D. 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科
(〒464 名古屋市中区不老町)

2. 変断面設計

(1) 用いた仮定と条件

- 1) 使用鋼材は理想弾塑性体とする。
- 2) たわみおよび全塑性モーメントに及ぼせん断力の影響は無視する。
- 3) はりは塑性ヒンジを形成することのできる断面構成とする。
- 4) 変断面等スパン2径間連続ばりを解析の対象とする。
- 5) 線荷重として単位幅員当たり P の荷重がはりを1個通過する。等分布活荷重として単位面積当たり p 、等分布死荷重として単位面積当たり q が載荷されるものとする。Fig.1 参照のこと。
- 6) 線荷重と1スパン(スパン長= L)の全分布活荷重との比を $\alpha = pL/P$ 、線荷重と1スパンの全死荷重との比を $\beta = qL/P$ とし、はりの中央支点モーメント M_B の大きさが $M_B/PL = (2 + \alpha + 2\beta)/\Delta$ で示されるものとする(式(1)参照)。ここに、 Δ は任意の係数とする。鋼道路橋示方書¹¹⁾のL-20 荷重によれば、線荷重 5 tf/m (49.0 kN/m)、活荷重 0.35 tf/m² (3.43 kN/m²) であるから、 α の値は $\alpha = 0.07 L$ (L in m) となる。
- 7) 荷重係数として、日本溶接協会の鋼構造物塑性設計基準案¹²⁾の $1.2 D + 2.1 L$ 、および $1.4 (D + L)$ (D : 死荷重, L : 活荷重)を、衝撃係数、たわみ制限値は鋼道路橋示方書¹¹⁾の規定を、応力制限値は軟鋼の比例限度応力度^{13), 14)}を参考に、1つの規準値として $\sigma_t = 2000$ kgf/cm² (196.1 MPa) を用いる。

(2) 支点モーメント

Fig.1 に示す連続ばりに線荷重 P 、分布活荷重 p 、等分布死荷重 q が作用するときの抵抗塑性モーメントは、通常、正の最大曲げモーメント $M_{s \max}(x)$ と、負の最大曲げモーメント $M_H(x)$ のうちの絶対最大曲げモーメントとして表示される。一方、塑性解析の下界定理を用いた変断面ばりの塑性設計では、不静定モーメント M_B の大きさは、設計に際して任意に選ぶことが可能である。こ

の場合、 $M_{s \max}(x)$ および $M_H(x)$ の大きさは、不静定モーメント M_B の大きさを適当に選ぶことにより決定できる。したがって、Fig.1 に示すような放物線形状の抵抗塑性モーメント分布を有するはりの変断面設計は無数にできることになる。結局、Fig.1 に示す抵抗塑性モーメント図の面積 $W_f = 2 \int_0^{x_0} M_{s \max}(x) dx + 2 \int_{x_0}^L M_H(x) dx$ 、(W_f : 重量関数に相当) を最小にするような変断面ばりの最小重量塑性設計は、支点モーメント M_B の大きさをどれくらいに選ぶかの問題になる。

文献9), 10)によれば、 W_f を最小にすることを目的とした設計では、抵抗塑性モーメントが $M_{s \max}(x)$ から $M_H(x)$ に変わる位置が $x_0 = 0.7071 L$ のときに最小重量設計が得られる。このときの支点モーメント M_B を設計荷重 P, p, q の各荷重が、単独に単純ばりに作用したときの最大モーメント量を用いて表わすと、 $M_B = (PL/4 + pL^2/8 + qL^2/8 \times 2) \times 0.5858$ となる。

本研究は、たわみ、応力、せん断抵抗などの実用的制限条件を最小重量とともに満たす設計を目的としているため、係数 0.5858 の代わりに任意の係数値 Δ を用いて支点モーメント M_B を表わすことにする。本設計は、設計手法として、抵抗塑性モーメントの分布形状 (Fig.1) を、任意な分布形状で与えるため、支点モーメント M_B の大きさを任意に選定することが必要である。したがって、 Δ は、 M_B の大きさを任意に与えるための係数である。すなわち、本研究に用いる支点モーメント M_B は、 $M_B = (PL/4 + pL^2/8 + qL^2/8 \times 2) \times \Delta$ となり、これを $\alpha = pL/P, \beta = qL/P$ で表わすと次式のようになる。

$$\frac{M_B}{PL} = \frac{1}{8} (2 + \alpha + 2\beta) \Delta \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $\alpha = pL/P, \beta = qL/P$ 。

(3) 抵抗塑性モーメント

線荷重 P のみが作用する場合の $M_{s \max}(x), M_H(x)$ は、文献9), 10) からそれぞれ、 $M_{s \max}(x) = P(L-x)x/L - M_B x/L, M_H(x) = M_B x/L$ である。この $M_{s \max}(x), M_H(x)$ の中の M_B の値に線荷重 P のみの場合の式(1)を用いると、 $M_{s \max}(x), M_H(x)$ は、それぞれ次式のように示される。

$$\begin{aligned} \frac{M_{s \max}(x)}{PL} &= \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right) - \frac{\Delta}{4} \left(\frac{x}{L}\right) \\ \frac{M_H(x)}{PL} &= \frac{\Delta}{4} \left(\frac{x}{L}\right) \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

したがって、Fig.1 に示すような荷重状態に対する $M_{s \max}(x)$ 、および $M_H(x)$ は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{M_{s \max}(x)}{PL} &= \frac{1}{8} \left[4(2 + \alpha + \beta) \left(1 - \frac{x}{L}\right) \right. \\ &\quad \left. - (2 + \alpha + 2\beta) \Delta \right] \left(\frac{x}{L}\right) \end{aligned}$$

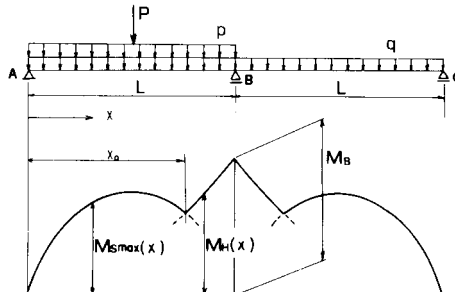


Fig.1 Resisting plastic moment diagrams.

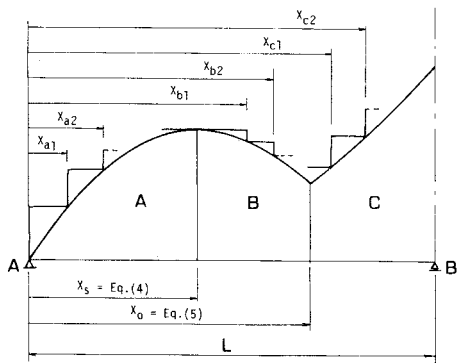


Fig. 2 Modified stepped moment distributions.

$$\frac{M_H(x)}{PL} = \frac{1}{8} \left[(2 + \alpha + 2\beta)\Delta + 4\beta \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right] \left(\frac{x}{L} \right) \dots (3)$$

(4) 階段状断面

式(3)で示される抵抗塑性モーメント分布は、実際の設計のために Fig. 2 に示すような階段状断面に置き換えられる。そして、最小重量を与える階段状断面の平滑化 (Smoothing)^{9), 10)}は、動的計画法 (D.P. 法) を用いて行うことができる。しかし、ここでは、設計の実用性を考えて、普通的设计事務所などでも容易に行うことのできる断面の平滑化を考える。すなわち、Fig. 2 に示すように抵抗塑性モーメント分布を A(0 ≤ x ≤ x_s), B(x_s ≤ x ≤ x₀), C(x₀ ≤ x ≤ L) の3区間に分ける。ここに、x_s は、正の最大曲げモーメント M_{s max}(x) の最大値を与える断面位置を示し、dM_{s max}(x)/dx = 0 より次式で与えられる。

$$\frac{x_s}{L} = \frac{1}{2} - \frac{(2 + \alpha + 2\beta)}{8(2 + \alpha + \beta)} \Delta \dots (4)$$

また、抵抗塑性モーメント分布が M_{s max}(x) から M_H(x) に変わる断面位置 x₀ は、M_{s max}(x₀) = M_H(x₀) とおき式(5)を得る。

$$\frac{x_0}{L} = \left(1 - \frac{\Delta}{2} \right) \dots (5)$$

これら A, B, C の各区間の抵抗塑性モーメント分布形状を最小面積でおおう階段状断面は、式(3)が二次の放物線であるから、それぞれの区間ごとに微分法¹⁵⁾を用いて容易に求めることができる。いま、A 区間内における階段状断面位置を微分法で求め、その断面位置を A 支点からの距離として式(6)で示すと、係数 C_{li} は Table 1 に示すようになる。

$$x_{ai} = C_{li} x_s \quad (l=1, \dots, 6, \quad i=1, \dots, l) \dots (6)$$

ここに、l は A 区間内における変断面数を示し、i は A 支点から i 番目の階段状断面を示す。

B 区間における階段状断面位置は、A 区間と同様に、

Table 1 C_{li} value.

<i>l</i> \ <i>i</i>	1	2	3	4	5	6
1	1.0					
2	0.333	1.0				
3	0.217	0.478	1.0			
4	0.167	0.344	0.563	1.0		
5	0.130	0.271	0.430	0.620	1.0	
6	0.108	0.224	0.350	0.491	0.661	1.0

C_{l,0} = 0.0 (l = 1, 2, …, 6)

Table 1 の係数値を利用して次式のように表わすことができる。

$$x_{bj} = x_0 + C_{m,m-j} (x_s - x_0) \dots (7)$$

(m = 1, …, 6, j = 1, …, m)

ここに、m は B 区間内における変断面数を示し、j は B 区間内における A 支点側から j 番目の階段状断面を示す。上式の係数 C_{m,m-j} は Table 1 の係数 C_{li} のサフィックス l, i を m, m-j に変えたものである。

C 区間内における階段状断面位置は、等間隔の階段状断面とする。これは C 区間内の抵抗塑性モーメント分布形状が、きわめてなめらかであることから、分布形状を直線とみなし、微分法により求めると等間隔に分割されることが容易にわかる。したがって、A 支点からの距離として C 区間内の階段状断面位置を x_{ck} で示すと、式(8)のようになる。

$$\frac{x_{ck}}{L} = \frac{1}{(n-1)} \left[(n-k) \frac{x_{c1}}{L} + (k-1) \right] \dots (8)$$

(n = 2, …, 6, k = 2, …, n)

ここに、n は C 区間内における変断面数を示し、k は C 区間内における A 支点側から k 番目の階段状断面を示す。式中、x_{c1} は C 区間内の最初の断面位置を示し、この位置 x_{c1} における断面は、B 区間内における最後の断面と連続した断面となるために、式(3)を用いて M_{s max}(x_{b,m-1}) = M_H(x_{c1})、(Fig. 3 参照) より次式で示される。

$$\begin{aligned} \frac{x_{c1}}{L} = & \frac{1}{2} - \frac{(2 + \alpha + 2\beta)}{8\beta} \Delta + \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{(2 + \alpha + 2\beta)}{8\beta} \Delta \right)^2 \right. \\ & + \left[\frac{(2 + \alpha + \beta)}{\beta} \left(1 - \frac{x_{b,m-1}}{L} \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{(2 + \alpha + 2\beta)}{4\beta} \Delta \right] \frac{x_{b,m-1}}{L} \right\}^{1/2} \dots (9) \end{aligned}$$

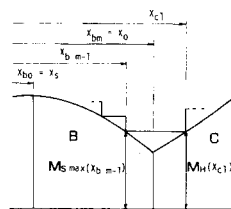


Fig. 3 M_{s max}(x_{b,m-1}) = M_H(x_{c1}).

$$(m=1, \dots, 6)$$

ここに、 $x_{b_{m-1}}$ は $m=1$ の場合 $x_{b_0}=x_s$ 、 $m \geq 2$ の場合、式 (7) を参照、上式から x_{c_1} が求まると上述したように式 (8) を用いて $x_{c_1} \leq x \leq L$ の区間を等分割することになる。ここで、式 (8) は $k \geq 2$ 、 $n \geq 2$ に対するものであり、 $k=n=1$ 、すなわち、C 区間内で断面変化がない特別の場合は、 $x_{c_1}=L$ である。

(5) 重量表示と形状条件

(4) で求めた階段状断面の重量を抵抗塑性モーメントの面積、すなわち、重量関数で示すと、A、B、C の各区間は次式のように示される。

A 区間 ($0 \leq x \leq x_s$)

$$W_A = x_s \sum_{i=1}^{l-1} |M_{s \max}(C_{i,t} x_s)(C_{i,t} - C_{i,t-1})| \dots \dots \dots (10)$$

$$(i=1, \dots, 6, \quad i=1, \dots, l)$$

B 区間 ($x_s \leq x \leq x_0$)

$$W_B = (x_0 - x_s) \left[M_{s \max}(x_s)(1 - C_{m,m-1}) + \sum_{j=2}^{m-1} |M_{s \max}(x_{b_{j-1}})(C_{m,m-j+1} - C_{m,m-j})| \right]$$

$$(m=2, \dots, 6, \quad j=2, \dots, m) \dots \dots \dots (11)$$

ただし、 $m=1$ の場合は、 $W_B = (x_0 - x_s) M_{s \max}(x_s)(1 - C_{m,m-1}) = (x_0 - x_s) M_{s \max}(x_s)$ である。

C 区間 ($x_0 \leq x \leq L$)

$$W_C = (x_{c_1} - x_0) M_{s \max}(x_{b_{m-1}}) + \frac{(L - x_{c_1})}{(n-1)} \sum_{k=2}^{n-1} |M_{s \max}(x_{c_k})| \dots \dots \dots (12)$$

$$(m=1, \dots, 6, \quad n=2, \dots, 6, \quad k=2, \dots, n)$$

ただし、 $n=1$ の場合は $W_C = (x_{c_1} - x_0) M_{s \max}(x_{b_{m-1}}) = (L - x_0) M_{s \max}(x_{b_{m-1}})$ 、($m=1, \dots, 6$) である。

A、B、C 各区間の変断面数 l 、 m 、 n が決まると、上式(10)~(12)を用いてはりの全重量 $W = W_A + W_B + W_C$ を求めることができる。各区間の変断面数 l 、 m 、 n と 1 スパンの変断面数 N との間には、 $N = l + m + n - 2$ の関係がある。この 1 スパンの変断面数 N が決まると、各区間の変断面形状の組合せは $N(N+1)/2$ 通りできることになる。これらの組合せに対するはり重量を上式を用いて求め、その中から最小重量を与える変断面形状を求めることができる。

これら各区間の変断面形状の任意の組合せをつくる際に、連続ばりの中間支点 B の抵抗塑性モーメント $M_B = M_{s \max}(L)$ と、B 区間の抵抗塑性モーメント $M_{s \max}(x)$ の大きさの間に一定の関係がないと変断面形状として成立しないことがある。このため各区間の変断面形状の任意の組合せに対して Table 2 に示すような抵抗塑性モーメントの形状条件が必要となる。

以上、(3)、(4)、(5) により任意の Δ 値に対する N 階段状断面 (l 、 m 、 n) の最適階段状断面位置なら

Table 2 Condition of $M_{s \max}$ and M_B .

N	l	m	n	形状条件
$N \geq 3$	$1, \dots, N-2$	$2, \dots, N-1$	$N-1, \dots, 2$	$M_{s \max}(x_{b_{m-1}}) < M_B$
N	$1, \dots, N$	1	$N+1-l$	$M_{s \max}(x_s) \leq M_B$
N	$1, \dots, N$	$N+1-l$	1	$M_{s \max}(x_{b_{N-l}}) = M_B$

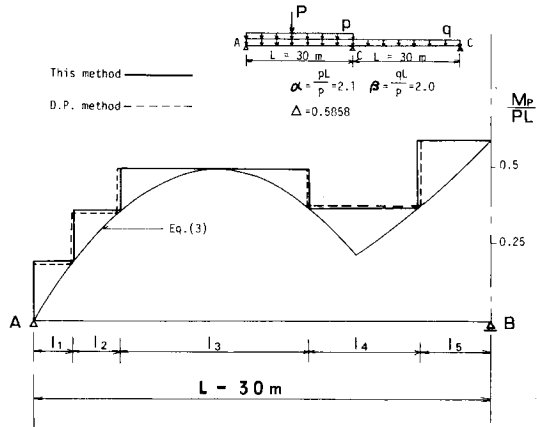


Fig. 4 Comparison of resisting plastic moment diagrams.

Table 3 Comparison of sub-length.

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
本解法	2.62	3.15	12.40	7.15	4.68
D.P.法	2.49	3.00	12.51	7.50	4.50

(unit : m)

びに、はり重量を組織的に求めることができる。

Fig. 4 は、スパン長 $L=30$ m、荷重比 $\alpha=2.1$ 、 $\beta=2.0$ 、 $\Delta=0.5858$ について本解法によって求めた最適階段状断面位置と、動的計画法 (D.P. 法)^{9),10)}を用いて求めたものとを比較したものである。 $\Delta=0.5858$ は、式 (3) の面積が最小になるときの Δ の値 (2. (2) 支点モーメント参照) である。実線が本解析によるものを、破線が D.P. 法によるものを示す。図からわかるように、A、B、C 各区間の分割数は $l=3$ 、 $m=2$ 、 $n=2$ であり、D.P. 法の結果と全く同一である。さらに、図から最適階段状断面位置 (Table 3) もほぼ同一とみなすことができる。はりの重量は、本解法によるものが $W_r = 0.4395 PL^2$ 、D.P. 法によるものが $W_r = 0.4393 PL^2$ であり、D.P. 法に比べて 0.05% の増加だけである。

3. 必要制限条件

(1) 腹板断面

あらゆる荷重の組合せの中で、最大せん断力 Q_{\max} は中間支点上断面に生じる。分布荷重 p 、 q によるせん断力は、静定基本系単純ばりのせん断力 $pL/2$ 、 $qL/2$ に p 、 q による支点モーメント $M_B = (\alpha + 2\beta)\Delta PL/8$ (式 (1))

参照)によるせん断力を加えたものと考え、 Q_{max} は、これらに線荷重 P を考慮し、 $Q_{max}=[(2+\alpha+\beta)/2+(\alpha+2\beta)\Delta/8]P$ となる。日本溶接協会の鋼構造物塑性設計基準案¹²⁾によれば、この Q_{max} は、 $Q_{max}/A_w=\tau_{max}<\sigma_y/\sqrt{3}=1350\text{ kg/cm}^2$ (A_w =腹板断面積、 τ_{max} =最大せん断応力、 σ_y =降伏点応力)でなければならない。したがって、 Q_{max} に対する腹板断面積の条件式として次式が必要である。

$$[(2+\alpha+\beta)/2+(\alpha+2\beta)\Delta/8]\times P/1350\leq A_w \dots\dots(13)$$

ここに、 P は kg 単位である。

さらに、はりの塑性ヒンジ形成点では、せん断力による塑性モーメントの低下に対する検討が必要である。塑性ヒンジの形成が可能である Fig. 1 の載荷状態において、塑性ヒンジ形成点は $x=x_s$ (Fig. 2) と中間支点上 $x=L$ である。この載荷状態に対するこれらの位置でのせん断力 Q_{x_s} 、 Q_L は、それぞれ次式ようになる。

$$Q_{x_s}=[1/2-(2+\alpha+2\beta)\Delta/8(2+\alpha+\beta)]P$$

$$Q_L=(1+\alpha+\beta)[1/2+(2+\alpha+2\beta)\Delta/8(2+\alpha+\beta)]P \dots\dots(14)$$

また、2つの断面の塑性モーメント値は、式(3)を用いて $M_p=M_{s\max}(x_s)$ および $M_p=M_H(L)$ であるから、それぞれの断面でのシャースパンを $a_s=M_{s\max}(x_s)/Q_{x_s}$ 、 $a_L=M_H(L)/Q_L$ とすると、 a_s 、 a_L は、それぞれ次式で示される。

$$a_s/L=[4(2+\alpha+\beta)-(2+\alpha+2\beta)\Delta]$$

$$a_L/L=[(2+\alpha+\beta)(2+\alpha+2\beta)\Delta]/(1+\alpha+\beta)$$

$$[4(2+\alpha+\beta)+(2+\alpha+2\beta)\Delta] \dots\dots(15)$$

前述の塑性設計基準案¹²⁾によれば、シャースパン a_s 、 a_L 、腹板高 d_w 、腹板断面積 A_w 、片側フランジ断面積 A_f の間に a_s/d_w 、 $a_L/d_w\geq 1.5$ 、 $0.73 a_s/d_w-0.59\geq A_f/A_w$ 、 $0.73 a_L/d_w-0.59\geq A_f/A_w$ の関係があるとき、せん断力による塑性モーメントの低下を考えなくてよい。いま、H形断面の塑性モーメント量 $M_p=\sigma_y[A_w d_w/4+A_f(d_w+t)]$ 、(t =フランジ厚)を $M_p\approx\sigma_y d_w(A_f+A_w/4)$ の近似式で示し、この式と上述の基準案の条件式から A_f を消去すると、腹板断面積 A_w についての条件式を得ることができる。すなわち、

$$\frac{M_{s\max}(x_s)}{\sigma_y(0.73 a_s-0.34 d_w)}\leq A_w$$

$$\frac{M_H(L)}{\sigma_y(0.73 a_L-0.34 d_w)}\leq A_w \dots\dots(16)$$

上式の A_w は、フランジ厚 t を無視した塑性モーメント M_p の近似式を用いても安全側である。また、 $a_s/d_w\geq 1.5$ 、 $a_L/d_w\geq 1.5$ の規定から、腹板高の上限値 $d_w\leq 2a_s/3$ 、 $d_w\leq 2a_L/3$ を得る。しかし、この腹板高さに対する上限値は、 a_s 、 a_L が大きいと、通常の設計で用いられる腹板高よりかなり大きき値となり、最小

重量設計に直接影響することはない。腹板に対する制限式として、さらに腹板の幅厚比制限 $d_w/w\leq 70$ 、(w =腹板厚)が必要であり、これより次式を得る。

$$d_w^2/70\leq A_w \dots\dots(17)$$

以上により、任意の Δ 値に対して d_w を与えたと式(13)~(17)を用いてせん断ならびに幅厚比制限に必要な腹板断面積 A_w を求めることができる。

(2) フランジ断面

腹板高 d_w および腹板高 w が一定 ($A_w=d_w\cdot w$ =一定) のはりの任意断面位置 $x=x$ における必要フランジ断面積は、次のようにして決定する。任意断面位置 x におけるH形断面の塑性モーメント $M_p(x)$ とフランジ断面積 $A_f(x)$ 、フランジ厚 $t(x)$ の間には、次式が必要である。

$$M_p(x)=\sigma_y[A_w d_w/4+A_f(x)d_w+t(x)] \dots\dots(18)$$

上式の左辺の $M_p(x)$ 値は、前節2.において、与えられた Δ 値に対して最小重量(抵抗塑性モーメントの面積最小)を与える N 階段状断面形(たとえば、Fig. 4)が決定されると、式(3)を用いて容易に求めることができる。したがって、はりの任意断面位置 x における必要フランジ断面積は、式(18)を満たす $A_f(x)$ 、 $t(x)$ を求めることになる。

このほか、フランジ断面は幅厚比制限を受ける。このフランジ断面積の幅厚比制限 $b/t\leq 17$ より、板厚は $[A_f/17]^{1/2}\leq t$ を必要とするから、この関係を式(18)に用いてフランジ断面積 $A_f(x)$ について整理すると、 $A_f(x)$ についての三次式、式(19)を得ることができる。

$$A_f(x)^3-(17 d_w^2)A_f(x)^2+[34[M_p(x)/\sigma_y - A_w d_w/4]d_w]A_f(x) -17[M_p(x)/\sigma_y - A_w d_w/4]^2=0 \dots\dots(19)$$

上式から必要フランジ断面積 $A_f(x)$ が得られ、 $[A_f(x)/17]^{1/2}\leq t(x)$ より必要フランジ厚 $t(x)$ を得ることができる。一方、塑性ヒンジが形成される断面 ($x=x_s$ 、 $x=L$) では、フランジ断面積は、せん断による塑性モーメントの低下に関する規定、 $A_f/A_w\leq 0.73 a/d_w-0.59$ 、(a =シャースパン)をも満足しなければならない。この規定と、式(18)より、塑性ヒンジ断面でのフランジ厚は、次式を満足するものでなければならない。

$$[M_p(x_i)-\sigma_y A_w d_w(0.73 a_i/d_w-0.34)]/[\sigma_y A_w(0.73 a_i/d_w-0.59)]\leq t(x_i) \dots\dots(20)$$

ここに、 i は塑性ヒンジ断面 ($x=x_s$ 、 $x=L$) に関するサフィックスを示し、 $\bar{i}=S$ 、あるいは $\bar{i}=L$ である。したがって、 $x=x_i$ 断面では式(19)、式(20)から得られる $t(x_i)$ のうち大きい方が必要フランジ厚となる。

このようにして、(1)、(2)により必要腹板断面積 A_w および必要フランジ断面積 $A_f(x)$ が求まると、 N 階段状断面ばりの1スパン分のはり重量 W は、次式で与

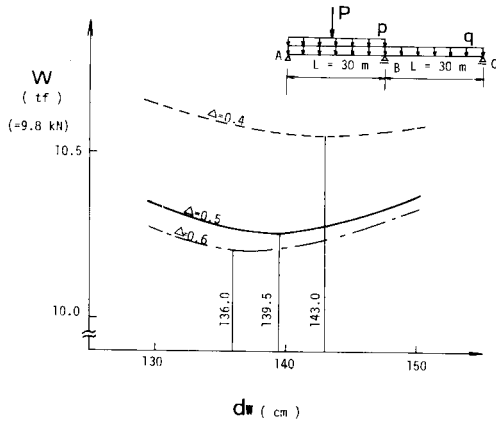


Fig. 5 Structural weight vs depth of web relationships.

えられる。

$$W = \left[2 \sum_{i=1}^{N-1} A_f(x) \cdot l_i + A_w L \right] \rho \dots\dots\dots (21)$$

上式にて、 N は 1 スパン内における変断面数、 l_i は分割区間長 (Fig. 4 参照)、 L はスパン長、 ρ は鋼材の密度を示す。上式を用いてはり重量 W を最小にする桁高 d_w を求めることができる。

Fig. 5 は、スパン長 30 m + 30 m、鋼桁の上に鉄筋コンクリート床版 (非合成) 300 cm × 20 cm を考え、1 スパンの変断面数 $N=5$ の階段状断面に対して、 $\Delta=0.4, 0.5, 0.6$ の場合について、はり重量-はり高関係を求めたものである。縦軸にはり重量 W (tf) をとり、横軸にはり高 d_w (cm) をとってある。この図から、 $\Delta=0.4, 0.5, 0.6$ に対して最小重量を与えるはり高は、それぞれ $d_w = 143$ cm, 139.5 cm, 136.0 cm であることがわかる。

(3) たわみ、応力度制限

上述のように、2. 変断面設計においては、ある Δ 値に対して抵抗塑性モーメント分布の面積 (重量関数) を最小にする階段状変断面形状が決定された。さらに、3. (1), (2) では、与えられた Δ 値に対して最小重量を与えるはりの断面寸法値が決定された。ここでは、前節までに得られた断面寸法値を用いて、設計荷重 $L-20^{11)}$ によるたわみ、応力計算を弾性計算により行う。算定されたたわみ、応力度は、それぞれ次式の制限値を満たすことが必要である。

$$\delta \leq \delta_{m1}^{11})$$

$$\sigma \leq \sigma_L \dots\dots\dots (22)$$

上式を満たす設計の中で、重量最小を与える設計を求める。以下に、本設計の手順の概略、および、設計フローチャートを示すと次のようである。

1) 2. 節において、任意の Δ 値に対して、抵抗塑性モーメント分布の面積を最小にする階段状変断面形状を

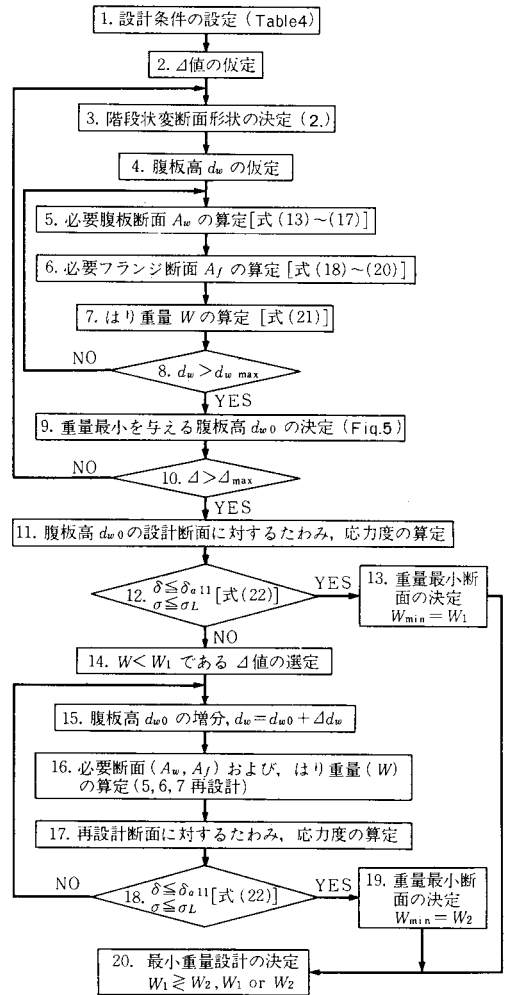


Fig. 6 Design Flow Chart.

決定する。

2) 3. 節において、これらの Δ 値に対して必要制限条件 [式 (13)~式 (20)] を満たし、重量最小 [式 (21)] を与えるはり高 d_w 、および、断面寸法値を決定する。

3) 1), 2) で決定された設計断面に対して、たわみ、応力度計算を行い、その中で式 (22) を満たす設計を W_1 とする。

4) 3) において、式 (22) を満たさなかった設計 (Δ 値) の中ではり重量 W が $W < W_1$ である Δ 値を選定する。

5) $W < W_1$ である設計断面に対して、はり高 d_w を増分させ 3. 節に戻って再び、必要制限条件を満たす断面寸法値 (再設計) を決定する。

6) 再設計断面が式 (22) を満たすまではり高 d_w を増分させて再設計を繰り返す。再設計の中で、式 (22) を満たす設計を W_2 とし、3) で求めた W_1 の設計との重量比較を行い、重量が小さい方を最小重量設計とする。

これらの設計手順をフローチャートにすると Fig. 6 のようになる。

以上のようにして、たわみ、応力度制限を同時に満たす変断面ばりの最小重量塑性設計を組織的に行うことができる。

4. 設計計算例

Table 4 の設計条件のもとで種々な Δ 値に対する設計を行った。設計条件のうち、設計荷重、衝撃係数、たわみ制限値については、日本道路協会の道路橋示方書¹¹⁾の規定値を用い、荷重係数は、日本溶接協会の鋼構造物塑性設計基準案¹²⁾のものを用いた。表中、応力度制限値は、文献 13)、14) などから軟鋼の比例限度応力度 1920~2000 kg/cm² を参考に、本設計では 1 つの規準値として 2000 kg/cm² を選んだ。

Fig. 7 は、Table 4 の設計条件のもとで各設計 (Δ 値)

Table 4 Design Condition.

スパン長	30m+30m	鋼材	SS 41 $\sigma_v = 2400 \text{ kg f/cm}^2$ (235.4 MPa)
鉄筋コンクリート床版 (非合成)	300cm×20cm	衝撃係数 ¹¹⁾	$i = 20/(50 + L)$
設計荷重 ¹¹⁾	L-20	たわみ制限値 ¹¹⁾	$\delta_{a11} = \frac{L}{20000/L}$
※ 荷重係数 ¹²⁾	$1.2D + 2.1L$ および $1.4(D + L)$	応力度制限値 ^{13),14)}	$\sigma_L = 2000 \text{ kg f/cm}^2$ (196.1 MPa)

荷重係数 (D : 死荷重, L : 活荷重)

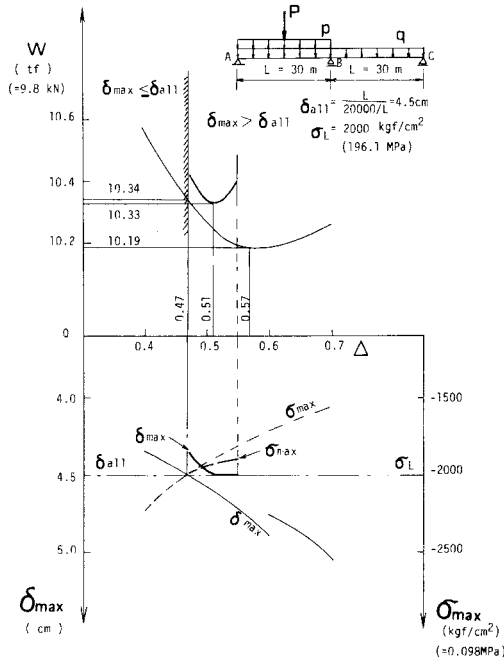


Fig. 7 W- Δ - δ_{max} - σ_{max} relationships.

に対して求めた、はり重量- Δ 値-最大たわみ量-最大応力度 (W - Δ - δ_{max} - σ_{max}) の関係を示したものである。

図は横軸に Δ 値を示し、それに対する 1 スパン分のはり重量 W (tf) を縦軸上段に示し、はりのスパン中央付近の最大たわみ量 δ_{max} (cm) と、中間支点上断面の最大応力度 σ_{max} (kg/cm²) を縦軸右下段に示したものである。図に示した設計は、 Δ 値を 0.4 から 0.7 まで 0.01 きざみで行ったものである。

図の上段におけるはり重量- Δ 値曲線 (細実線) は、曲げとせん断の必要制限条件 (3. 節) を同時に満たす断面の中で、重量最小を与えるはり重量- Δ 値曲線として示されている。図から重量最小である設計 (Δ 値) は、 $\Delta = 0.57$ であり、このときのはり重量は $W = 10.19 \text{ tf}$ である。しかし、縦軸下段に示すように、このときは、最大応力度 σ_{max} は制限値内 ($\sigma_{max} < \sigma_L$) にあるが、最大たわみ量 δ_{max} は制限値をかなりこえている ($\delta_{max} > \delta_{a11}$)。

図の上段において、ハッチング (斜線) から左側 $\Delta \leq 0.47$ の範囲が $\delta_{max} \leq \delta_{a11}$ 、ハッチングの右側 $\Delta > 0.47$ の範囲が $\delta_{max} > \delta_{a11}$ の設計である。いまここで、たわみ制限を満たさない $\Delta > 0.47$ の Δ 値に対して、再度 3. (3) で述べたように、はり高 d_w を増分させ制限条件を満たすように再設計を行った。その結果、はり重量- Δ 値関係は、図の上段に示す $\Delta = 0.47$ のところから描かれている太い実線ようになる。また、これらの再設計 ($\Delta = 0.47 \sim 0.55$) に対する δ_{max} 線、 σ_{max} 線は、図の下段に示す太い実線 (δ_{max} 線) ならびに、太い破線 (σ_{max} 線) のようにそれぞれ示される。

したがって、本設計の制限条件をすべて満たして重量最小となる設計は、 $\Delta = 0.51$ 、 $W = 10.33 \text{ tf}$ として得られる。このときの最大たわみ量は、はりのスパン中央付近に生じ $\delta_{max} = 4.49 \text{ cm}$ であり、また、最大応力度は、中間支点上断面に生じ $\sigma_{max} = -1930 \text{ kg/cm}^2$ であった。なお、図の下段に示した δ_{max} 線が、 $\Delta = 0.6$ のところで不連続になっているのは、 Δ の範囲が $0.4 \leq \Delta \leq 0.6$ と、 $0.6 \leq \Delta \leq 0.7$ では、階段状断面の形状が急に変化するためである。すなわち、 $0.4 \leq \Delta \leq 0.6$ の範囲では、階段状の変断面数が $0 \leq x \leq x_s$ (A 区間, Fig. 2 参照) で 3 変断面数、 $x_s < x \leq x_o$ (B 区間) と $x_o < x \leq L$ (C 区間) でそれぞれ 2 変断面数であったのが、 Δ の変化とともに、 $0.6 < \Delta \leq 0.7$ の範囲では変断面数が、A 区間 2、B 区間 2、C 区間 3 変断面数と変化したためである。 σ_{max} 線については、 δ_{max} 線にみられるような急激な変化はみられなかった。

Fig. 8 は、本設計 (Fig. 7) で求めた $\Delta = 0.51$ に対する階段状の変断面形状と、重量最小化のみを目的とした文献 9)、10) と同じ方法で求めた $\Delta = 0.5858$ (2. (2))

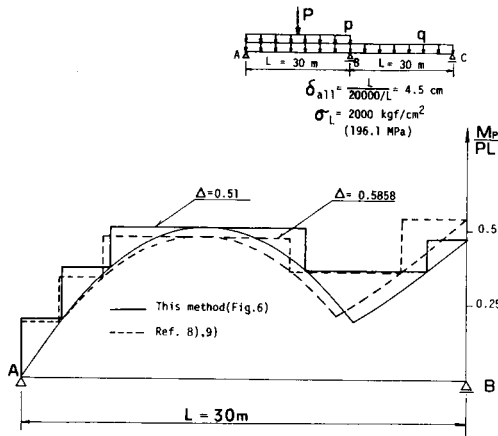


Fig. 8 Comparison of resisting plastic moment diagrams ($\Delta=0.51, \Delta=0.5858$).

支点モーメント参照) に対する変断面形状の比較を示したものである。図に示す変断面形状は、腹板高さと腹板厚さを一定としているため、フランジ断面の変化を示すものである。また、両設計で得られた各設計値の比較を示すと、Table 5 のようになる。重量最小化のみを目的とした設計は、表に示すようにたわみ制限値 ($\delta_{all}=4.5\text{ cm} < \delta_{max}=5.14\text{ cm}$) を満たしていない。

Fig. 8 は、スパン長 30 m + 30 m に対する 1 スパン分の鋼重 W と、1 スパンにおける変断面数 N の関係を示したものである。 $N=6$ 以上の変断面数の場合、鋼重 W にあまり差はなく、 $W=10.25\text{ tf}$ の線に漸近していきることがわかる。また、 $N=3$ と変断面数が少なくなると、鋼重が急激に増加していくことがわかる。この図から、溶接面での経済性と鋼重の経済性を考え併せるとするならば、変断面数は、 $N=4$ 、あるいは、 $N=5$ が適当と思われる。

Fig. 10 は、スパン長 30 m + 30 m、1 スパン変断面数 $N=5$ のほりについて、応力制限値を一定 ($\sigma_L=2000\text{ kg/cm}^2$) とし、たわみ制限値 δ_{Limit} を種々変化させた場合のほり重量 W -たわみ制限値 δ_{Limit} 関係を示したものである。たわみ制限が $\delta_{Limit}=L/800$ と厳しくなると、たわみ制限を満たすようにはりの剛性を増加させるため、鋼重が急に増加することがわかる。また、たわみ制

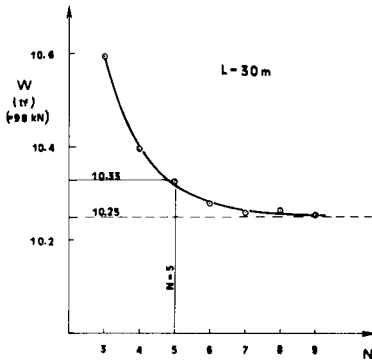


Fig. 9 Structural weight vs stepped numbers relationships.

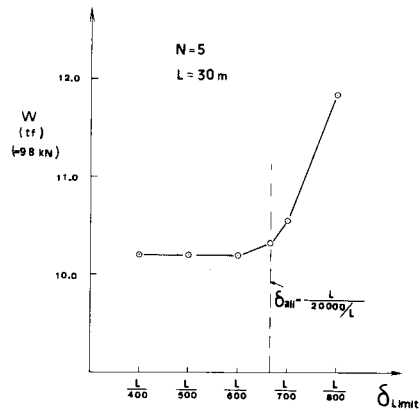


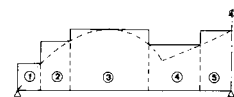
Fig. 10 Structural weight vs deflection limit relationships.

限を $\delta_{Limit}=L/600 \sim L/400$ とゆるくすると鋼重 W は、一定値を示すようになる。これは、たわみ計算の前に抵抗塑性モーメント、および、せん断抵抗に必要な断面として決定されたほり断面が、それだけで十分たわみ制限値を満たす断面となっているからである。

このように、本設計で得られる最適断面は、抵抗塑性モーメント、および、せん断抵抗に対してぎりぎり必要な経済断面になっているが、作用荷重によるたわみ、応力などについては必ずしも制限値ぎりぎりの断面ではない。しかし、一度、抵抗塑性モーメント、せん断抵抗に対して決められた断面に対して、作用荷重によるたわみ、応力の制限値に入るようにはり高 d_w を増分させた場合

Table 5 Comparison of Design.

設計法	Δ 値	ほり重量 W (tf)	最大たわみ量 δ_{max} (cm)	最大線応力度 (中間支点) σ_{max} (kg f/cm ²)	断面寸法値 (mm)					
					腹板 $d_w \times w$	フランジ $b \times t$				
						①	②	③	④	⑤
本設計	0.51	10.33 (101.2 kN)	4.49	-1 930 (-189.3 MPa)	1 485 × 22	136 × 8	271 × 16	379 × 23	271 × 16	365 × 22
文献 9), 10)	0.5858	10.12 (99.2 kN)	5.14	-1 790 (-175.5 MPa)	1 351 × 20	136 × 8	306 × 18	425 × 25	323 × 19	476 × 28



は、抵抗塑性モーメント、せん断抵抗に対してもぎりぎり必要とされる経済断面であると同時に、たわみ、応力のどちらかについても必要最小限の最適な設計となっている。

5. 結 論

作用荷重時におけるたわみ制限、および、応力度制限を考慮した2径間連続ばりの最小重量塑性設計を行い、変断面設計の方法について考察を加えた。また、重量最小化のみを目的とした変断面塑性設計との比較を示し、はり重量、たわみ、応力度について検討を加えた。

以下に、本研究で得られた主な結果、および、検討事項は次のようである。

(1) 変断面設計における階段状断面位置は、本設計のように抵抗塑性モーメント分布形状をA, B, Cの3区間に分けた微分法によれば、動的計画法(D.P.法)とほぼ同じ結果が得られる。

(2) 中間支点モーメント M_B を任意の係数 Δ を用いて表わすことにより、抵抗塑性モーメントの分布形状そのものを変数として扱える。このため、任意の抵抗塑性モーメント分布形状に対する最適階段状断面位置、および、はり重量(重量関数)が一連の式で表示でき、これらを組織的に求めることができる。

(3) せん断に必要な腹板断面積を設計荷重、および、係数 Δ を用いて表わした。これらを用いて、腹板高、腹板厚を一定とした場合の連続ばりの抵抗塑性モーメントに必要なH形断面の重量最小化を図った。

(4) 作用荷重時におけるたわみ制限、および、応力度制限を考慮した2径間連続ばりの最小重量塑性設計の方法、および、設計手順を設計例(Fig.7)により示した。

(5) 重量最小化のみを目的とした変断面塑性設計との比較設計を示し、はり重量、たわみ、応力度、抵抗塑性モーメントの分布形状の違いについて考察を行った。

(6) はり重量と変断面数との関係を求めた。溶接面での経済性と鋼重の経済性を考え併せると、等スパン2径間連続ばりの1スパンにおける変断面数は $N=4, 5$ が適当と思われる。

(7) 応力度制限値を一定とし、たわみ制限値を種々変化させた場合のはり重量とたわみ制限値との関係を求めた。

なお、今後の問題として、本設計法を多径間連続ばり、あるいは、ラーメン構造などの高次不静定構造にいか

適用していくかの問題が残されているように思われる。これらの問題については、今後検討を加えていくつもりである。

参 考 文 献

- 1) 伊藤 学・前田幸雄・深水正保・鳥居邦夫・正道博照：塑性設計法の歩道橋への適用，土木学会誌，Vol. 54，pp. 40~47，1969年5月。
- 2) 成岡昌夫・中村恒善：骨組構造解析法要覧，培風館，pp. 290~310，1976年4月。
- 3) Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C. (川井忠彦・戸川隼人監訳)：最適構造設計，培風館，pp. 247~262，1977年6月。
- 4) Melchers, R. E. : Service Load Deflections in Plastic Structural Design, Proc. of ICE, Vol. 69, Part 2, pp. 159~174, March, 1980.
- 5) Azad, A. K. : Optimum Design of Three-Span I-Beams, Proc. of ASCE, Vol. 107, No. ST-12, pp. 2433~2437, December, 1981.
- 6) 石川信隆・三原徹治・香月 智：使用時と終局時の制約を同時に考慮した骨組構造の最適設計に関する一考察，土木学会第38回年次学術講演会講演概要集，第1部門，I-215，pp. 429~430，1983年9月。
- 7) 石川信隆・三原徹治・香月 智・古川浩平：弾性および塑性設計基準を同時に考慮した骨組構造の最適設計法(英文)，土木学会論文集，第350号/I-2，pp. 97~104，1984年10月。
- 8) 伊藤 満・福本昤士：実用的制限条件を考慮した変断面ばりの塑性設計，土木学会第35回年次学術講演会講演概要集，第1部門，I-345，pp. 683~684，1980年10月。
- 8) 福本昤士・伊藤 満：変断面ばりの塑性設計に関する一考察，土木学会論文報告集，第185号，pp. 1~7，1971年1月。
- 10) Fukumoto, Y. and Ito, M. : Minimum Weight Plastic Design of Continuous Beams, Proc. of ASCE, Vol. 107, No. ST-7, pp. 1263~1277, July, 1981.
- 11) 道路協示方書・同解説，I 共通編，II 鋼橋編，日本道路協会，1980年2月。
- 12) 鋼構造物塑性設計基準案，日本溶接協会塑性設計研究委員会，1968年。
- 13) 前田幸雄・竹内修治：塑性設計法による横断歩道橋の最小重量設計とその自動化について，土木学会論文報告集，第168号，pp. 1~13，1969年8月。
- 14) 小西一郎・横尾義貫・成岡昌夫・丹羽義次：構造力学第1巻，丸善，p. 248，1982年2月。
- 15) たとえば，細川弥重・田島二郎：合成桁の設計，オーム社，pp. 109~110，1971年8月。

(1984. 5. 18・受付)